This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.W 855e
1730

ELEMENTA
MATHESEOS UNIVERSÆ,
TOMUS II.

789-45

QUI

MECHANICAM CUM STATICA, HYDROSTATICAM, AEROMETRIAM ATQUE HYDRAULICAM

COMPLECTITUR.

AUTORE

CHRISTIANO WOLFIO,

POTENT. SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII, CONSILIARIO AULICO, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ IN ACADEMIA MARBURGENSI PROFESSORE PRIMARIO, PROFESSORE PETROPOLITANO HONORARIO, SOCIETATUM REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ SODALI.

EDITIO NOVA

PRIORI MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.

CUM PRIVILEGIO SACRÆ CÆSAREÆ MAJESTATIS ET POLONIARUM REGIS ET SAXONIÆ ELECTORIS.

HALÆ MAGDEBURGICÆ, A. MDCCXXXIII.

PROSTAT IN OFFICINA LIBRARIA RENGERIANA.

PRÆFATIO.

NOva hæc Matheſeos elementa eo fine conſcripſimus, ut Mathematum cultores palmarias Matheſeos univerſæ veritates labore facili intra breve temporis ſpatium ſibi familiares reddere ac methodi verioris ideam lucidam animo comprehendere valeant: ita enim futurum confidimus, ut ad legendos quosvis Autores, qui de rebus mathematicis commentati ſunt, apti efficiantur, & judicio pollentes ad quascunque a Matheſi diverſas ſcientias ſeverius & fructuoſius tractandas accedant. Atque eodem conſilio novæ huic

Elementorum editioni plurima adjeci, quæ in priore non leguntur, ut adeo totum opus in duos tomos diviſum antea, in quatuor nunc ſecari opus fuerit. Prodit jam Tomus ſecundus, qui Mechanicam, Hydroſtaticam, Aërometriam & Hydraulicam complectitur, atque adeo motum & æquilibrium ſolidorum ac fluidorum exponit. Veteres, præeunte ARCHIMEDE in libris de æquiponderantibus & inſidentibus humido, ultra æquilibrium gravium non progreſſi ſunt, primusque fuit GALILÆUS, qui eorum inventis aliquid addere auſus motum gravium ad notiones diſtinctas & foecundas revocavit, uſum curvarum in cognitione Naturæ mathematica clariſſimo ſpecimine demonſtrans. Patebat jam magis via ad mathematicam Naturæ cognitionem, & Geometria indiviſibilium uberius exculta tandemque ad Ana-

Analyſin certam revocata ferebatur, ut ſublimiora ingenia ad veritates maxime abſtruſas atque abditas accederent. Admiranda igitur de motu ſolidorum ac fluidorum hodie proſtant inventa, ſed ita ab inventoribus propoſita, ut ab iis tangendis arceantur tyrones & quotquot in Matheſi conſeneſcere, omneque tempus ſuum conſumere prohibentur. Noſtrum fuit præcipua illa inventa, quibus in Matheſi non datur ſublimius, cum primis principiis evidenter connexa proponere, ut, qui ſedato animo in elementis noſtris tractandis progreditur eo, quo conſcripta ſunt, ordine, illa eadem facilitate perſpiciat, qua quæ facillima erant in anterioribus perſpexerat. Ea de cauſa Mechanica inprimis & Hydraulica plurimis acceſſionibus in nova hac editione aucta. Ita theoriam de motu gravium effecimus

 gene-

ro dubito non defuturam in hoc ſecundo Tomo materiam, in qua interea induſtriam ſuam exerceant Mathematum cultores, donec tertius comparuerit. Continentur in hoc Tomo, quæ ad Naturæ cognitionem magnum momentum afferunt: utut ingens quoque eorum farrago ſit, quæ ad vitæ non minus jucunditatem, quam neceſſitatem utilia. Quotquot igitur animum habent ſciendi cupidum, ex materiis, de quibus hic inſtituitur tractatio, plurimum voluptatis percipient. Neque ullus dubito fore, ut, qui cum attentione in iis diſcutiendis verſati fuerint, artem inveniendi ipſo uſu ſibi ſint comparaturi, qua deinceps extra Matheſin feliciſſime utentur. Dabam Marburgi Cattorum d. 28. Martii A. 1733.

ELEMENTA
MECHANICÆ
ET
STATICÆ.

PRÆFATIO.

A Pleriſque Autoribus, qui Mechanicæ elementa in uſum tyronum explicarunt, non omnis motus ratio habetur, ſed ejus tantum, qui vel virium, vel temporis aliquo compendio ope machinarum perficitur. Nec improbandum eſt eorum inſtitutum, ſi quidem plura docere non intendunt, quam quæ in conſtruendis & examinandis machinis uſum præbere poſſunt. Quoniam tamen nobis conſtitutum eſt, Matheſeos elementa dare non modo ad uſum vitæ humanæ ſed & ad profectum ſcientiarum, Phyſicæ præſertim, ſufficientia; ideo conſultum duximus, ut de iis quoque tractaremus, quæ ad illuſtrandam motus doctrinam hactenus inventa. Hæc enim neceſſaria ſunt ad Naturæ cognitionem, ut ſine iis certa obtineri nunquam poſſit, cum in motu plurimorum phænomenorum ratio contineatur. Ipſarum vero etiam machinarum conſideratio minime negligenda ab eo, qui cum laude in phyſicis aliquando verſaturus, cum motus corporum organicorum expli-

catio fruſtra ſine his principiis tentetur. Quanta felicitatis humanæ pars motuum ſcientiæ ſuperſtruatur, experientia clariſſime loquitur. Huic enim acceptum ferimus, quod pecudes & corpora inanimata peragant, quæ nos neceſſitatibus vitæ humanæ impulſi non ſine maximo ſudore perageremus. Eum igitur in finem non ſolum machinarum ſimplicium (quod vulgo fieri ſolet) rationem omnem fideliter expoſui; verum etiam hinc inde annotavi, quæ ad earum conſtructionem ſcitu neceſſaria ſunt, & deſideratam hactenus in iſtiusmodi elementis tractationem de potentiarum ad machinas applicatione addidi. Quos rerum naturalium cognitio parum juvat, his ſolis contenti præterire poſſunt motus regulas: machinarum enim vires ſine iis plerumque plene intelligent. Quamvis vero nonnulli Staticam a Mechanica ſejungant; conſultius tamen viſum fuit ſororio vinculo utramque connecti, cum ita demonſtrationes nexu pulchriori concatenare liceret.

ELEMENTA MECHANICÆ.

CAPUT I.

De MOTU ÆQUABILI.

DEFINITIO 1.

1.

MEchanica eſt ſcientia motus. *Staticam* vocant nonnulli ejus partem, quæ de æquilibrio ſolidorum agit.

DEFINITIO 2.

2. *Quies* eſt permanentia corporis in eodem loco. *Motus* vero eſt continua loci mutatio.

SCHOLION.

3. Moveri *nempe dicitur corpus, ſi ſucceſſive aliis aliisque corporibus quieſcentibus aut ejusdem corporis quieſcentis partibus fit contiguum.*

DEFINITIO 3.

4. *Gravitas* eſt niſus deorſum verſus centrum terræ.

DEFINITIO 4.

5. *Gravitatio* eſt preſſura, quam corpus in aliud ſibi ſubjectum vi gravitatis ſuæ exercet.

DEFINITIO 5.

6. *Maſſa* corporis eſt materia ipſi cohærens, hoc eſt, quæ una cum corpore movetur & gravitat.

DEFINITIO 6.

7. *Moles* ſeu *volumen* eſt expanſio corporis ſecundum longitudinem, latitudinem & profunditatem.

COROLLARIUM.

8. Invenitur adeo per regulas Geometriæ.

DEFINITIO 7.

9. *Vis Motrix* ſeu *vis* ſimpliciter eſt principium motus, ſeu id, unde motus in corpore pendet. Dicitur *viva*, ſi cum motu actuali conjungitur, qualis eſt in globo cadente. *Mortua* vero vocatur, ſi ad motum producendum tendit quidem, verum motum actu nondum producit, ſeu quæ in ſolo niſu ſeu conatu ad motum conſiſtit, qualis eſt in globo ex filo ſuſpenſo & in elatere tenſo, quod ſe reſtituere nititur.

SCHOLION.

10. *Hanc virium diſtinctionem dudum agnovere inter homines plebejos molitores noſtrates.* Mortuam *enim vocant* aquam *in alveo ſtagnantem aut ſegniter*

admodum fluentem; vivam vero, *qua impetu concepto rotis molendinorum circumagendis ſufficit. Acutiſſimus* Leibnitius *cum magnum momentum in ea ſitum eſſe deprehenderet ad motuum doctrinam rite tradendam, eandem in mechanicam introduxit* (a).

DEFINITIO 8.

11. *Tempus* hic voco eam temporis partem, qua motus duraſſe ſupponitur.

DEFINITIO 9.

12. *Spatium* eſt linea, quam mobile inſtar puncti conſideratum motu ſuo deſcribere concipitur.

DEFINITIO 10.

13. *Velocitas* ſeu *Celeritas* eſt ea vis motricis affectio, qua mobile aptum redditur dato tempore ſpatium datum percurrendi.

COROLLARIUM.

14. Celeritas adeo dupla eſt, qua eodem tempore ſpatium duplum deſcribitur; tripla, qua triplum; quadrupla, qua quadruplum deſcribitur & ita porro in infinitum in quacunque multiplicium vel ſubmultiplicium ſpecie.

SCHOLION. 1.

15. *Nimirum celeritas tanto major cenſetur ab omnibus, quanto majus ſpatium eodem tempore percurrit mobile. Ponamus mobile A intervallo unius minuti ſecundi percurrere intervallum duorum pedum. Sit aliud mobile B, quod intervallo unius ſecundi percurrat ſpatium trium pedum. Ultro fatebuntur omnes celeritatem ipſius mobilis B majorem eſſe celeritate alterius A.*

SCHOLION 2.

16. *Mobile in momento quovis temporis celeritatem habet, cumque omnes corporis partes eadem celeritate progrediantur, quod ſatis patet attendenti, celeritas quaſi per totam mobilis maſſam diffuſa concipitur, ita ut eadem in ſingulis partibus exiſtat. Proprie loquendo eſt gradus vis motricis.*

DEFINITIO 11.

17. *Linea directionis* eſt, juxta quam corpus progredi nititur.

DEFINITIO 12.

18. Velocitas ſumta cum directione dicitur *Conatus*.

SCHOLION

19. *Unde conatus cenſetur major, quo major eſt celeritas.*

DEFINITIO 13.

20. *Vis reſiſtendi* dicitur, quæ in contrarium ſeu juxta oppoſitam directionem vis cujuscunque alterius agit.

SCHOLION.

21. *Opponuntur directiones, quæ in contrarias plagas tendunt.*

DEFINITIO 14.

22. *Quantitas motus*, momentanea ſcilicet, eſt factum ex celeritate in maſſam. *Leibnitius* appellat *Quantitatem motionis*.

SCHO-

(a) Act. Erudit. A. 1695. p. 154.

SCHOLION.

23. *Pendet nimirum quantitas motus & à quantitate maſſæ, & a quantitate celeritatis, ita ut in eodem corpore motus exiſtimetur major, ſi major eſt celeritas, qua movetur, & in duobus corporibus, quorum eadem eſt celeritas, ejus motus major ſit, cujus maſſæ quantitas major eſt.*

DEFINITIO 15.

24. *Motus æquabilis* eſt, ſi mobile continuo eadem celeritate fertur.

AXIOMA 1.

25. *Nihil eſt ſine ratione ſufficiente, cur potius ſit, quam non ſit.*

SCHOLION.

26. *De hoc principio plura diximus in* Ontologia *ſeu* Philoſophia prima *integro capite 2. ſect. 1. part. 1. Et in Mechanica idem jam olim tacite ſuppoſuit* Archimedes *in libris de æquiponderantibus.*

AXIOMA 2.

27. *Si mobile eadem celeritate movetur, æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribit.*

SCHOLION.

28. *Cum enim mobile per celeritatem aptum reddatur ad datum ſpatium dato tempore percurrendum. (§. 13); nulla ſane ratio eſt, cur temporibus æqualibus, quibus eandem celeritatem habet mobile, diverſam celeritatem deſcribere deberet. Deſcribit adeo eandem (§. 25). Axiomatis hujus veritatem apertius ſtabilimus in Philoſophia prima (§. 655 Ontol.), ubi etiam ſcientiarum mathematicarum principia demonſtrativa ratione a priori ex notionibus ſimplicioribus deduximus.*

AXIOMA 3.

29. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, eodem tempore æqualia ſpatia deſcribunt.*

SCHOLION.

30. *Patet idem per axioma primum (§. 25). Conferatur de eadem philoſophia prima §. 660.*

THEOREMA 1.

31. *In motu æquabili ſpatia a mobili percurſa ſunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam motus æquabilis *per hypoth.* mobile continuo eadem celeritate movetur (§. 24). Quare ſi tempore *T* deſcribit ſpatium *ſ*, alio tempore *t* priori æquali deſcribit quoque ſpatium S priori æquale (§. 27), adeoque tempore bis *T* ſpatium bis *ſ*, immo tempore quocunque multiplici ſeu ſubmultiplici *ut* (=T) ſpatium *nſ* (=S). Sunt igitur ſpatia ſ & S ut tempora t & T (§. 194 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 2.

32. *Si duo mobilia eadem celeritate & motu æquabili feruntur, ſpatia deſcripta ſunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t percurrit ſpatium ſ, etiam mobile B, quod

quod eadem celeritate fertur, *per hypoth.* eodem tempore t percurrit ſpatium ſ priori æquale (§. 29). Sed ſi idem mobile percurrit tempore quocunque alio T ſpatium S, erit hoc ad alterum ſut T ad t (§. 31). Quare cum ſpatium ſ ſit idem, quod a mobili A tempore t percurritur *per demonſtrata*; ſpatia ſ & S a mobilibus A & B temporibus t & T deſcripta ſunt ut tempora t & T, quibus deſcribuntur. Q. e. d.

THEOREMA 3.

33. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, ſpatia eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt ut celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore *t* celeritate *c* ſpatium *ſ* deſcribit; eodem tempore *t* celeritate bis *c* deſcribit ſpatium bis *ſ* & celeritate quacunque multiplici vel ſubmultiplici *nc* ſpatium quodcunque multiplex vel ſubmultiplex *nſ* (§. 31). Erunt adeo ſpatia *ſ* & S(=*nſ*) deſcripta ut celeritates *c* & C (=*nc*). Quare ſi mobile B eodem tempore *t* celeritate C deſcribit ſpatium S: erit adhuc ſpatium a mobili A deſcriptum ſ ad ſpatium a mobili B eodem tempore deſcriptum S ut celeritas illius *c* ad celeritatem hujus C. Q. e. d.

THEOREMA 4.

34. *Spatia a duobus mobilibus peracta ſunt in ratione compoſita temporum & celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Deſcribat mobile A celeritate *c* ſpatium *ſ* tempore *t* & B celeritate C ſpatium S tempore T. Ponamus idem mobile B celeritate *c* deſcribere ſpatium *q* tempore T. Quoniam celeritas *c* mobilium A & B eadem, erit $q:ſ = T:t$ (§. 32). Et quia ſpatia S & *q* eodem tempore T deſcribuntur, erit $S:q = C:c$ (§. 33). Ergo $Sq:ſq = TC:tc$ (§. 213 *Arith.*), conſequenter $S:ſ = TC:tc$ (§. 181 *Arithm.*), conſequenter ſpatia ſunt in ratione compoſita temporum & celeritatum (§. 159 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM. 1.

35. Si $S = ſ$; erit $CT = ct$, adeoque $C:c = t:T$ (§. 199 *Arith.*), hoc eſt, ſi duo corpora motu æquabili æqualia ſpatia deſcribunt; celeritates habent temporum rationem reciprocam.

COROLLARIUM. 2.

36. Si ulterius $t = T$; erit etiam $C = c$, adeoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali ſpatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA 5.

37. *Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates C & c ſunt in ratione compoſita ex directa*

SCHOLION.

23. *Pendet nimirum quantitas motus & à quantitate maſſæ, & a quantitate celeritatis, ita ut in eodem corpore motus exiſtimetur major, ſi major eſt celeritas, qua movetur, & in duobus corporibus, quorum eadem eſt celeritas, ejus motus major ſit, cujus maſſa quantitas major eſt.*

DEFINITIO 15.

24. *Motus æquabilis* eſt, ſi mobile continuo eadem celeritate fertur.

AXIOMA 1.

25. *Nihil eſt ſine ratione ſufficiente, cur potius ſit, quam non ſit.*

SCHOLION.

26. *De hoc principio plura diximus in* Ontologia *ſeu* Philoſophia prima *integro capite 2. ſect. 1. part. 1. Et in Mechanica idem jam olim tacite ſuppoſuit* Archimedes *in libris de æquiponderantibus.*

AXIOMA 2.

27. *Si mobile eadem celeritate movetur, æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribit.*

SCHOLION.

28. *Cum enim mobile per celeritatem ipſum reddatur ad datum ſpatium dato tempore percurrendum. (§. 13); nulla ſane ratio eſt, cur temporibus æqualibus, quibus eandem celeritatem habet mobile, diverſam celeritatem deſcribere deberet. Deſcribit adeo eandem (§. 25). Axiomatis hujus veritatem apertius ſtabilimus in Philoſophia prima (§. 655 Ontol.), ubi etiam ſcientiarum mathematicarum principia demonſtrativa ratione a priori ex notionibus ſimplicioribus deduximus.*

AXIOMA 3.

29. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, eodem tempore æqualia ſpatia deſcribunt.*

SCHOLION.

30. *Patet idem per axioma primum* (§. 25). *Conferatur de eadem philoſophia prima* §. 660.

THEOREMA 1.

31. *In motu æquabili ſpatia a mobili percurſa ſunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam motus æquabilis *per hypoth.* mobile continuo eadem celeritate movetur (§. 24). Quare ſi tempore *T* deſcribit ſpatium *ſ*, alio tempore *t* priori æquali deſcribit quoque ſpatium S priori æquale (§. 27), adeoque tempore bis *T* ſpatium bis *ſ*, immo tempore quocunque multiplici ſeu ſubmultiplici *nt* (=T) ſpatium *nſ* (=S). Sunt igitur ſpatia ſ & S ut tempora t & T (§. 194 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA. 2.

32. *Si duo mobilia eadem celeritate & motu æquabili feruntur, ſpatia deſcripta ſunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t percurrit ſpatium ſ, etiam mobile B, quod

quod eadem celeritate fertur, *per hypoth.* eodem tempore t percurrit ſpatium ſ priori æquale (§. 29). Sed ſi idem mobile percurrit tempore quocunque alio T ſpatium S, erit hoc ad alterum ſut T ad t (§. 31). Quare cum ſpatium ſ ſit idem, quod a mobili A tempore t percurritur *per demonſtrata*; ſpatia ſ & S a mobilibus A & B temporibus t & T deſcripta ſunt ut tempora t & T, quibus deſcribuntur. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

33. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, ſpatia eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt ut celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore *t* celeritate *c* ſpatium *ſ* deſcribit; eodem tempore *t* celeritate bis *c* deſcribit ſpatium bis *ſ* & celeritate quacunque multiplici vel ſubmultiplici *nc* ſpatium quodcunque multiplex vel ſubmultiplex *nſ* (§. 31). Erunt adeo ſpatia *ſ* & S (= *nſ*) deſcripta ut celeritates *c* & C (= *nc*). Quare ſi mobile B eodem tempore *t* celeritate C deſcribit ſpatium S: erit adhuc ſpatium a mobili A deſcriptum ſ ad ſpatium a mobili B eodem tempore deſcriptum S ut celeritas illius *c* ad celeritatem hujus C. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

34. *Spatia a duobus mobilibus peracta ſunt in ratione compoſita temporum & celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Deſcribat mobile A celeritate *c* ſpatium *ſ* tempore *t* & B celeritate C ſpatium S tempore T. Ponamus idem mobile B celeritate *c* deſcribere ſpatium *q* tempore *T*. Quoniam celeritas *c* mobilium A & B eadem, erit $q:ſ = T:t$ (§. 32). Et quia ſpatia S & *q* eodem tempore T deſcribuntur, erit $S:q = C:c$ (§. 33). Ergo $Sq:ſq = TC:tc$ (§. 213 *Arith.*), conſequenter $S:ſ = TC:tc$ (§. 181 *Arithm.*), conſequenter ſpatia ſunt in ratione compoſita temporum & celeritatum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

35. Si $S = ſ$; erit $CT = ct$, adeoque $C:c = t:T$ (§. 199 *Arith.*), hoc eſt, ſi duo corpora motu æquabili æqualia ſpatia deſcribunt; celeritates habent temporum rationem reciprocam.

COROLLARIUM. 2.

36. Si ulterius $t = T$; erit etiam $C = c$, adeoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali ſpatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA 5.

37. *Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates C & c ſunt in ratione compoſita ex directe*

directa temporum & reciproca ſpatiorum: 2. Spatia ſunt in ratione compoſita ex directa temporum & reciproca maſſarum: 3. Tempora denique ſunt in ratione compoſita maſſarum & ſpatiorum.

COROLLARIUM 2.

52. Si præterea M=m; erit ſT=St, adeoque S:ſ=T:t (§. 299 *Arithm.*). Nempe ſi duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus ac maſſæ fuerint æquales; ſpatia temporum rationem habent.

COROLLARIUM 3.

53. Si ulterius T=t; erit quoque S=ſ. Duo igitur mobilia, quorum maſſæ ac quantitates motus æquales ſunt, eodem tempore motu æquabili ſpatia æqualia deſcribunt.

COROLLARIUM. 4.

54. Si præter Q=q fuerit S=ſ; erit mT=Mt (§. 50) adeoque M:m=T:t (§.299 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duo mobilia, quorum quantitates motus æquales ſunt, æquabili motu æqualia ſpatia percurrunt; maſſæ eorundem ſunt temporibus proportionales, vel, quod perinde eſt, tempora ſunt maſſis proportionalia.

COROLLARIUM. 5.

55. Si ulterius T=t; erit etiam M=m, adeoque corporum, quorum quantitates motus æquales ſunt & quæ eodem tempore motu æquabili ſpatia æqualia deſcribunt, maſſæ æquales ſunt.

COROLLARIUM. 6.

56. Si præter Q=q fuerit T=t; erit MS=mſ (§. 50), adeoque S:ſ=m:M, hoc eſt, ſpatia a duobus mobilibus, quorum quantitates motus æquales ſunt, eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt in ratione maſſarum reciproca.

THEOREMA 12.

57. *In motu æquabili ſpatia* S *&* ſ *ſunt in ratione compoſita ex rationibus directis quantitatum motus* Q *&* q *atque temporum* T *&* t *& reciproca maſſarum* M *&* m.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Q:q=MSt:mſT (§. 50) erit QmſT=qMSt (§. 297 *Arithm.*) Unde S:ſ=QTm:qtM (§. 299. *Arithm.*) Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

58. Si S=ſ; erit QTm=qtM, adeoque Q:q=tM:Tm, M:m=QT:qt, T:t=qM:Qm (§. 299 *Arithm.*). Quodſi adeo duo mobilia motu æquabili per æqualia ſpatia feruntur; erunt 1. quantitates motus in ratione compoſita ex directa maſſarum & reciproca temporum: 2. maſſæ in ratione compoſita quantitatum motus atque temporum: 3. tempora in ratione compoſita ex directa maſſarum & quantitatum motus reciproca.

COROLLARIUM 2.

59. Si præter S=ſ fuerit M=m; erit QT=qt, adeoque Q:q=t:T (§. 299 *Arithm.*). Nimirum duorum mobilium, quorum maſſæ æquales ſunt, quantitates motus ſunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia ſpatia feruntur.

COROLLARIUM 3.

60. Si præter S=ſ fuerit T=t; erit qM=Qm

eorum quantitates motus fuerint æquales; æquali celeritate feruntur.

COROLLARIUM 3.

44. Similiter ſi $C = c$; erit $M = m$, hoc eſt, ſi duo mobilia eadem celeritate moventur, & fuerint quantitates motus æquales; erunt maſſæ eorundem æquales.

THEOREMA 9.

45. *Duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur, celeritates* C *&* c *ſunt in ratione compoſita ex quantitate motus* Q *&* q *directa & maſſarum* M *&* m *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = CM : cm$ (§. 41)

erit $Qcm = qCM$ (§. 297 *Arithm.*)

$C : c = Qm : qM$ (§. 299 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

46. Si $C = c$; erit $Qm = qM$, adeoque $Q : q = M : m$ (§. 269 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duo mobilia motu æquabili & eadem celeritate feruntur; quantitates motus maſſarum rationem habent.

COROLLARIUM 2.

47. Quodſi ulterius fuerit $M = m$; erit etiam $Q = q$, adeoque ſi duo mobilia æqualem maſſam habentia motu æquabili & eadem velocitate feruntur; quantitates motus æquales ſunt.

THEOREMA 10.

48. *In motu æquabili maſſæ corporum* M *&* m *ſunt in ratione compoſita ex quantitatum motus* Q *&* q *directa & celeritatum* C *&* c *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = CM : cm$ (§. 41)

erit $Qcm = qCM$ (§. 297 *Arithm.*)

$M : m = Qc : qC$ (§. 299 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

49. Si $M = m$; erit $Qc = qC$, adeoque $Q : q = C : c$ (§. 299 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duorum mobilium motu æquabili latorum maſſæ fuerint æquales; quantitates motus ſunt ut velocitates.

THEOREMA 11.

50. *In motu æquabili quantitates motus* Q *&* q *ſunt in ratione compoſita ex rationibus directis maſſarum* M *&* m *atque ſpatiorum* S *&* ſ *& reciproca temporum* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $C : c = St : ſT$ (§. 38) & $Q : q = CM : cm$ (§. 41)

erit $CQ : cq = CMSt : cmſT$ (§. 213 *Arithm.*)

$Q : q = MSt : mſT$ (§. 185 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

51. Si $Q = q$; erit $MSt = mſT$ adeoque $M : m = ſT : St$, $S : ſ = mT : Mt$ & $T : t = MS : mſ$, hoc eſt, ſi duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; 1. maſſæ eorundem ſunt in ratione compoſita ex

directa

directa temporum & reciproca ſpatiorum: 2. Spatia ſunt in ratione compoſita ex directa temporum & reciproca maſſarum: 3. Tempora denique ſunt in ratione compoſita maſſarum & ſpatiorum.

COROLLARIUM 2.

52. Si præterea M=m; erit ſT=St, adeoque S:ſ=T:t (§. 299 *Arithm.*). Nempe ſi duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus ac maſſæ fuerint æquales, ſpatia temporum rationem habent.

COROLLARIUM 3.

53. Si ulterius T=t; erit quoque S=ſ. Duo igitur mobilia, quorum maſſæ ac quantitates motus æquales ſunt, eodem tempore motu æquabili ſpatia æqualia deſcribunt.

COROLLARIUM. 4.

54. Si præter Q=q fuerit S=ſ; erit mT=Mt (§. 50) adeoque M:m=T:t (§. 299 *Arithm.*), hoc eſt, ſi duo mobilia, quorum quantitates motus æquales ſunt, æquabili motu æqualia ſpatia percurrunt; maſſæ eorundem ſunt temporibus proportionales, vel, quod perinde eſt, tempora ſunt maſſis proportionalia.

COROLLARIUM. 5.

55. Si ulterius T=t; erit etiam M=m, adeoque corporum, quorum quantitates motus æquales ſunt & quæ eodem tempore motu æquabili ſpatia æqualia deſcribunt, maſſæ æquales ſunt.

COROLLARIUM. 6.

56. Si præter Q=q fuerit T=t, erit MS=mſ (§. 50), adeoque S:ſ=m:M, hoc eſt, ſpatia a duobus mobilibus, quorum quantitates motus æquales ſunt, eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt in ratione maſſarum reciproca.

THEOREMA 12.

57. *In motu æquabili ſpatia* S & ſ *ſunt in ratione compoſita ex rationibus directis quantitatum motus* Q & q *atque temporum* T & t & *reciproca maſſarum* M & m.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Q:q=MSt:mſT (§. 50) erit QmſT=qMSt (§. 297 *Arithm.*) Unde S:ſ=QTm:qtM (§. 299 *Arithm.*) Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

58. Si S=ſ; erit QTm=qtM, adeoque Q:q=tM:Tm; M:m=QT:qt, T:t=qM:Qm (§. 299 *Arithm.*). Quodſi adeo duo mobilia motu æquabili per æqualia ſpatia feruntur; erunt 1. quantitates motus in ratione compoſita ex directa maſſarum & reciproca temporum: 2. maſſæ in ratione compoſita quantitatum motus atque temporum: 3. tempora in ratione compoſita ex directa maſſarum & quantitatum motus reciproca.

COROLLARIUM. 2.

59. Si præter S=ſ fuerit M=m; erit QT=qt, adeoque Q:q=t:T (§. 299 *Arithm.*). Nimirum duorum mobilium, quorum maſſæ æquales ſunt, quantitates motus ſunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia ſpatia feruntur.

COROLLARIUM 3.

60. Si præter S=ſ fuerit T=t; erit

 qM=Qm

$t:T=c:C$ (§. 192 *Arithm.* & §. *præc.*). Sunt enim t & T ſummæ ipſorum dt & dT, c & C vero ſummæ ipſorum dc & dC (§. 178. 67 *Arithm.*)

DEFINITIO 17.

70. *Motus retardatus* eſt, cujus celeritas decreſcit. *Uniformiter retardatus* dicitur, ſi continua celeritatis decrementa fuerint temporibus proportionalia.

AXIOMA 2.

71. *Corpus ſemel quieſcens nunquam movebitur, niſi aliunde ad motum concitetur: ſemel autem motum eadem velocitate & ſecundum eandem directionem moveri perget, niſi a cauſa aliqua ſtatum ſuum mutare cogatur.*

SCHOLION.

72. *Hæc ſatis manifeſta ſunt ex axiomate omnis philoſophiæ fundamentali, quod nihil ſit ſine ratione ſufficiente* (§. 25): *quemadmodum idem oſtendimus in Coſmologia. Nec experientia eidem repugnat, cum ſemper ratio aſſignari poſſit tam motûs retardati, quam directionis mutatæ, modo omnes circumſtantias ſatis perpendamus.*

COROLLARIUM 1.

73. Corpus itaque, quod nonniſi impulſu ſemel facto movetur, per lineam rectam moveri debet.

COROLLARIUM 2.

74. Quodſi vero per curvam incedit, duplici vi urgeatur neceſſe eſt, altera nempe, qua progrederetur ſecundum lineam rectam, altera vero, qua a motu rectilineo continuo retrahitur.

AXIOMA 3.

75. *Si niſus & reniſus duorum corporum fuerint æquales, motus nullus ſubſequitur, ſed corpora ſe mutuo impellentia juxta ſe invicem quieſcunt.*

AXIOMA 4.

76. *Si corpus motum ſecundum eandem directionem, qua movetur, impellitur, motus acceleratur* (§. 67).

AXIOMA 5.

77. *Corpus motum a vi reſiſtente retardatur* (§. 20. 50).

OBSERVATIO 1.

78. *Gravitas corporum eadem in qualibet a ſuperficie telluris diſtantia, in qua experimentum capere licet: quam in poſterum* Intervallum non nimis magnum *dicemus.*

OBSERVATIO 2.

79. *Gravia deſcendunt motu accelerato.*

THEOREMA 15.

80. *Si corpus ex quiete motu uniformiter accelerato fertur, ſpatia ſunt in ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Deſignet recta AB tempus, quo motus mobilis acceleratur & rectæ ad Tab. I. Fig. 1.

(§. 38), $Q = 28$, $q = 10$ (§. 22). *Hinc utique deprehenditur.*

$C : c = St : sT$ (§. 37)

$4 : 2 = 12.8 : 16.3 = 4 : 2$

$S : s = CT : ct$ (§. 34)

$12 : 16 = 4.3 : 2.8 = 12 : 16$

$T : t = cS : Cs$ (§. 39)

$3 : 8 = 2.12 : 4.16 = 2.3 : 2.4 = 3 : 8$

$C : c = Qm : qM$ (§. 45)

$4 : 2 = 28.5 : 10.7 = 4.1 : 2.1 = 4 : 2$

$M : m = Qc : qC$ (§. 48)

$7 : 5 = 28.2 : 10.4 = 7.1 : 5.1 = 7 : 5$

$S : s = TQm : tqM$ (§. 57)

$12 : 16 = 3.28.5 : 8.10.7 = 3.4.1 : 8.2.1 = 12 : 16$

$M : m = TQs : tqS$ (§. 61)

$7 : 5 = 3.28.16 : 8.10.12 = 3.7.2 : 1.10.3 = 7 : 5$

$Q : q = MSt : msT$ (§. 50)

$28 : 10 = 7.12.8 : 5.16.3 = 7.4.1 : 5.2.1 = 28 : 10$

Eodem modo illuſtrantur ſingula theorematum corollaria;

Sit enim $S = 12$, $T = 6$, $s = 8$, $t = 4$; *erit* $C = 12 : 6 = 2$ & $c = 8 : 4 = 2$, *conſequenter ob* $C = c$ (§. 32)

$S : s = T : t$

$12 : 8 = 6 : 4$

Sit $S = 12$ & $s = 12$. *Quoniam* $S = CT$ & $s = ct$ (§. 34); *ſi* $C = 2$ & $c = 3$, *erit* $T = 6$ & $t = 4$. *Habemus adeo* (§. 35)

$C : c = t : T$

$2 : 3 = 4 : 6$

Si pro S & s ponatur Q & q, pro T & t vero M & m; idem exemplum illuſtrabit primum theorematis 8 corollarium (§. 42). *Iiſdem obſervatis exemplum præcedens in Corollarium primum theorematis quinti quadrat.*

Sit denique $Q = 12$, $q = 8$, $M = 4$, $m = 4$; *erit* $C = 12 : 4 = 3$ & $c = 8 : 4 = 2$, (§. 22) *adeoque* (§. 49)

$Q : q = C : c$

$12 : 8 = 3 : 2$

CAPUT II.
DE MOTU UNIFORMITER ACCELERATO ET RETARDATO.

DEFINITIO 16.

67. *Motus acceleratus eſt*, qui nova capit celeritatis incrementa. *Uniformiter acceleratus eſt*, qui temporibus æqualibus æqualia continuo capit celeritatis incrementa.

COROLLARIUM 1.

68. In motu adeo uniformiter accelerato celeritates ſunt ut tempora, quibus acquiruntur.

COROLLARIUM 2.

69. Quare ſi tempuſcula elementaria fuerint dt & dT, celeritates elementares iis reſpondentes dc & dC; erit

tu uniformiter accelerato progreditur, fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſpatium intra momentum 1 confectum erit ut 1, intra duo percurſum ut 4, intra tria ut 9, intra quatuor ut 16, intra quinque ut 25 &c. (80). Quodſi ergo ſubtrahas ſpatium intra minutum unum percurſum a ſpatio intra duo confecto 4; remanebit ſpatium minuto ſecundo reſpondens 3. Eodem modo reperitur ſpatium minuto tertio abſolutum 9−4=5, ſpatium quarto reſpondens 16−9=7, quod quinto convenit 25−16=9 &c. & ita porro (§.83 *Analyſ.*). Spatium ergo minuti primi eſt ut 1, ſecundi ut 3, tertii ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9 &c. adeoque ſpatia corporis motu uniformiter accelerato progredientis temporibus æqualibus augentur ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. *Q.e.d.*

THEOREMA 17.

85. *Corpora gravia in medio non reſiſtente per intervalla non nimis magna motu uniformiter accelerato deſcendunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum gravia deſcendant motu accelerato (§. 79); vis gravitatis ea continuo impellere debet (§. 76). Eſt vero gravitas in intervallo non minis magno eadem (§. 78). Quare gravia eodem modo temporibus æqualibus deorſum impelli debent (§. 25). Itaque ſi tempuſculo primo impelluntur celeritate *c*, etiam ſecundo celeritate *c* impellentur, immo etiam tertio, quarto, quinto & alio quocunque æquali. Quoniam vero medium non reſiſtit *per hypoth.* celeritatem ſemel acquiſitam conſtanter retinent (§. 71), adeoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, conſequenter motu uniformiter accelerato deſcendunt (§. 67) *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

86. Sunt igitur ſpatia deſcenſus ex quiete in temporum (§. 80), itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 81) & ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. creſcunt (§. 84).

COROLLARIUM 2.

87. Tempora vero, itemque velocitates ſunt in ratione ſpatiorum ſubduplicata (§. 82. 83).

SCHOLION 1.

88. *Dum gravia deſcendere ſupponimus in medio non reſiſtente, ab omni externo impedimento abſtrahimus, quecunque tandem nomine veniat & a quacunque cauſa ortum trahat. Unde motum quoque ſecludimus, quo, ob vertiginem Telluris in Aſtronomia adſtruendum, in tranſverſum rapiuntur gravia ipſo deſcenſus tempore: quamvis in intervallo non*

ad AB applicatæ PM, BC ſint ut celeritates in fine temporis AP, AB acquiſitæ. Quoniam motus uniformiter acceleratur & motus a quiete incipit, *per hypoth.* erit AP : AB = PM : BC (§. 68). Sunt vero PM & BC ad AB perpendiculares *per conſtruct.* adeoque inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*). Eſt igitur ABC triangulum (§. 268 *Geom.*), idque rectangulum (§. 91 *Geom.*). Ponamus *pm* eſſe alteri lineæ PM infinite propinquam: celeritates PM & *pm* non different niſi quantitate infinite parva *m*R in fine tempuſculi P*p*, atque adeo tempuſculo toto P*p* eadem celeritate fertur mobile (§. 4 *Analyſ.*), conſequenter motus iſto tempuſculo æquabilis eſt (§. 24). Enimvero in motu æquabili ſpatium eſt ut tempus ductum in celeritatem (§. 34 *Mech.* & §. 159 *Arithm.*), adeoque ſpatium a mobili tempuſculo P*p* confectum ut rectangulum P*p* RM (§ 375 *Geom.*), conſequenter cum ſingulis tempuſculis, quibus AP conſtat, ipſi P*p* æqualibus iſtiusmodi parallelogrammula reſpondeant, quæ ſimul ſumta aream triangularem APM conficiunt (§. 99 *Analyſ. infin.*), area APM exprimit ſpatium a mobili tempore AP confectum. Ex eadem ratione triangulum ABC exprimit ſpatium a mobili tempore AB confectum. Sunt igitur ſpatia temporibus AP & AB deſcripta ut triangula APM & ABC, conſequenter ob eorundem ſimilitudinem (§. 268 *Geom.*) in ratione duplicata rectarum AP & AB (§. 398 *Geom.*), hoc eſt, temporum. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

81. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates ſunt ut tempora (§. 68); ſpatia erunt etiam in ratione duplicata celeritatum in fine temporum, quibus deſcribuntur, acquiſitarum (§. 80).

COROLLARIUM 2.

82. In motu uniformiter accelerato tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. 159 *Arithm.* & §. 80 *Mech.*)

COROLLARIUM 3.

83. Etiam celeritates in fine temporum ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum illis deſcriptorum (§. 159 *Arithm.* & §. 81 *Mech.*)

THEOREMA 16.

84. *Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, creſcunt temporibus æqualibus ſecundum numeros impares* 1, 3, 5, 7, 9 &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu

tu

THEOREMA 11.

92. *Si grave in medio non reſiſtente per intervallum non nimis magnum deſcendit, ſpatium ab eo decurſum eſt ſubduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur, quam in fine temporis grave acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 1. Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum deſcenſus repræſentet, in partes quotcunque æquales diviſa, & ad abſciſſas AP, AQ, AS, AB applicentur rectæ PM, QI, SH, BC, quæ ſint ut celeritates cadendo in iſtis temporibus acquiſitæ. Quoniam itaque AP : AQ = PM : QI, AP : AS = PM : SH &c. (§. 85): & rectæ PM, QI, SH, BC inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Et ſpatium tempore AB percurſum eſt ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonſtratione theorematis 15 (§. 80) conſtat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter deſcriptum cum ſit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique iſtud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 *Geom.*) Q. e. d.

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipſius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquiſita conficitur, æquale eſt ſpatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro deſcendit.

PROBLEMA 1.

94. *Dato tempore, quo grave ex altitudine data deſcendit, ſpatia definire, quæ ſingulis iſtius temporis partibus confecit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo data $= a$, tempus $= t$, ſpatium parte temporis 1 confectum $= x$; erit (§. 86).

$$1 : t^2 = x : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Eſt adeo ſpatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, adeoque decurſum parte ſecunda $= 3a : t^2$, tertia deſcriptum $= 5a : t^2$ &c. (§. 86)

E. gr. ſupra in experimentis *Riccioli* (§. 90) intra 4 ſecunda globus cretaceus deſcendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo ſecundo confectum $= 240 : 16 = 15$, ſpatium confectum ſecundo $= 15 \cdot 3 = 45$, confectum tertio $= 15 \cdot 5 = 75$, confectum denique quarto $15 \cdot 7 = 105$. Eſt autem $15 + 45 + 75 + 105 = 240$.

PROBLEMA 2.

95. *Dato tempore, quo grave in medio non reſiſtente per ſpatium datum deſcendit, determinare tempus, quo aliud ſpatium datum in eodem medio conficiet.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86), quæratur ad ſpatium, per quod grave dato tempore deſcendit, ſpatium quod in quæſtione eſt, & quadratum temporis dati, numerus quartus proportionalis, (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum temporis quæſiti.

2. Quare ſi inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*); prodibit ipſum tempus quæſitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis *Riccioli* (§. 90) intervallo 4 minutorum deſcendit per ſpatium 240 pedum; quæritur, quo tempore confecturus ſit ſpatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $=\sqrt{(135.16:240)}=\sqrt{(135:15)}=\sqrt{9}=3$.

PROBLEMA 3.

96. *Dato ſpatio, quod grave in medio non reſiſtente dato aliquo temporis intervallo confecit, determinare ſpatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86); quæratur ad quadratum temporis, quo grave per datum ſpatium deſcendit, ad quadratum temporis, quo aliud quæſitum emetiri debet, atque ad ſpatium datum numerus quartus proportionalis (§. 272 *Arithm.*): qui erit ſpatium quæſitum.

E. gr. Per experimenta *Riccioli* globus cretaceus intervallo duorum ſecundorum confecit ſpatium 60 pedum: quæritur quantum ſpatium confecturus ſit intervallo 4 ſecundorum? Reperietur ſpatium quæſitum 16. 60 : 4 = 4. 60 = 240.

THEOREMA 19.

97. *Si corpus fertur motu uniformiter retardato, ſpatium dimidium ejus percurrit, quod motu uniformi eodem tempore conficeret.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tempus datum repræſentans recta AB in partes quotcunque æquales diviſa & ad eam applicentur rectæ BC, SH, QI, PM, quæ ſint ut velocitates temporis partibus *o*, PS, BQ, BP, BA reſpondentes, ita ut demiſſis perpendicularibus HF, IF, MG rectæ CE, CF, CG, CB ſint ut celeritates temporibus HE, FI, GM, AB, hoc eſt, BS, BQ, BF, BA amiſſæ. Quoniam CE : CF = EH : FI, CG : CB = GM : BA (§. 70); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Quodſi B*b* ſit tempuſculum infinite parvum, motus erit uniformis, adeoque ſpatiolum a mobili deſcriptum ut Tab. I. Fig. 1.

THEOREMA 18.

92. *Si grave in medio non reſiſtente per intervallum non nimis magnum deſcendit, ſpatium ab eo decurſum eſt ſubduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur, quam in fine temporis grave acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 1. Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum deſcenſus repræſentet, in partes quotcunque æquales diviſa, & ad abſciſſas AP, AQ, AS, AB applicentur rectæ PM, QI, SH, BC, quæ ſint ut celeritates cadendo in iſtis temporibus acquiſitæ. Quoniam itaque AP : AQ = PM : QI, AP : AS = PM : SH &c. (§. 85): & rectæ PM, QI, SH, BC inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Et ſpatium tempore AB percurſum eſt ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonſtratione theorematis 15 (§. 80) conſtat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter deſcriptum cum ſit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique iſtud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 *Geom.*) Q. e. d.

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipſius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquiſita conficitur, æquale eſt ſpatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro deſcendit.

PROBLEMA 1.

94. *Dato tempore, quo grave ex altitudine data deſcendit, ſpatia definire, quæ ſingulis iſtius temporis partibus confecit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo data $= a$, tempus $= t$, ſpatium parte temporis 1 confectum $= x$; erit (§. 86).

$$1 : t^2 = x : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Eſt adeo ſpatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, adeoque decurſum parte ſecunda $= 3a : t^2$, tertia deſcriptum $= 5a : t^2$ &c. (§. 86)

E. gr. ſupra in experimentis *Riccioli* (§. 90) intra 4 ſecunda globus cretaceus deſcendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo ſecundo confectum $= 240 : 16 = 15$, ſpatium confectum ſecundo $= 15 . 3 = 45$, confectum tertio $= 15 . 5 = 75$, confectum denique quarto $15 . 7 = 105$. Eſt autem $15 + 45 + 75 + 105 = 240$.

PROBLEMA 2.

95. *Dato tempore, quo grave in medio non reſiſtente per ſpatium datum deſcendit, determinare tempus, quo aliud ſpatium datum in eodem medio conficiet.*

RE-

AMS locus celeritatum. Ducatur pm ipſi PM infinite propinqua. Fiat AP$=t$, PM$=c$, erit P$p=dt$ & elementum PM$mp=cdt$ (§. 98 *Analyſ. infin.*). Enimvero quoniam tempuſculo dt motus eſt æquabilis; erit ſpatiolum a mobili deſcriptum $=cdt$ (§. 34), conſequenter $\int cdt$ ſive area AMP deſignabit ſpatium tempore AP deſcriptum. Quare ſi detur celeritas c per tempus t, non alia re opus eſt, quam ut valore hoc in elemento cdt ſubſtituto formula ſummetur.

E. gr. Sit c ut t^n: erit $cdt=t^n dt$, adeoque $\int cdt=\frac{1}{n+1}t^{n+1}$. Sunt igitur ſpatia APM & AES temporibus AP & AE decurſa ut $\frac{1}{n+1}t^{n+1}$ ad $\frac{1}{n+1}T^{n+1}$, conſequenter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 187 *Arithm.*), adeoque ob $t^n=c$ ut ct ad CT. Habemus itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu continuo accelerato acquiſita fuerit in ratione quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata temporis; ſpatia ſunt in ratione compoſita celeritatum atque temporum.

PROBLEMA 5.

Tab. I. Fig. 9. 102. *Data celeritate mobilis motu continuo, ſed quomodocunque accelerato lati per ſpatium, invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas $=c$, tempus $=t$, ſpatium r, elementum ſpatii dr tempuſculo dt percurſum eſt cdt (§. 101). Habemus itaque

$$\frac{cdt=dr}{dt=\frac{dr}{c}}$$

$$t=\frac{\int dr}{c}$$

Quare ſi celeritas detur per r, non alia re opus eſt, quam ut valore hoc in elemento $dr:c$ ſubſtituto formula ſummetur.

E. gr. Sit in hypotheſi *Baliani* c ut r; erit $dr:r=dt$, adeoque $t=\frac{\int dr}{r}=lr$ (§. 243 *Analyſ. infin.*). Unde patet *Theorema.* Si in motu accelerato celeritates ſunt ut ſpatia, tempora ſunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\frac{\int dr}{r}$ eſt ſpatium hyperbolicum per latus potentiæ hyperbolæ 1 diviſum; ideo (§. 120 *Analyſ. infin.*)

Theorema. In hypotheſi *Baliani*, in qua celeritates ſunt ut ſpatia, tempus exhibetur per ſpatia hyperbolica, adeoque ejus determinatio a quadratura hyperbolæ pendet.

Similiter ſi celeritas fuerit in ratione multiplicata vel ſubmultiplicata quacunque ſpatii, hoc eſt, c ut r^n; erit $dt=dr:r^n=r^{-n}dr$, conſequenter $t=$ $\frac{1}{-n+1}$

$$\frac{1}{-n+1}\, r^{-n+1} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n}$$ adeoque

$$T : t = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{R}{R^n} : \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n}$$

$$= \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$$

$$= Rc : rC$$

Theorema. Si celeritates acquiſitæ fuerint in ratione quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata ſpatiorum, erunt tempora in ratione compoſita ex directa ſpatiorum & reciproca celeritatum per ſpatia iſta acquiſitarum.

SCHOLION.

103. Varignonius, *Geometra eximius*, (e) *doctrinam de motu accelerato & retardato analyſi generali abſolvens varia dedit exempla, quæ ad exercendam analyſin faciunt, etſi in Mechanica, ubi in hypotheſibus naturæ exemplo* Galilæi *acquieſcere poteramus, nullum habeant uſum. Quamobrem ut tyrones ad ſolutiones problematum Phyſico-mathematicorum præparemus, utque intelligant principia in his elementis ſtabilita ad talia ſufficere; unum alterumque exemplum evoluta analyſi cum primis principiis Matheſeos connexum exhibere lubet.*

PROBLEMA 6.

Tab. XIII. Fig. 122. 104. *Si tempora ſint ut abſciſſæ* AP *& celeritates iſtis acquiſitæ ut ſemiordinatæ* PM *curvæ* ANS *ejus naturæ, ut ſemiordinata* PN *ſit ad ſemiordinatam hyperbolæ æquilateræ* PM *in ratione quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata dimidii-axis* AC *ad abſciſſam* CP *a centro* C *computatam: invenire ſpatia dato tempore deſcripta.*

RESOLUTIO.

Ex ſuperioribus (§. 101) liquet ſpatia quæſita eſſe ut aream APN, adeoque pendere a quadratura curvæ datæ ANS. Quoniam itaque AMR eſt hyperbola æquilatera, cujus axis transverſus AB, centrum C; ſi fiat AC = a, AP = t; erit BP = $2a + t$, adeoque ob AP. PB = PM^2 (§. 507 *Analyſ.*) PM^2 = $2at + t^2$, conſequenter PM = $\sqrt{(2at + t^2)}$. Quare cum porro ſit *per hypoth.*

$$CP^n : AC^n = PM : PN$$

$$(a+t)^n : a^n = \sqrt{(2at+t^2)} :$$

erit PN = $a^n \sqrt{(2at+t^2)} : (a+t)^n = c$. Eſt nempe c celeritas tempore AP acquiſita, quam PN repræſentat *per hypoth.* Quare ſi in elemento ſpatii PNnp = cdt (§. 101) ſubſtituatur valor ipſius c; prodibit elementum ſpeciale $a^n dt \sqrt{(2at+t^2)} : (a+t)^n$. Totum adeo negotium huc redit, ut hoc elementum ſummabile reddatur, quantum datur. Fiat itaque

$a+t$

(e) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1707. p. 290. & ſeqq.

AMS locus celeritatum. Ducatur *pm* ipſi PM infinite propinqua. Fiat AP=t, PM=c, erit Pp=dt & elementum PMmp=cdt (§. 98 *Analyſ. infin.*). Enimvero quoniam tempuſculo dt motus eſt æquabilis; erit ſpatiolum a mobili deſcriptum =cdt (§. 34), conſequenter $\int cdt$ ſive area AMP deſignabit ſpatium tempore AP deſcriptum. Quare ſi detur celeritas c per tempus t, non alia re opus eſt, quam ut valore hoc in elemento cdt ſubſtituto formula ſummetur.

E. gr. Sit c ut t^n: erit $cdt = t^n dt$, adeoque $\int cdt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$. Sunt igitur ſpatia APM & AES temporibus AP & AE decurſa ut $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ ad $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, conſequenter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 187 *Arithm.*), adeoque ob $t^n = c$ ut ct ad CT. Habemus itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu continuo accelerato acquiſita fuerit in ratione quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata temporis; ſpatia ſunt in ratione compoſita celeritatum atque temporum.

PROBLEMA 5.

Tab. I. Fig. 9. 102. *Data celeritate mobilis motu continuo, ſed quomodocunque accelerato lati per ſpatium, invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas=c, tempus=t, ſpatium r, elementum ſpatii dr tempuſculo dt percurſum eſt cdt (§. 101). Habemus itaque

$$cdt = dr$$

$$dt = \frac{dr}{c}$$

$$t = \int \frac{dr}{c}$$

Quare ſi celeritas detur per r, non alia re opus eſt, quam ut valore hoc in elemento $dr:c$ ſubſtituto formula ſummetur.

E. gr. Sit in hypotheſi *Baliani* c ut r; erit $dr : r = dt$, adeoque $t = \frac{\int dr}{r} = lr$ (§. 243 *Analyſ. infin.*). Unde patet

Theorema. Si in motu accelerato celeritates ſunt ut ſpatia, tempora ſunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\frac{\int dr}{r}$ eſt ſpatium hyperbolicum per latus potentiæ hyperbolæ 1 diviſum; ideo (§. 120 *Analyſ. infin.*)

Theorema. In hypotheſi *Baliani*, in qua celeritates ſunt ut ſpatia, tempus exhibetur per ſpatia hyperbolica, adeoque ejus determinatio a quadratura hyperbolæ pendet.

Similiter ſi celeritas fuerit in ratione multiplicata vel ſubmultiplicata quacunque ſpatii, hoc eſt, c ut r^n; erit $dt = dr : r^n = r^{-n} dr$, conſequenter $t = \frac{1}{-n+1}$

$$\frac{1}{3}z\sqrt{az} = \frac{a(t^2+2at)\sqrt{(t^2+2at)}}{3(a+t)^3}$$
$$= ANP$$

SCHOLION.

105. *Apparet adeo, exemplum hoc non alium habere uſum, quam ad exercendum calculum ſummatorium. Et idem quoque de ſequentibus patebit.*

PROBLEMA 7.

106. *Si celeritas tempore t acquiſita fuerit ut $t^{n-1} : (t^{2n}+a^{2n})$, determinare ſpatium r.*

RESOLUTIO.

Quoniam $dr = cdt$ (§. 101), erit $dr = t^{n-1}\,dt : (t^{2n}+a^{2n})$. Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

erit
$$t = a^{(n-1):n}x^{1:n}$$

$$dt = \frac{1}{n}a^{(n-1):n}x^{1:n-1}dx$$

Porro ob $t^{n-1} = t^n : t$

$$t^{n-1} = a^{n-1}x : a^{(n-1):n}x^{1:n}$$
$$= a^{(nn-2n+1):n}x^{(n-1):n}$$

$$t^{n-1}dt = \frac{1}{n}a^{n-1}dx$$

$$\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}+a^{2n}} = \frac{\frac{1}{n}a^{n-1}dx}{a^{2n-2}x^2+a^{2n}}$$
$$= \frac{1}{n}a^{1-n}\cdot\frac{dx}{x^2+a^2}$$

Quare ſpatium $r = \frac{1}{n}a^{1-n}\cdot\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

Si tangens arcus circuli fuerit x, radius a, erit $\int\frac{a^2dx}{x^2+a^2}$ arcus (§. 185 *Anal. in fin.*), ut adeo quadratura curvæ, quæ ſpatium r exhibet, pendeat a rectificatione arcus circuli.

Varignonius formulam, quæ exprimit arcum in relatione ad tangentem reducit ad aliam, quæ eundem arcum exhibet in relatione ad ſinum verſum: id quod fit hoc modo. Sit

$$x = a\sqrt{(2a:y-1)}$$
$$= a(2ay^{-1}-1)^{1:2}$$

erit $dx = -a^2y^{-2}dy : \sqrt{(2ay^{-1}-1)}$

Elementum hoc in præſente caſu ſumendum eſt poſitivum, quia creſcente x decreſcit y, conſequenter ipſius y differentiale $-dy$.

Porro $x^2 = 2a^3 : y - a^2$

$$x^2+a^2 = 2a^3 : y$$

Quamobrem

$$\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a^2ydy}{2a^3y^2\sqrt{(2ay^{-1}-1)}}$$
$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$$

$$\frac{1}{n}\frac{a^{1-n}dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2na^{n+1}}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$$

PRO-

PROBLEMA 8.

107. *Data celeritate* c *tempore* t *acquiſita, quæ ſit ut* $t^{n-1}:(t^{2n}-a^{2n})$, *invenire ſpatium* r.

RESOLUTIO.

Quia $dr=cdt$ (§.101)

erit $dr=t^{n-1}dt:(t^{2n}-a^{2n})$

Ponatur ut ante (§.104)

$$t^{2n}=a^{2n-2}x^2$$

reperietur $\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}-a^{2n}}=\frac{dx}{x^2-a^2}$ prorſus ut ante. Ponatur porro

$$x=\sqrt{(2ay^{-1}+1)}$$

reperietur $\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{ady}{2a\sqrt{(2ay+y^2)}}$ ut ante, adeoque tandem

$$dr=\frac{1}{2na^{n+1}}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$$

Ponatur denique

$$v-a=y$$

erit $v^2-2av+a^2=y^2$

$$2av-2a^2=2ay$$

$$v^2-a^2=y^2+2ay$$

$$\sqrt{(v^2-a^2)}=\sqrt{(y^2+2ay)}$$

$$dv=dy$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(v^2-a^2)}}=dy\sqrt{(y^2+2ay)}$$

Tab. XIII Fig. 103. Quoniam $a^2dv:2\sqrt{(v^2-a^2)}$ eſt ſector hyperbolicus CAM, abſciſſis a centro computatis (§.179 (*Wolffii Math. Tom.2.*) *Analyſ. infin.*); erit dimidius axis hyperbolæ æquilateræ $=a$ & $CP=v$, conſequenter $a^2dy\sqrt{(y^2+2ay)}$ exprimit eundem ſectorem CAM, abſciſſa AP exiſtente y. Patet itaque determinationem ſpatii in caſu præſente pendere a quadratura hyperbolæ.

SCHOLION 1.

108. *Apparet ex his problematis, quam utile ſit formulas omnes elementorum arcuum, ſegmentorum & ſectorum pro ſectionibus conicis aliisque curvis deſcriptu facilioribus atque cognitarum proprietatum reperire, ſibique familiares reddere, ut formulæ non ſummabiles ad eas tanquam ſimpliciores reduci poſſint, quemadmodum & paulo ante vidimus* (§.106) *poſſe conſtructiones curvarum ad alias deſcriptu faciliores reduci, per quas conſtruantur: cujus rei exempla quoque dedimus in Algebra* (§. 245 & *ſeqq. Analyſ. infinit.*)

SCHOLION 2.

109. *Poteſt etiam ſectoris* CAM *elementum independenter a formula* $a^2dv:\sqrt{(v^2-a^2)}$ *inveniri hoc modo. Sit* AC=CB =a, AP=y, *erit* PB=2a+y, *conſequenter ob* $PM^2=AP\cdot PB$ (§.507 Analyſ. finit.) $=2ay+y^2$, $PM=\sqrt{(2a+y^2)}$, *quæ in* $\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}(a+y)$ *ducta prodit area trianguli* $CMP=\frac{1}{2}(a+y)\sqrt{(2ay+y^2)}$. *Ergo* $CmM+mMPp=\frac{1}{2}dy\sqrt{(2ay+y^2)}+\frac{ady+ydy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}\cdot\frac{a+y}{2}=\frac{2aydy+y^2dy+\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$

Jam mMPp $= dy\sqrt{(2ay+y^2)} = \frac{2aydy + y^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$. *Ergo* CmM *elementum ſectoris* CMA $= \frac{\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}} = \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay+y^2)}}$

DEFINITIO. 18.

110. In motu continuo accelerato celeritatis incrementum tempuſculo quocunque infinite parvo ſucceſſive naſcitur. Quamobrem quantitas motus eodem genita reſolvitur in innumeras alias æqualibus illius tempuſculi particulis natas. Particulas iſtiusmodi elementaris quantitatis motus tempuſculo infinite parvo genitæ dicitur *Sollicitatio ad motum.*

COROLLARIUM.

111. Quod ſi ergo iſtæ particulæ ponantur æquales, quatenus ſpectantur ut effectus ab eadem cauſa tempuſculis æqualibus producti; ſi ſollicitatio ad motum dicatur *g*, erit niſus elementaris ſeu quantitas motus tempuſculo *dt* genita $= gdt$.

PROBLEMA 9.

112. *Data accelerationis lege, determinare ſollicitationem ad motum.*

RESOLUTIO.

Si ſollicitatio ſit *g*, erit quantitas motus tempuſculo *dt* genita $= gdt$ (§. 111). Sit incrementum celeritatis tempuſculo iſto $= dc$, maſſa mobilis $= m$. Quoniam tempuſculo infinite parvo *dt* motus æquabilis ſupponitur; erit quantitas motus eodem genita $= mdc$ (§. 22). Habemus itaque $mdc = gdt$; adeoque $g = mdc : dt$.

Quare ſi ex data accelerationis lege determinetur *dt* per *c* vel contra, prodibit valor ipſius *g*.

E. gr. In hypotheſi *Galilæana* gravium ſeu motu æquabiliter accelerato celeritas *c* eſt ut tempus *t*, adeoque *dt* ut *dc*. Quare *g* ut $mdc : dc$, hoc eſt, ut *m*. Quare patet

Theorema: In hypotheſi *Galilæana* gravium ſeu motu æquabiliter accelerato ſollicitatio ad motum eſt ut maſſa, adeoque conſtans.

Si fuerit c ut t^n

erit $dc = nt^{n-1}dt$

$$g = \frac{mdc}{dt} = \frac{mnt^{n-1}dt}{dt}$$

$$= nmt^{n-1}$$

$$= nmt^n : t$$

$$= nmc : t$$

Theorema. Si celeritas creſcit in ratione temporis multiplicata, erit ſollicitatio ad motum ut factum ex maſſa in celeritatem ductum ulterius in exponentem dignitatis temporis directe & ut tempus reciproce, hoc eſt, ſi duo fuerint mobilia, ſollicitationes ad motum erunt in ratione compoſita ex directa maſſarum & celeritatum in exponentes digni-

(...) tatis

ratis temporum ductarum & reciproca temporum, nempe ut $\frac{NMC}{T}$ ad $\frac{nmc}{t}$ ſeu ut $NMCt$ ad $nmcT$.

PROBLEMA 10.

113. *Data ſollicitatione ad motum, invenire mobilis motu continuo accelerato lati tum velocitatem in locis ſingulis, tum tempus, quo mobile ad locum datum pervenit.*

RESOLUTIO.

Tab. XIII. Fig. 112. Sit recta, per quam mobile fertur, AB & normaliter ad eam applicatæ AC, AN &c. ſint ut ſollicitationes ad motum in A, P &c. PM ſit ut celeritas a mobili in P acquiſita. Ducatur pn ipſi PN infinite propinqua & dicatur AC $=g$, AP$=r$, PM$=c$, maſſa mobilis $=m$; erit P$p=dr$. Sit porro tempuſculum, quo mobile per Pp deſcendit, $=dt$: quia motus in ſpatiolo Pp æquabilis ſupponitur, erit $c=dr:dt$ (§. 37) & $g=mdc:dt$ (§. 112).

$$cdt=dr \qquad gdt=mdc$$

$$dt=dr:c \qquad dt=mdc:g$$

$$\frac{dr}{c}=\frac{mdc}{g}$$

$$gdr=mcdc$$

$$\int gdr=\tfrac{1}{2}mc^2$$

Eſt vero $\int gdr$ area APNC & $\tfrac{1}{2}c^2=\tfrac{1}{2}$PM^2. Quare ſi mobile fuerit idem, erit APNC ut PM^2 (§. 181 *Arithm.*).

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque ſollicitatione urgetur, velocitas ejus in fine ſpatii dati AP acquiſita eſt ut recta, quæ poteſt aream ſollicitationum APNC, ſeu eſt in ratione ſubduplicata hujus areæ.

Porro tempus t reperitur hoc modo:

$$c=dr:dt \qquad \int gdr=\tfrac{1}{2}mc^2$$

$$\frac{2\int gdr}{m}=c^2$$

$$\frac{\sqrt{2\int gdr}}{\sqrt{m}}=c$$

$$dr:dt=\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}$$

$$dr=dt.\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}}=dt$$

$$\int dr.\frac{1}{\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}}=t$$

Quodſi ergo fiat PL$=\frac{1}{\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}}$ ſeu mobili exiſtente eodem, $=1:\sqrt{2\int gdr}$, area DAPLE deſignabit tempus.

Ponamus jam AQ$=$R, QS$=$G; erit C$=\sqrt{\int 2GdR}$, mobili exiſtente eodem, ut maſſa poni poſſit 1, aut

ejus nulla habenda ſit ratio. Erit adeo

$$C : c = \sqrt{2\int GdR} : \sqrt{2\int gdr}.$$

Sed $PL : QO = \frac{1}{\sqrt{2\int GdR}} : \frac{1}{\sqrt{2\int gdr}}$

$$= \sqrt{2\int gdr} : \sqrt{2\int GdR}$$

Ergo $PL : QO = c : C$

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque ſollicitatione movetur motu continuo accelerato, erunt tempora QO & PL, quibus ſpatia data AQ & AP conficit, celeritatibus in fine illorum ſpatiorum acquiſitis reciproce proportionalia, nempe ut PM ad QT.

SCHOLION 1.

114. *Conſentit analyſis cum iis, quæ* Newtonus (f) *demonſtravit, niſi quod is vim centripetam vocet, quod nos* ſollicitationem *appellamus. Communiter enim Mathematici celeritatem ſumunt tanquam effectum vis motricis eidem proportionalem, atque adeo quantitatem motus tanquam menſuram vis illius. Quare cum* Newtonus *vim illam conſideret ut urgentem mobile verſus aliquod punctum fixum, eam centripetam appellat. Alii in caſu deſcenſus gravium gravitatem vocant, quia gravitas conſideratur ut cauſa acceleratrix motus gravium & celeritate momentis ſingulis deſcendenti ſuperaccedens tanquam effectus illius cauſa.*

SCHOLION 2.

115. *Ex theorematis per problema præſens erutis omnia deducere licet, quæ de motu gravium in hypotheſi* Galilæana *ſive in alia quacunque demonſtrantur. Etenim in hypotheſi* Galilæana *eſt* c *ut* t, *adeoque* dc *ut* dt. *Jam* $gdr = cdc$ (§. 113). *Ergo* $gdr = cdt$, *conſequenter* $gdr : dt = c$, *adeoque ob* $dr : dt = c$ *erit* $gc = c$. *Cum adeo ſit* $g = 1$, *gravitas in hypotheſi* Galilæana *conſtans eſt, hoc eſt, elementa ſingula, ex quibus quantitas motus tempuſculo infinite parvo conſtat, ſunt inter ſe æqualia.* Jam *quia* $g = 1$, *erit in eadem hypotheſi* $\int dr = \frac{1}{2} c^2$, *hoc eſt,* r *ut* c^2, (§. 181. *Arithm.*) *quemadmodum ſupra* (§. 86). *Similiter cum in hypotheſi* Baliani *ſit* c *ut* r; *erit* $gdr = \sqrt{dr}$ (§. 113), *adeoque* $g = r$. *Jam initio deſcenſus* $r = 0$: *ergo* $g = 0$, *hoc eſt, ſollicitatio ad motum initio nulla eſt, ſeu phraſi communi Mathematicorum gravitas nulla eſt: quod cum ſit abſurdum, hypotheſis* Baliana *impoſſibilis.*

COROLLARIUM 1.

116. Quoniam $\sqrt{2\int gdr} = APNC$ continuo creſcit, ſemiordinata $PL = 1 : \sqrt{2\int gdr}$ continuo decreſcit. Jam cum ſit in A $dr = 0$; erit $AD = 1 : 0 = \infty$. Eſt igitur AD aſymptotus curvæ temporis ELF.

SCHOLION 3.

117. *Hinc patet ratio, cur curva temporis* ELF *ita fuerit delineata, ut cum axe* AB *non concurrat, ſicuti curva celeritatum* AMH, *neque rectam* AD *ad axem* AB *normalem ſecet, ſicuti curva ſollicitationum* ENG.

CO-

(f) In Princip. Phil. natural. mathemat. lib. 1, prop. 39, p. 120, edit. ult. Angliæ.

COROLLARIUM 2.

118. Cum ſit $gdr = cdc$ (§. 113), adeoque $g = cdc : dr =$ PM. MR: Pp. Sollicitatio ad motum in quacunque accelerationis hypotheſi erit ut ſubnormalis curvæ celeritatum (§ 35 *Analyſ. infin.*)

PROBLEMA 11.

Tab. XIII. Fig. 123. 119. *Si ſollicitatio centralis ſit diſtantiæ a centro AD, PD &c. proportionalis, invenire velocitatem in quovis puncto P & tempus deſcenſus per AP.*

RESOLUTIO.

Quoniam AD: PD = AC: PN *per hypoth.* ſcala ſollicitationum centralium DC eſt linea recta & figura ADC triangulum (§. 268 *Geom.*). Sit AD $= a$, AP ſpatium deſcenſus $= r$, PN ſollicitatio in P $= g$, erit PD $= a - r$. Eſt vero PN ut PD *per hypoth.*, adeoque g ut $a - r$. Quare cum ſit (§. 113),

$$\int g dr = \tfrac{1}{2} c^2$$

erit

$$\int a dr - \int r dr = \tfrac{1}{2} c^2$$

$$ar - \tfrac{1}{2} r^2 = \tfrac{1}{2} c^2$$

$$2ar - r^2 = c^2$$

$$\sqrt{(2ar - r^2)} = c$$

Jam cum AD $= a$, AP $= r$: ſi ex centro D radio AD deſcribatur Quadrans AIH, erit ſemiordinata PI $= \sqrt{(2ar - r^2)}$ (§. 377 *Anal. finit.*) Habemus itaque ſequens

Theorema. Si ſollicitatio centralis ſit proportionalis diſtantiæ locorum a centro, velocitates in fine ſpatii acquiſitæ ſunt ſinibus arcuum reſpondentium proportionales, circuli quadrante ex centro per locum initialem deſcripto.

Porro $dr = cdt$ (§. 101).

Sed $c = \sqrt{(2ar - r^2)}$ *per demonſtrata*

Ergo $dr = dt \sqrt{(2ar - r^2)}$

$$dt = dr : \sqrt{(2ar - r^2)}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$$

Quoniam $a \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$ eſt arcus AI (§. 157 *Anal. infin.*); erit tempus deſcenſus per AP ut arcus circuli AI. Habemus itaque ſequens

Theorema. In hypotheſi problematis tempora deſcenſus per ſpatia AP ſunt ut arcus circuli AI ex centro D deſcripti.

Quodſi ſpecies curvæ celeritatum AMG deſideretur, fiat AC $= b$.

Cum ſit AD:AC = DP. PN *per hyp.*

$$a : b = a - r :$$

erit PN $= g = (ab - br) : a = b - br : a$

Sed $\tfrac{1}{2} c^2 = \int g dr$ (§. 113)

Ergo $\tfrac{1}{2} c^2 = \int b dr - \int br dr : a$

$$= br - br^2 : 2a$$

$$c^2 = 2br - 2br^2 : 2a$$

Patet itaque (§. 421 *Anal. finit.*) ſequens

Theorema. In hypotheſi problematis locum celeritatum AMG eſſe ellipſin, cujus parameter 2AC eſt dupla ſollicitatio initialis, axis major 2AD dupla diſtantia mobilis initio deſcenſus a centro.

Si $a=r$, erit $GD^2 = 2ab - 2a^2b : 2a = 2ab - ab = ab$, adeoque $GD = \sqrt{ab}$. Cum itaque GD ſit axis dimidius conjugatus (§. 413 *Analyſ. finit.*); erit in D centrum ellipſeos & AMG ejus quadrans.

COROLLARIUM.

120. Cum arcus AI & AH exponant tempora, quibus corpus quodvis per ſpatia AP & AD deſcendit, ſi ſollicitationes fuerint diſtantiis a centro proportionales, per idem ſpatium corpus quodvis eodem tempore deſcendit, motu ex quiete ab eodem termino incipiente.

SCHOLION.

121. *Omnia hæc conſona ſunt iis, quæ* Newtonus (g) *demonſtravit.*

CAPUT III.
DE
CENTRO GRAVITATIS.

DEFINITIO 19.

122. *Centrum gravitatis* eſt, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una *æquiponderare* alteri, ſi neutra alteram movet.

COROLLARIUM 1.

123. Quodſi ergo deſcenſus centri gravitatis impeditur, grave quieſcit.

COROLLARIUM 2.

124. Quare ſi corpus ex centro gravitatis ſuſpenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM 3.

125. Totam corporis gravitatem in centrum gravitatis coactam ſupponere licet, adeoque pro corpore gravi ſolum centrum gravitatis ſurrogari poteſt in demonſtrationibus.

DEFINITIO 20.

126. *Diameter gravitatis* eſt recta tranſiens per centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

127. Interſectio itaque duarum diametrorum determinat centrum gravitatis.

DEFINITIO 21.

128. *Planum gravitatis* eſt figura plana, in qua ſitum eſt centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

129. Communis ergo interſectio duo-

(g) In Princip. Phil. nat. mathem. lib. 1. prop. 38. p. 119.

duorum planorum gravitatis aut plurium eſt diameter gravitatis.

DEFINITIO 12.

130. *Gravia homogenea* ſunt, quorum gravitates ſunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; ſingulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO 13.

131. *Gravia heterogenea* ſunt, quorum gravitates non ſunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; ſingulæ inter ſe non erunt pondere æquales. Aut ſi duorum gravium partes ſumas volumine æquales & eædem ſint pondere inæquales; gravia inter ſe heterogenea ſunt, licet in ſe homogenea eſſe poſſint.

DEFINITIO 14.

132. *Centrum magnitudinis* eſt punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales.

THEOREMA 42.

133. *Corpora quævis gravia ex quiete in medio non reſiſtente eodem tempore per idem ſpatium cadunt.*

DEMONSTRATIO.

Deſcendat grave A per ſpatium r: erit tempus deſcenſus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Deſcendat etiam grave B per idem vel æquale ſpatium r: erit etiam tempus deſcenſus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Si ergo ſpatium deſcenſus ex quiete idem eſt, tempus etiam deſcenſus idem eſt. *Q. e. d.*

SCHOLION.

134. *Idem obſervatione confirmatur. Nam in ſpatio ab aëre vacuo (quod quomodo obtineatur, in Aerometria docemus) leviſſima plumula eodem tempore ex data altitudine deſcendit, quo globus plumbeus. Imo ſi corpora magna & ponderoſa in aere per æqualia intervalla demittantur, eodem tempore pavimentum attingunt, modo altitudines ſint mediocres, monente* Hugenio (h). *Pendulorum inprimis experientia id doceri poteſt. Unde experimenta, quibus* Ricciolus *globos argillaceos 20 unciarum, & chartaceos, ſed argillacea teſta ſuperinductos, mole iſtis æquales, ſed pondere ſubduplos per intervallum 280 pedum demittens contrarium probare conatur* (i), *ideo non conſentiunt, quia reſiſtentia aeris in utroque globorum genere fuit admodum diverſa.*

COROLLARIUM.

135. Quoniam corporum gravium ex quiete cadentium celeritates in fine temporis acquiſitæ ſunt ut tempus (§. 88); velocitates gravium deſcendentium ex quiete dato tempore æquales ſunt.

THEO-

(h) In Horologio oſcillatorio part. 4. prop. 4.
(i) Almag. Nov. Tom. 1. lib. 2. c. 21. prop. 1. f. 89.

THEOREMA 23.

136. *Materia, quæ cum corporibus movetur, etiam cum ipſis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium deſcendentium dato tempore æquales ſunt (§. 135); quantitates motus in fine illius temporis ſunt ut materiæ, quæ cum ipſis movetur, quantitates (§. 46). Jam vero gravitas eſt niſus verſus centrum terræ (§. 4), qui adeſt, ubi motus ex quiete inchoatur, adeoque illud quod quantitati motus accedit, conſequenter ſollicitatio ad motum (§. 110). Sed ſollicitatio eſt etiam maſſæ proportionalis (§. 112). Ergo materia, quæ cum gravibus movetur, etiam cum ipſis gravitat. *Q. e. d.*

SCHOLION.

137. *Liquet jam veritas definitionis quintæ* (§. 6).

COROLLARIUM 1.

138. Maſſa igitur corporum recte æſtimatur pet pondus.

COROLLARIUM 2.

139. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales ſint (§. 130); quantitates motus in iis ſunt in ratione compoſita celeritatum & voluminum (§. 45) & ſi eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 46): in quibus vero quantitates motus æquales ſunt, eorum celeritates rationem voluminium reciprocam habent (§. 42).

COROLLARIUM 3.

140. Maſſa invariata pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA 5.

141. *In homogeneis, quæ ſecundum longitudinem in partes ſimiles & æquales ſecari poſſunt, centrum gravitatis idem eſt cum centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.

142. Quodſi ergo linea recta AB bifariam ſecetur in C; erit C centrum gravitatis. Tab. I. Fig. 2.

SCHOLION.

143. *Tale corpus homogeneum, quod ſecundum longitudinem in partes ſimiles ſecari poteſt, eſt e. gr. cylindrus plumbeus. Si enim longitudo* AE *concipiatur in tres partes æquales* ED, DC *&* CA *vel quotcunque plures diviſa; ſecabitur in cylindros æquales, cum eorum baſes & altitudines æquales ſint* (§. 535 Geom.) *atque ſimiles, cum altitudines ſint ut diametri baſium* (§. 570. Geom.). Tab. I. Fig. 3.

THEOREMA 24.

144. *Si centra gravitatis duorum corporum* A *&* B *jungantur recta* AB *centri gravitatis communis* C *diſtantiæ* BC *&* CA *a centris gravitatis particularibus* B *&* A *ſunt reciproce ut pondera* A *&* B. Tab. I. Fig. 4.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB diviſam

viſam eſſe in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 librarum, pondus B 2, & AC : CB = 1 : 3. Concipiatur recta AB utrinque producta in D & E, donec BD = AC & AE = CB; erit EC = CD (§. 88 *Arithm.*). Concipiatur porro recta ED in 8 partes æquales diviſa, quot nempe librarum ſunt pondera junctim ſumta, & quoniam gravitas non mutatur, quomodocunque varietur figura (§.140), gravitas corporum A & B per rectam ED æqualiter diffuſa concipiatur, centris gravitatis manentibus in A & B. Diffundetur adeo gravitas ipſius B per FD & gravitas ipſius A pet EF uniformiter (§. 142), conſequenter pondera A & B junctim ſumta rectam ED repræſentabunt. Hujus vero centrum gravitatis commune eſt in C (§. *cit.*). Ergo idem eſt centrum gravitatis commune ponderum A & B. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

145. Quodſi gravitates corporum A & B fuerint æquales, centrum gravitatis commune C erit in medio rectæ AB centra gravitatis conjungentis.

COROLLARIUM 2.

146. Quia A : B = BC : AC; erit A. AC = B. BC. Unde patet vires æquiponderantium æſtimandas eſſe per factum ex maſſa in diſtantiam a centro gravitatis. Factum hoc *Momentum* ponderum vulgo vocant.

SCHOLION.

147. *Theorema hoc utiliſſimum experimento non ineleganti illuſtrari poteſt. Ex ligno parentur parallelepipeda plura inter ſe æqualia & quorum latitudo ſit dupla profunditatis, longitudo vero ſextupla latitudinis: quamvis neceſſe non ſit, ut hæ rationes accurate obſerventur, ſufficit enim longitudinem aliquoties excedere reliquas dimenſiones. Parentur præterea alia quædam: unum ſit longitudinis dupla, alterum tripla, tertium quadrupla & ita porro. Quodſi parallelepipedum longitudinis dupla colloces ſuper latere priſmatis trigoni, ita ut latus priſmatis ipſum dividat in partes æquales* AC *&* CB; *partes* AC *&* CB *æquiponderabunt: quo ipſo axioma* (§. 141) *confirmatur. Collocetur porro parallelepipedum tripla longitudinis* DE *ea lege ſuper priſmate, ut ejus latus ipſum dividat in partes* DF *&* FE, *quæ ſunt in ratione ſubdupla: pars* FE *præponderabit. Quodſi vero tria parallelepipeda ſimplicis longitudinis ipſi* DF *ſuperimpoſueris; quatuor parallelepipeda duobus* FK *&* KE *in unum* FE *conjunctis æquiponderabunt. Eſt enim ipſius* FE *centrum gravitatis in* K *& ipſius* DF *in medio* L *per experimentum primum. Diſtantia igitur centrorum gravitatis a fulcro* LF *&* FK *ſunt ut* DF *&* FE *ſeu ut pondera* (§.130 Mech. & 573 Geom.). *Eſt ergo ibi centrum gravitatis commune, ut habet theorema noſtrum* (§.144). *Eodem modo deprehenduntur 9 priſmata ſibi mutuo ſuperimpoſita æquiponderare*

Tab. I. Fig. 5.

æquare uni IH, cujus longitudo illorum longitudinis tripla, & ita porro.

COROLLARIUM 3.

Tab. I. Fig. 4. 148. Quoniam $A : B = BC : AC$ (§. 144); erit etiam $A + B : A = BC + AC : BC$ (§. 190 *Arithm.*)

COROLLARIUM 4.

149. Reperitur adeo centrum gravitatis commune duorum ponderum C, ſi factum ex pondere uno A in diſtantiam centrorum gravitatis ſeparatorum AB ($= AC + CB$) dividatur per ſummam ponderum A & B (§. 302 *Arithm.*). Sit e. gr. $A = 12$, $B = 4$, $AB = 24$; erit $BC = 24 . 12 : 16 = 18$.

COROLLARIUM 5.

150. Quodſi pondus A detur & diſtantia centrorum gravitatis particularium AB una cum centro gravitatis communi C, reperitur pondus $B = A . AC : BC$ (§. 302 *Arithm.*), hoc eſt, ſi momentum ponderis dati dividatur per diſtantiam ponderis quæſiti B a centro gravitatis communi (§. 146). Sit e. gr. $A = 12$, $BC = 18$, $AC = 6$; erit $B = 6 . 12 : 18 = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA 12.

Tab. I. Fig. 6. 151. *Ponderum plurium datorum* a, b, c, d *centrum gravitatis commune in recta* AB *determinare.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis commune duorum ponderum a & b (§. 149): quod ſit in F.
2. In F concipiatur applicari pondus $a + b$ duobus reliquis a & b æquale (§. 125) & quæratur porro in recta FE centrum gravitatis commune ponderum $a + b$ & c (§. 149): quod ſit in G.
3. Denique in G concipiatur applicari pondus $a + b + c$ duobus $a + b$ & c æquale (§. 125) & quæratur inter ipſum & pondus d centrum gravitatis commune in recta GB (§. 149): quod ſit in H.

Eſt adeo H centrum gravitatis commune ponderum a, b, c & d. Patet etiam, quomodo ſit progrediendum, ſi plura pondera dentur. Sit e. gr. $a = 20$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 5$, $AC = 9$, $CE = 6$, $EB = 12$: erit $AF = b . AC : (a + b) = 10 . 9 : 30 = 3$, adeoque $FC = 6$ & $FE = FC + CE = 12$. Hinc reperitur $FG = c . FE : (a + b + c) = 15 . 12 : 45 = 4$. Quare $GE = FE - FG = 8$ & $GB = GE + EB = 20$. Invenitur adeo $GH = d . GB : (a + b + c + d) = 5 . 20 : 50 = 2$. Unde $HB = GB - GH = 18$ & (ob $AB = AC + CE + EB = 27$) $AH = 9$.

PROBLEMA 13.

Tab. I. Fig. 7. 152. *Duobus ponderibus* D & E *extra centrum gravitatis commune in* C *ſuſpenſis, determinare, quodnam eorum & quantum præponderet.*

RESOLUTIO.

1. Quodlibet pondus ducatur in diſtantiam ſuam a centro ſuſpen-

ſpenſionis, nempe D in AC & E in BC: ex qua parte factum majus prodit, verſus eam eſt præponderatio.

2. Factum minus a majore ſubtrahatur: erit reſiduum præpondium.

E. gr. Sit D = 30 librarum, E = 20, AC = 2, BC = 4: erit D. AC = 60, E. BC = 80, adeoque E præponderat in B momento ut 20.

DEMONSTRATIO.

Sit AC : CB = d : md & pondus D = mp; æquiponderabit eidem in B pondus p (§. 144). Sed pondus E majus eſt quam p. Dicatur ergo exceſſus r, ita ut ſit E = $p + r$. Quoniam momentum ipſius r æquale eſt momento ponderis in A eidem æquiponderantis, hoc vero reperitur mrd (§. 146); exceſſus momenti ponderis E ſupra momentum alterius D eſt mrd. Sed mrd eſt differentia inter mpd & $mpd + mrd$, hoc eſt, inter D. AC & E. BC. Relinquitur adeo exceſſus momenti ipſius E ſupra momentum alterius D, ſi factum D. AC ex E. CB ſubtrahitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

153. Ponderum D & E itaque extra centrum gravitatis in C ſuſpenſorum momenta ſunt in ratione compoſita ipſorummet ponderum D & E & diſtantiarum a puncto ſuſpenſionis AC & CB.

COROLLARIUM 2.

154. Ponderis itaque ex ipſo puncto C ſuſpenſi momentum reſpectu reliquorum D & E nullum eſt, ſeu eadem ratione D & E inter ſe ponderant, ac ſi pondus in C plane abeſſet, quia ſcilicet diſtantia ejus nulla eſt.

PROBLEMA 14.

155. *Determinare præponderationem, ponderibus pluribus* a, b, c, d *extra centrum gravitatis in* C *ſuſpenſis.* Tab. I. Fig. 8.

RESOLUTIO.

1. Ducantur pondera c & d in ſuas diſtantias a puncto ſuſpenſionis CE & EB: ſumma dabit momentum ponderum c & d junctim, ſeu ponderationem verſus dexteram (§. 153).
2. Ducantur quoque pondera a & b in ſuas diſtantias AC & CD: ſumma denuo dabit ponderationem verſus ſiniſtram (§. *cit.*).
3. Quodſi ergo ponderationem majorem a minore ſubtrahas, relinquetur tandem præponderatio quæſita.

E. gr. Sit AC = 6, DC = 4, CE = 5, CB = 8, a = 12, b = 15, c = 20, d = 8: erit ponderatio verſus dexteram = c. EC + d. CB = 20. 5 + 8. 8 = 164; verſus ſiniſtram = a. AC + b. DC = 12. 6 + 15. 4 = 132. Præponderant ergo c & d verſus dexteram momento ut 32.

PROBLEMA 15.

156. *Ponderibus quotcunque*

Tab. I. Fig. 8. *extra centrum gravitatis in* C *ſuſpenſis & verſus dexteram præponderantibus, determinare punctum* F, *ex quo ſi ſumma omnium ponderum ſuſpendatur, eadem maneat præponderatio verſus dexteram, quæ fuerat ante in dato ponderum* a, b, c, d *ſitu.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur momentum, quo pondera *c* & *d*, vel quotcunque fuerint, verſus dexteram præponderant (§. 155).

2. Cum momentum ſummæ ponderum in F ſuſpendendæ eidem æquale eſſe debeat; momentum modo inventum erit factum ex CF in ſummam ponderum (§. 153). Quare ſi per ſummam ponderum dividatur; quotus erit diſtantia CF, ex qua ſuſpendenda eſt ponderum ſumma, ut eadem maneat præponderatio, quæ fuerat ante (§. 210 *Arithm.*).

E. gr. Sint omnia ut in probl. præc. erit momentum, quo pondera verſus dexteram præponderant 32. Quodſi hoc dividas per ſummam ponderum 55, quotus $\frac{32}{55}$ eſt diſtantia CF quæſita.

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 9. 157. Si elementa figurarum, quale mMNn, concipiantur inſtar ponderum ad axem AE appenſorum & in vertice A punctum ſuſpenſionis; determinabitur punctum in AE, ex quo ſumma omnium ponderum ſuſpenſa eodem modo ponderat ac tota figura, hoc eſt, centrum gravitatis (§. 125), ſumma momentorum omnium ponduſculorum per ſummam ponduſculorum diviſa (§. 153). Sit enim $AP = x$, $MP = y$, $Pp = dx$; erit unum ponduſculum $2ydx$, ſumma omnium $2\int ydx$, momentum unius ponduſculi $2yxdx$ (§. 153), ſumma omnium $2\int yxdx$; conſequenter diſtantia centri gravitatis a vertice $AF = \int yxdx : \int ydx$. Quodſi adeo differentialia $yxdx$ & ydx integrentur, ut in analyſi infinitorum docuimus, centrum gravitatis determinatur.

PROBLEMA 16.

Tab. I. Fig. 10. 158. *Determinare centrum gravitatis in triangulo* BAC.

RESOLUTIO.

Ducatur recta AD baſin BC bifariam ſecans in D. Quoniam $\triangle$ BAD $= \triangle$ DAC (§. 440 *Geom.*); utrumque in totidem ponduſcula ad communem axem AD eodem modo utrinque applicata reſolvi poteſt; adeoque centrum gravitatis $\triangle$ BAC erit in AD (§. 122). Illud igitur ut determinetur, fiat $AD = a$, $BC = b$, $AP = x$, $MN = y$, erit (§. 397 *Geom.*)

$$AP : MN = AD : BC$$
$$x : y = a : b$$

Hinc $y = bx : a$. Ducatur $AE = c$ perpendicularis ad BC, erit $AD : AE = AP : AQ$ (§. 396 *Geom.*), adeoque $AQ = cx : a$ & $Qq = cdx : a$.

Unde

Unde momentum $yxdx = cbx^2dx : a^2$ & $\int yxdx = cbx^3 : 3a^2$, quæ ſumma per aream trianguli AMN $= cbx^2 : 2a^2$ (§. 392 *Geom.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis a vertice $= 2abx^3 : 3abx^2 = \frac{2}{3}x$ (§. 157). Quodſi pro x ſubſtituatur a; prodibit diſtantia centri gravitatis totius trianguli a vertice $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}$ AD.

PROBLEMA 17.

159. *Determinare centrum gravitatis in parabola.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 9. Ad parabolam eſt

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx \quad (\text{§. 103 } Anal.\ inf.)$$

$$xydx = a^{1:2}x^{3:2}dx$$

$$\int xydx = \tfrac{2}{5}a^{1:2}x^{5:2}$$

ſed $\int ydx = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$ (§. cit.)

Ergo $\int xydx : \int ydx = \frac{3}{5}x = AF$ (§. 157).

PROBLEMA 18.

160. *Determinare centrum gravitatis in omnibus parabolis ſuperiorum generum & curvis agnatis in infinitum.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis eſt (§. 105 *Analyſ. infinit.*).

$$ydx = a^{n:r}x^{m:r}dx$$

$$xydx = a^{n:r}x^{(m+r):r}dx$$

$$\int xydx = \frac{r}{m+2r}a^{n:r}x^{(m+2r):r}$$

$$\int ydx = \frac{r}{m+r}a^{n:r}x^{(m+r):r} \quad (\text{§. cit.})$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{m+r}{m+2r}x = AF \quad (\text{§. 157})$$

E. gr. in paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$ (§. 519 *Analyſ. finit.*). Ergo AF $= \frac{4}{7}$ AP.

In paraboloide biquadratico $m = 1$, $r = 4$. Ergo AF $= \frac{5}{9}$ AP.

In paraboloide ſurdeſolidali $m = 1$, $r = 5$. Ergo AF $= \frac{6}{11}$ AP.

Si fuerit $ax^2 = y^3$; erit $m = 2$, $r = 3$, AF $= \frac{5}{8}$ AP.

Si $ax^3 = y^4$; erit $m = 3$, $r = 4$, AF $= \frac{7}{11}$ AP.

Si $ax^4 = y^5$; erit $m = 4$, $r = 5$, AF $= \frac{9}{14}$ AP.

COROLLARIUM.

161. Diſtantia ergo centri gravitatis a baſi FP eſt $= x - \frac{m+r}{m+2r}x = \frac{mx+2rx-mx-rx}{m+2r} = \frac{r}{m+2r}x$.

E. gr. in parabola *Apolloniana* $m = 1$, $r = 2$. Ergo PF $= \frac{2}{5}$ AP.

In paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$ Ergo PF $= \frac{3}{7}$ AP.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2$, $r = 3$. Ergo PF $= \frac{3}{8}$ AP.

PROBLEMA 19.

162. *Determinare centrum gravitatis in parabola exteriore AST.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Si AQ $=x$, QM $=y$, parameter $=1$; erit (§. 388 *Analyſ. finit.*) $x^2=y$ & hinc

$$xydx = x^3dx$$
$$\int xydx = \tfrac{1}{4}x^4$$
$$\int ydx = \tfrac{1}{3}x^3$$

$$\int xydx : \int ydx = \tfrac{3}{4}x = \tfrac{3}{4}AQ = AL.$$

PROBLEMA 20.

163. *Determinare centrum gravitatis in infinitis parabolis exterioribus ſuperiorum generum & aliis curvis agnatis.*

RESOLUTIO.

Si parameter $=1$, pro infinitis parabolis ſuperioribus & curvis agnatis eſt $x^r=y^n$ (§. 519 *Analyſ. finit.*). Quare

$$ydx = x^{r:n}dx$$
$$xydx = x^{(r+n):n}dx$$
$$\int xydx = \frac{n x^{(r+2n):n}}{r+2n}$$
$$\int ydx = \frac{n}{r+n}x^{(r+n):n}$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{r+n}{r+2n}x = AL.$$

E. gr. in paraboloide cubicali $r=3$, $n=1$. Ergo AL $=\tfrac{4}{5}$ AQ.

In paraboloide biquadratico $r=4$, $n=1$. Ergo AL $=\tfrac{5}{6}$ AQ.

In paraboloide ſurdeſolidali $r=5$, $n=1$. Ergo AL $=\tfrac{6}{7}$ AQ.

In curva, ad quam $x^3=y^2$, $r=3$, $n=2$. Ergo AL $=\tfrac{5}{7}$ AQ.

In curva, ad quam $x^4=y^3$, $r=4$, $n=3$. Ergo AL $=\tfrac{7}{10}$ AQ.

PROBLEMA 21.

164. *Determinare centrum gravitatis in curva, ad quam* $b^2y = bx^2 - x^3$.

RESOLUTIO.

Quoniam $ydx = (bx^2dx - x^3dx):b^2$ (§. 99 *Anal. infinit.*)

$$xydx = (bx^3dx - x^4dx):b^2$$
$$\int xydx = x^4:4b - x^5:5b^2 = (5bx^4-4x^5):20b^2$$
$$\int ydx = x^3:3b - x^4:4b^2 = (4bx^3-3x^4):12b^2$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{12b^2(5bx^4-4x^5)}{20b^2(4bx^3-3x^4)} = \frac{15bx-12x^2}{20b-15x} = AF$$

Eſt adeo $20b-15x : 15b-12x = x : AF$.

PROBLEMA 22.

165. *Determinare centrum gravitatis cujuslibet arcus circuli.*

RESOLUTIO.

Sit Ap od AB normalis ipſi DP Tab.
infinite propinqua; erit arculus I.
DM infinite parvus. Sit chordæ Fig.
DE arcus dati DHE diameter AB 11.
parallela, quæ inſtar axis conſideretur,

retur, ad quem ponduſcula MD applicata, quorum adeo momenta erunt ut MD. PD. Quoniam itaque ad radium HC, qui arcum DE in H (§. 291 *Geom.*) biſecat, ponduſcula & numero & momento æqualia utrinque diſponuntur; tranſit is per centrum gravitatis (§. 122). Sit jam PC = DG = x, DC = a, erit DR = Pp = dx. Jam cum ſit angulus CDM rectus (§. 319 *Geom.*) & PDE itidem rectus (§. 230 *Geom.*), adeoque PDC = RDM (§. 91 *Arithm.*), ſintque etiam anguli DRM & DPC recti *per conſtruct.* erit MD : DR = DC : PD, (§. 267 *Geom.*) & hinc reperietur MD.PD = DR.DC = adx (§. 297 *Arithm.*). Summa ergo momentorum arcus DH ax = DC. DG, quæ diviſa per arcum DH centri gravitatis F diſtantiam a centro circuli C determinat (§. 157). Eſt itaque arcus DH : DG = DC : CK.

Quodſi pro DH ponatur quadrans *AH* & pro DG radius AC; prodibit diſtantia centri gravitatis ſemiperipheriæ AC^2 : AH, hoc eſt, diſtantia hæc CF eſt tertia proportionalis ad quadrantem & radium.

PROBLEMA 23.

166. *Determinare centrum gravitatis in ſectore circuli* ACB.

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 12.

Ex antecedentibus liquet, ſi DC ſectorem bifariam ſecet, centrum gravitatis fore in recta DC. Ducatur radio PC arcus PNM & radio pC alius pnm alteri infinite propinquus. Quoniam ſegmentum annulare eſt ponduſculum ex centro C ſuſpenſum, & quidem ſimul differentiale ſectoris; erit momentum arcus PNM ductum in Pp ſeu Nn momentum ſegmenti annularis PNMmnp, hoc eſt, differentiale momenti ſectoris. Jam momentum arcus ADB = 2AC. AE & momentum arcus PNM = 2PC. Pn (§. 156) & Δ ACB = ½ EC. AE atque Δ PCM = Pn. ½ Cn (§. 392 *Geom.*). Eſt igitur Δ ACP : Δ PCM = EC. AE : Cn. Pn & momenta arcuum ADB & PNM = AC. AE : PC. Pn (§. 181 *Arithm.*). Eſt vero AC : PC = EC : Cn (§. 268 *Geom.*). Ergo Δ ACB : Δ PCM = AC. AE : PC. Pn. (§. 184 *Arithm.*), conſequenter momentum arcus ADB eſt ad momentum arcus PNM ut Δ ACB ad Δ PCM (§. 167 *Arithm.*), hoc eſt, ut AC^2 ad PC^2 (§. 399 *Geom.*). Sit jam arcus AD = p, AC = a, AE = b; erit momentum arcus ADB = $2ab$ (§. 165). Sit porro PC = x; reperietur per modo demonſtrata momentum arcus

cus PNM $= 2abx^2 : a^2 = 2bx^2 : a$, momentum vero ſegmenti annularis PM$mp = 2bx^2dx : a$. Hujus ſumma $2bx^3 : 3a$ eſt momentum ſectoris CPM. Quare ſi fiat $x=a$, erit momentum ſectoris CAB $= 2a^3b : 3a = \frac{2}{3} a^2b$, quo per ſummam ponderum ſeu aream ſectoris ACB $= ap$ diviſo, prodibit diſtantia centri gravitatis ſectoris ACB $= 2ab : 3p = 2$AC.AE : 3AD. Eſt vero AC.AE : AD diſtantia centri gravitatis arcus a centro circuli CF (§. 165). Diſtantia igitur centri gravitatis ſectoris a centro circuli eſt ad diſtantiam centri gravitatis arcus ut 2. ad 3.

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 11. 167. Diſtantia ergo centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli C ſunt $\frac{2}{3}$ AC^2 : AH (§. 156). Quare ut $\frac{2}{3}$ AH ſeu arcus 60° ad $\frac{2}{3}$ AC ita $\frac{2}{3}$ AC ad diſtantiam centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli (§. 185 *Arithm.*).

PROBLEMA 24.

Tab. I. Fig. 11. 168. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti* DHED.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis trianguli DCE (§. 158): quod ſit in L.
2. Quæratur centrum gravitatis ſectoris DCEHD (§. 166); quod ſit in F.
3. Cum F ſit commune centrum gravitatis trianguli DCE & ſegmenti DEHD; quæratur ad ſegmentum DEHD, triangulum DCE & LF quarta proportionalis GK: erit GK diſtantia centri gravitatis ſegmenti K a diſtantia centri gravitatis ſectoris F (§. 144). Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti ad triangulum lineis rectis: quod quidem accurate præſtare licebit data circuli quadratura.

PROBLEMA 25.

169. *Invenire centrum gravitatis Lunulæ Hippocratis* ADBEA. Tab. II. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis ſemicirculi ADB (§. 156): quod ſit in G.
2. Quæratur porro centrum gravitatis ſegmenti AEBFA (§. 168): quod ſit in H.
3. Cum adeo G ſit centrum gravitatis commune Lunulæ *Hippocratis* ADBEA & ſegmenti AEBA; quæratur ad Lunulam, ſegmentum & HG quarta proportionalis GI: erit GI diſtantia centri gravitatis Lunulæ I a centro gravitatis ſemicirculi G (§. 144).

Ex-

Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti AEBA ad Lunulam ADBEA lineis, niſi numeris utamur.

PROBLEMA 26.

Tab. I. Fig. 9. 170. *Invenire centrum gravitatis in parabola truncata* SMNH.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis parabolæ MAN (§. 159): quod ſit in F.

2. Quæratur item centrum gravitatis parabolæ SAH (§. *cit.*) quod ſit in D.

3. Quoniam centrum gravitatis commune parabolæ MAN & parabolæ truncatæ SMNH in O; quæratur porro ad parabolam truncatam SMNH, parabolam MAN & diſtantiam FO quarta proportionalis OK: erit in K centrum gravitatis parabolæ truncatæ (§.144).

SCHOLION.

171. *Patet, eadem methodo, quam nunc uno alteroque exemplo illuſtravimus, ſemper inveniri centrum gravitatis differentiæ duarum figurarum, quarum centra gravitatis dantur.*

PROBLEMA 27.

Tab. II. Fig. 14. 172. *Invenire centrum gravitatis in parallelogrammo & parallelepipedo.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diagonales AD & EG, itemque CB & HF. Quoniam diagonalis utraque AD & CB parallelogrammum ACDB bifariam dividit (§. 337 *Geom.*); utraque per centrum magnitudinis (§.132), adeoque & gravitatis tranſit (§.122), conſequenter in I eſt centrum gravitatis parallelogrammi (§.141). Eodem modo patet in K eſſe centrum gravitatis parallelogrammi EFGH. Similiter quia tam planum GBFH, quam ADGE parallelepipedum bifariam dividit (§. 537 *Geom.*); utrumque per centrum gravitatis ejus tranſit (§. 141), adeoque communis interſectio IK eſt diameter gravitatis (§.126).

2. Dividatur IK bifariam in L. Quoniam planum tranſiens per L & baſibus parallelum parallelepipedum bifariam dividit (§. 535 *Geom.*); per centrum gravitatis tranſit (§. 141), adeoque in L gravitatis centrum eſt.

SCHOLION.

173. *Attendentibus ſtatim manifeſtum eſt, non abſimili modo centrum gravitatis in priſmatibus & cylindris reperiri, eſſeque illud punctum medium rectæ centra gravitatis baſium oppoſitarum conjungentis. In polygonis autem regularibus centrum gravitatis idem eſſe cum centro circuli circumſcribendi, facile quoque intelligitur. Quemadmodum*

dum vero centrum gravitatis ſegmentorum & ſectorum, imo lunularum circuli per ſuperiora inveniri poteſt; ita per problema præſens conſtat, quomodo variorum ſegmentorum cylindricorum centrum gravitatis inveniri poſſit, quorum nempe baſes ſunt circuli ſegmenta, ſectores, annuli, lunulæ.

PROBLEMA 28.

Tab. II. Fig. 15. 174. *Invenire centrum gravitatis Coni & pyramidis.*

RESOLUTIO.

Centrum gravitatis Coni eſſe in axe AC ſatis claret ex ſuperioribus. Si AP $= x$; P$p = dx$ & ponduſculum in cono eſt $prx^2 dx : 2a^2$ (§. 198 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $prx^3 dx : 2a^2$ (§. 153). Hinc ſumma momentorum $prx^4 : 8a^2$, quæ per ſummam ponderum $prx^3 : 6a^2$ (§. 198 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis AMN a vertice A $= 6a^2 prx^4 : 8a^2 prx^3 = \frac{3}{4} x = \frac{3}{4}$ AP, adeoque coni integri centrum gravitatis diſtat a vertice $\frac{3}{4}$ AC.

Eodem prorſus modo invenitur diſtantia centri gravitatis a vertice in pyramide $= \frac{3}{4}$ AC.

PROBLEMA 29.

Tab. II. Fig. 16. 175. *Invenire centrum gravitatis Conoidis parabolici* ABCD *ex rotatione parabolæ* AMC *circa axem* AC *geniti.*

RESOLUTIO.

Ponduſculum conoidis MNnm $= pxdx : 2r$ (§. 202 *Analyſ. infinit.*) adeoque momentum $= px^2 dx : 2r$ (§. 153), conſequenter ſumma momentorum $= px^3 : 6r$, quæ per ſummam ponderum $px^2 : 4r$ (§. 202 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis conoidicæ AMPN a vertice A $= 4rpx^3 : 6rpx^2 = \frac{2}{3} x$. Eſt adeo diſtantia centri gravitatis a vertice in conoide parabolico ABD $= \frac{2}{3}$ AC.

PROBLEMA 30.

176. *Invenire centrum gravitatis conoidis paraboloidici ex rotatione paraboloidis cujuscunque* AMBC *circa axem* AC *geniti.*

RESOLUTIO.

Ponduſculum Conoidis paraboloidici indefinitum eſt $px^{2:m} dx : 2r$ (§. 202 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^{(2+m):m} dx : 2r$ (§. 153). Hinc ſumma momentorum $mpx^{(2+2m):m} : (4m+4) r$, quæ per ſummam ponderum $mpx^{(2+m):m} : (2m+4) r$ (202 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis conoidicæ MAN a vertice A $= (2m+4) mr px^{(2+2m):m} : (4m+4) mrpx^2 = \frac{m+2}{2m+2} x = \frac{m+2}{2m+2}$ AP, conſequen-

ter in integro Conoide $\frac{m+2}{2m+2}$ AC.

Sit e. gr. $m = 2$; erit AH $= \frac{2}{3}$ AC.
Sit $m = 3$; erit AH $= \frac{5}{8}$ AC.
Sit $m = 4$; erit AH $= \frac{3}{5}$ AC.
Sit $m = 5$; erit AH $= \frac{7}{12}$ AC.

PROBLEMA 31.

177. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti ſphæræ.*

RESOLUTIO.

In ſegmento ſphærico ponduſculum $= pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 199 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^2dx - px^3dx : 2r$ (§. 153). Unde ſumma momentorum $\frac{1}{3}px^3 - px^4 : 8r = (8rpx^3 - 3px^4) : 24r$, quæ per ſummam ponderum $\frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r = (6rpx^2 - 2px^3) : 12r$ (§. 199 *Anal. infin.*) diviſa definit diſtantiam centri gravitatis a vertice $= 12r(8rpx^3 - 3px^4) : 24r(6rpx^2 - 2px^3) = (8rx - 3x^2) : (12r - 4x)$. Eſt adeo ut $12r - 4x$ ad $8r - 3x$, hoc eſt, $3r - x$ ad $2r - \frac{3}{4}x$ (§. 185 *Arithm.*) ita x ad diſtantiam centri gravitatis a vertice.

COROLLARIUM.

178. Quodſi pro x ſubſtituatur r ſeu ſemidiameter ſphæræ, prodibit diſtantia centri gravitatis a vertice in hemiſphærio $(8r^2 - 3r^2) : (12r - 4r) = 5r^2 : 8r = \frac{5}{8}r$. Eodem modo ſi pro x ſubſtituatur $2r$, ſphæræ integræ centrum gravitatis reperitur diſtare a vertice ſemidiametro r, hoc eſt, idem cum centro ſphæræ.

PROBLEMA 32.

179. *Invenire centrum gravitatis Conoidis hyperbolici.*

RESOLUTIO.

In Conoide hyperbolico ponduſculum $= pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$ (§. 208 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r + pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare omnium momentorum ſumma $pbx^3 : 6r + pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 + 3pbx^4) : 24ar$, quæ per ſummam ponderum $pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$ (§. *Anal. infin. cit.*) $= (6apbx^2 + 4pbx^3) : 24ar$ diviſa diſtantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 + 3pbx^4) : (6apbx^2 + 4p$ [illegible] $= (4ax + 3x^2) : (6a + 4x$ [illegible]ſt adeo ut $6a + 4x$ ad $4a + 3x$, ita x ad diſtantiam centri gravitatis a vertice. Conſtat vero eſſe a axem tranſverſum hyperbolæ genitricis, x altitudinem conoidis, ſeu illius abſciſſam (§. 459 *Anal. fin.*)

PROBLEMA 33.

180. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti ſphæroidis elliptici.*

RESOLUTIO.

In ſphæroide elliptico ponduſculum $pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$ (§. 203 *Analyſ. infinit.*), adeoque mo-

momentum ejus $pbx^2dx : 2r - pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare momentorum ſumma $pbx^3 : 6r - pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 - 3pbx^4) : 24ar$, quæ per ſummam ponderum $pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$ (§. 203 *Analyſ. infinit.*) $= (6apbx^2 - 4pbx^3) : 24ar$ diviſa diſtantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 - 3pbx^4) : (6apbx^2 - 4pbx^3) = (4ax - 3x^2) : (6a - 4x)$. Eſt adeo ut $6a - 4x$ ad $4a - 3x$, hoc eſt, ut $a - \frac{2}{3}x$ ad $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x$ ita x ad diſtantiam centri gravitatis a vertice. Denotat autem a axem majorem ellipſis genetricis, ſeu ipſum axem majorem ſphæroidis; x autem altitudinem ſegmenti, ſeu portionem axis inter verticem & baſin interceptam.

COROLLARIUM 1.

[illegible] Quodſi pro x ponatur a, prodit pro centro gravitatis totius ſphæroidis elliptici $(4aa - 3aa) : (6a - 4a) = aa : 2a = \frac{1}{2}a$. Eſt nempe in medio axe.

COROLLARIUM 2.

182. Sphæræ igitur & ſphæroidis elliptici communem axem habentium centrum gravitatis idem eſt (§. 178).

COROLLARIUM 3.

183. Si pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, prodit diſtantia centri gravitatis in dimidio ſphæroide a vertice $(\frac{4}{2}aa - \frac{3}{4}aa) : (6a - \frac{4}{2}a) = \frac{5}{4}aa : 4a = \frac{5}{16}a$, eadem adeo quæ in hemiſphærio (§. 178). Nam ſi ut ibi fiat $a = 2r$, erit $\frac{5}{16}a = \frac{10}{16}r = \frac{5}{8}r$.

PROBLEMA 34.

184. *Invenire centrum gravitatis in Cono truncato* BMND *&* *in pyramide truncata.* Tab. II. Fig. 15.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur centrum gravitatis Coni AMN (§. 174): quod ſit in F.
2. Inveniatur quoque centrum gravitatis coni majoris BAD (§. *cit.*): quod ſit in G.
3. Quæratur ad conum truncatum BMND, conum minorem MAN & FG quarta proportionalis GH: erit in H centrum gravitatis coni truncati (§. 144).

Patet autem, rationem coni truncati BMND ad minorem MAN lineis eſſe exprimendam, niſi numeris utamur.

SCHOLION.

185. *Eadem methodo centrum gravitatis reperies in conoidibus truncatis, itemque in ſphara & ſphæroidibus truncatis. Enimvero quamvis multa adhuc ea de re addi poſſent; filum tamen abrumpi conſultum ducimus, cum ex hactenus dictis facile eruantur, nec multum in praxi habeant uſum. Adjiciemus itaque tantummodo adhuc methodum centrum gravitatis aut punctum ipſi in ſuperficie corporis cujuscunque reſpondens mechanice explorandi, quantum ad praxin ſufficit.*

PROBLEMA 35.

186. *Determinare centrum gravita-*

vita-

vitatis mechanicæ in corpore quocunque.

RESOLUTIO.

Tab. I. II. Fig. 17. 1. Super fune extenſo aut latere priſmatis trigoni FG corpus datum HI huc illucque promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur: planum, cujus latus KL, tranſit per centrum gravitatis (§. 124).

2. Super eodem corpus mutato ſitu æquilibretur: erit MN denuo latus plani per centrum gravitatis tranſeuntis (§. *cit.*)

Interſectio adeo rectarum MN & KL determinat punctum O in ſuperficie corporis quæſitum, quod nempe eſt in diametro gravitatis (§. 126).

Aliter.

Tab. II. Fig. 18. 1. Corpus datum O ita collocetur ſuper tabula horizontali, ut, ſi vel minimum ultra terminum CD promoveretur, decideret: erit recta CD in plano gravitatis (§. 124).

2. Imponatur idem corpus eidem tabulæ, ut nunc longitudo AB, quemadmodum ante latitudo CD, ſit lateri tabulæ parallela & vel minimum ultra terminum AB promotum decidat: erit recta AB in plano gravitatis (§. *cit.*)

Communis adeo interſectio rectarum AB & CD in ſuperficie corporis punctum C centro gravitatis imminens determinat (§. 129).

Aliter.

Laminæ centrum gravitatis invenies, ſi cuſpidi alicujus ſtyli eam impoſueris & ultro citroque promoveris, donec partes utrinque æquilibrentur. Erit enim in puncto, quo ſuſtentatur, centrum gravitatis (§. 124).

COROLLARIUM.

187. Corporis adeo humani in directum extenſi centrum gravitatis, vi modi primi, obſervante Borello (k), inter nates & pubim exiſtit. Quare totius corporis gravitas ibi colligitur, ubi genitalibus natura conceſſit locum.

SCHOLION.

188. *Quoniam ſubinde etiam in applicatione methodi ſuperioris diſtantia centri gravitatis a duobus planis in figuris planis, a tribus autem in ſolidis, ut illic per interſectionem duorum, hic trium normalium prodeat centrum gravitatis; ideo unum ſaltem exemplum apponimus, ut quomodo id fiat in aliis inde intelligatur. Et quia in corporibus ſuſpendendis utile etiam eſt noſſe perimetrorum centra gravitatis; ideo nec inconſultum videtur uno alteroque exemplo docere, quomodo methodus antea tradita & exemplis illuſtrata* (§. 157 & ſeqq.) *huc applicetur.*

(k) De motu animalium part. 1. prop. 134 p. m. 167.

PROBLEMA 36.

189. *Invenire centrum gravitatis in ſpatio parabolico mixtilineo* APM.

Tab. XIII. Fig. 124.

RESOLUTIO.

Sit AR ad axem AB normalis & ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua. Quæratur primo diſtantia centri gravitatis ab axe AB, nempe QL. Cum elementum PM*mp*, quod pro parallelogrammulo habetur (§. 98 *Anal. infinit.*) conſideretur inſtar ponduſculi ad axem librationis AB in P ſuſpenſi, erit momentum ejus $= PMmp . \frac{1}{2} PM$ (§.146), centro gravitatis in medio parallelogrammuli extante (§.172). Sit jam $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = dx$, adeoque $PpmM = ydx$, conſequenter momentum ponduſculi $\frac{1}{2}y^2dx$. Jam in parabola $y^2 = x$, parametro exiſtente 1 (§.388 *Anal. fin.*), atque hinc $2ydy = dx$. Quare momentum ponduſculi $\frac{1}{2}y^2dx = y^3dy$, eorumque ſumma $= \frac{1}{4}y^4$. Jam area APM ſeu ſumma omnium ponduſculorum $= \int ydx = \int 2y^2dy = \frac{2}{3}y^3$. Ergo $QL = \int \frac{1}{2}y^2dx : \int ydx$ (§.157) $= 3y^4 : 8y^3 = \frac{3}{8}y$. Quare ſi fiat $AD = \frac{3}{8}$ PM & ex puncto D ducatur DL ipſi AB parallela; erit in ea centrum gravitatis ſpatii mixtilinei APM.

Ducatur jam porro ex centro gravitatis O parallelogrammuli PM*mp* ad AR normalis OK, & conſideretur inſtar ponduſculi ad axem librationis AR ſuſpenſi, erit PM*mp* . OK momentum ejus $= xydx$. Eſt vero in parabola $y = x^{1:2}$ (§. 392 *Anal. fin.*). Ergo momentum ponduſculi $= x^{3:2}dx$, conſequenter eorum ſumma $= \int xydx = \frac{2}{5}x^{5:2}$. Jam area APM ſeu ſumma omnium ponduſculorum $\int ydx = \frac{2}{3}x^{3:2}$ (§. 103 *Anal. infin.*) Ergo $DL = \int xydx : \int ydx$ (§.157) $= 3x^{5:2} : 5x^{3:2} = \frac{3}{5}x$. Quare ſi fiat $AQ = \frac{3}{5}$ AP & in Q erigatur normalis QL ipſi DL paulo ante determinatæ occurrens in L; erit L centrum gravitatis ſpatii mixtilinei AMP, hic quidem parabolici.

PROBLEMA 37.

190. *Invenire centrum gravitatis perimetri trianguli.*

RESOLUTIO.

Tab. XIII. Fig. 125. 126.

Sit triangulum ABC æquilaterum, vel ſcalenum

1. Biſecentur rectæ in D, E & F: erunt puncta iſta centra gravitatis laterum AB, AC & BC (§. 142).
2. Ducatur recta DE: qua in G bifariam diviſa, erit G centrum gravitatis commune rectarum AB & AC (§. 145).

3. Con-

3. Concipiatur in G pondus duabus rectis AB & AC inſtar ponderum conſideratis æquale, & in F pondus rectæ BC æquivalens (§.), fiatque ducta recta GF ut AB+AC+BC:BC=GF : GH : erit in H centrum gravitatis commune trium rectarum AB, AC & CB (§. 151).

Tab. XIII. Fig. 127.

PROBLEMA 38.

191. *Invenire centrum gravitatis perimetri figuræ irregularis cujuscunque*, v. gr. *Pentagonæ*.

RESOLUTIO.

1. Biſecentur ſingula latera AE, ED, DC, CB, BA in G, F, K, H, erunt in iſtis diviſionum punctis eorum centra gravitatis particularia (§. 142).
2. Connectantur puncta G & H recta GH fiatque AB+AE: AE=GH: HL; erit in L centrum gravitatis laterum AB & AE commune (§. 151).
3. Jungantur puncta L & F recta FL, fiatque AB+AE+ED: ED=LF : LM; erit in M centrum gravitatis commune laterum AB, AE & EF (§. *cit.*).
4. Jungantur porro puncta M & I recta MI, fiatque AB+AE +ED+BC:BC=MI:MN; erit in N centrum gravitatis commune laterum AB, BC, AE & ED (§. *cit.*).
5. Denique jungantur puncta N & K recta NK; fiatque AB+BC+CD+DE+EA: DC=NK : NO; erit in O centrum gravitatis commune totius perimetri (§. *cit.*).

SCHOLION.

192. *Me non monente apparet, hac ratione determinari poſſe centrum gravitatis commune ponderum quorumcunque quomodocunque in eodem plano ſitorum.*

THEOREMA 25.

193. *Omnis figura ſive ſuperficialis, ſive ſolida, quæ motu lineæ aut figuræ generatur, æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis, ſeu lineam, quam centrum gravitatis deſcribit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus pondus totius magnitudinis generantis in centro gravitatis collectum (§. 125); erit totum pondus motu illius productum æquale facto ex pondere moto in viam centri gravitatis. Sed cum lineæ & figuræ inſtar gravium homogeneorum conſiderentur; pondera ipſarum ſunt ut volumina (§. 230), adeoque pondus motum eſt magnitudo generans, pondus productum genita. Quare figura genita æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. I. Fig. 9.

Aliter.

Idem etiam analytice oſtenditur de ſolido rotatione genito hoc modo. Sit $AP = x$, $PM = y$ & ratio radii ad peripheriam circuli $= r : p$; erit ſolidum rotatione genitum $= \int py^2 dx : 2r$ (§. 197 *Anal. infin.*). Sit jam in L centrum gravitatis & $QL = PS$ diſtantia ejus ab axe AB; erit peripheria circuli radio PS deſcripti via rotationis centri gravitatis. Quare cum ſit $PS = \frac{1}{2}\int y^2 dx : \int y dx$ (§. 189); erit via rotationis centri gravitatis $= p\int y^2 dx : 2r\int y dx$. Quare ſi in hanc viam ducatur planum generans $\int y dx$; erit ſolidum rotatione genitum $= p\int y^2 dx : 2r$, ut ante.

COROLLARIUM 1.

Tab. II. Fig. 19.

194. Hinc cum parallelogrammum ABCD deſcribatur, ſi recta AB juxta ductum alterius AC motu ſibi ſemper parallelo deſcendat (§. 102 & 233 *Geom.*) & ex cor. 2. theor. 26 (§. 215) independenter ab his conſtet, viam centri gravitatis E æqualem eſſe rectæ FE ad CD perpendiculari, hoc eſt, altitudini parallelogrammi (§. 217 *Geom.*); area ejusdem æquatur facto ex baſi CD ſeu linea deſcribente in altitudinem EF.

SCHOLION 1.

195. *Hæc conſona ſunt iis, quæ de parallelogrammorum areis inveſtigandis demonſtrata ſunt in Geometria* (§. 370. 375. 387 Geom.

COROLLARIUM 2.

196. Eodem modo liquet, omnium corporum, quæ a figura plana quacunque juxta ductum alicujus rectæ AC deſcendit, ſoliditatem haberi, ſi planum deſcribens per altitudinem multiplicetur.

SCHOLION 2.

197. *Hæc denuo conſentiunt cum iis, quæ de priſmatis & cylindris dimetiendis in Geometria demonſtrata ſunt* (§. 539 & 541 Geom.)

COROLLARIUM 3.

Tab. II. Fig. 20.

198. Cum circulus deſcribatur, ſi radius CL circa centrum C rotetur (§. 131 *Geom.*); centrum vero gravitatis radii CL ſit in medio F (§. 141); via centri gravitatis eſt peripheria circuli radio ſubduplo deſcripta, conſequenter area circuli æquatur facto ex radio CL in peripheriam radio ſubduplo CF deſcriptam.

SCHOLION 3.

199. *Hæc iis conſentanea eſſe, quæ in Geometria de circulo demonſtrata ſunt* (§. 410 Geom.), *ſtatim patet conſideranti, quod peripheria radio ſubduplo deſcripta ſit peripheria integro deſcripta dimidia* (§. 412 Geom.)

COROLLARIUM 4.

Tab. II. Fig. 21.

200. Si rectangulum ABCD circa axem AD rotetur, ipſum quidem cylindrum, latus vero BC cylindri ſuperficiem deſcribit (§. 465 *Geom.*). Eſt vero centrum gravitatis rectæ BC in medio F (§. 141) & centrum gravitatis plani generantis in medio G rectæ EF; via adeo hujus eſt peripheria circuli radio EG, illius vero peripheria circuli radio EF deſcripta. Quare ſuperficies cylindri eſt factum ex altitudine BC in peripheriam

pheriam circuli radio EF deſcriptam ſive baſin, ut in Geometria demonſtravimus (*§. 516 Geom.*): ſoliditas vero cylindri eſt factum ex rectangulo generante ABCD in peripheriam circuli radio EG, qui eſt ipſius EF ſeu ſemidiametri cylindri ſubduplus, deſcriptam.

SCHOLION 4.

201. *Sit altitudo plani deſcribentis, adeoque cylindri,* $BC = a$, *ſemidiameter baſis* $DC = r$, *erit* $EG = \frac{1}{2} r$ &, *poſita ratione ſemidiametri ad peripheriam* $= 1 : m$, *peripheria radio* $\frac{1}{2} r$ *deſcripta* $= \frac{1}{2} mr$. *Ducta igitur* $\frac{1}{2} mr$ *in aream rectanguli* $AC = ar$; *erit ſoliditas cylindri* $= \frac{1}{2} mar^2$. *Eſt vero* $\frac{1}{2} mar^2 = \frac{1}{2} r. mr. a$ & $\frac{1}{2} r. mr$ *area circuli radio* DC *deſcripti. Conſtat ergo cylindrum reperiri æqualem facto ex baſi in altitudinem, ut in Geometria* (§. 541) *demonſtratum.*

COROLLARIUM 5.

Tab. II. Fig. 15.

202. Similiter cum centrum gravitatis rectæ AB ſit in medio M (§. 141) & ſuperficies coni deſcribatur, ſi triangulum ABC circa axem AC rotetur (*§. 467 Geom.*), ſitque præterea $PM = \frac{1}{2} BC$ (§. 268 *Geom.*), ſuperficies coni æqualis eſt facto ex ejus latere AB in peripheriam radio PM, ſeu ſemidiametri baſeos BC ſubduplo deſcriptam.

SCHOLION 5.

203. *Sit* $BC = r$, $AB = a$, *ratio radii ad peripheriam* $1 : m$; *erit* $PM = \frac{1}{2} r$ & *peripheria hoc radio deſcripta* $= \frac{1}{2} mr$. *Ducta igitur* $\frac{1}{2} mr$ *in latus coni* AB, *producit ſuperficies* $\frac{1}{2} amr$. *Sed* $\frac{1}{2} amr$ *eſt etiam factum ex* $\frac{1}{2} a$ & mr. *Ergo ſuperficies coni producitur ex peripheria baſeos in latus dimidium, ut in Geometria (§. 519) demonſtratum.*

COROLLARIUM 6.

204. Si triangulum ACB circa axem AB rotetur, conum deſcribit (§. 467 *Geom.*). Sed ſi CB diviſa bifariam in D ducatur recta AD, fiatque $AO = \frac{2}{3} AD$; erit in O centrum gravitatis (§. 158). Æquatur ergo coni ſoliditas facto ex triangulo CAB in peripheriam radio PO deſcriptam (*§. 191*). Eſt vero $AD : AO = DB : OP$ (§. 268 *Geom.*). Sed $AO = \frac{2}{3} AD$ & $DB = \frac{1}{2} CB$ *per demonſtr.* Ergo $OP = \frac{2}{3} DB = \frac{1}{3} CB$.

Tab. II. Fig. 22.

SCHOLION 6.

205. *Sit* $CB = r$, $AB = a$, *ratio radii ad peripheriam* $= 1 : m$; *erit* $OP = \frac{1}{3} r$, *peripheria hoc radio deſcripta* $\frac{1}{3} mr$, $\Delta\, ACB = \frac{1}{2} ar$, *adeoque ſoliditas coni* $\frac{1}{3} mr. \frac{1}{2} ar = \frac{1}{6} amr^2$. *Eſt vero etiam* $\frac{1}{6} amr^2 = \frac{1}{2} r. mr. \frac{1}{3} a$, *ſeu factum ex baſi coni in tertiam altitudinis partem, ut in Geometria aliunde demonſtratum* (§. 548 Geom.).

SCHOLION 7.

206. *Elegans hoc theorema, quod inter præcipua ſeculi ſuperioris in Geometria inventa referri ſolet, jam olim* Pappus *commemoravit* (1); *ſed* Paulus Guldinus, *e Societate Jeſu, expreſſius plurimorum exemplorum inductione oſten-*

(1) Sub finem præfat. ad lib. 7. Collect. Mathem.

ſtendit (m). Uſi ſunt eodem Geometræ, præſertim ante inventum a Leibnitio calculum ſummatorium, cum Guldino, quemadmodum indicaverat Pappus, in dimetiendis ſolidis & ſuperficiebus motu rotationis circa axem fixum genitis: ſed idem uſum habere adhuc poteſt in quibusdam caſibus, ubi calculi ſummatorii ope idem difficilius præſtaretur. Ego in tyronum gratiam exemplis tritis regulam illuſtrare volui, ut vim ejus tanto facilius animo comprehenderent, ſimulque oſtendi, eidem locum eſſe, ſi magnitudines alio, quam rotationis motu generentur, quemadmodum fieri poſſe a Guldino etiam annotatum reperio (n): unde nec cum Pappo ad ſolum rotationis motum theorema reſtrinxi. Illuſtris Leibnitius (o) invenit, ſuccedere quoque negotium, ſi axis vel centrum continuo mutetur, durante motu generante.

CAPUT IV.
DE
QUIETE ET LAPSU CORPORUM GRAVIUM.

DEFINITIO 25.

207. *Linea horizontalis vera* eſt, cujus ſingula puncta a centro telluris æqualiter diſtant.

COROLLARIUM.

208. Linea horizontalis eſt arcus circuli ex centro circuli per punctum datum deſcriptus (§. 37. 41 *Geom.*).

DEFINITIO 26.

Tab. II. Fig. 20.
209. *Linea horizontalis apparens* BD eſt recta, quæ veram in dato puncto A tangit.

COROLLARIUM.

210. Eſt adeo ad ſemidiametrum telluris in puncto contactus A perpendicularis (§. 304 *Geom.*).

DEFINITIO 27.

211. *Lapſus* eſt mutatio ſitus vi gravitatis.

THEOREMA 26.

212. *Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur, linea directionis eorundem ad lineam horizontalem eſt perpendicularis & contra.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur, linea directio- Tab. II. Fig. 20.

(m) Lib. 2. & 3 de centro gravitatis.
(n) Lib. 2. c. 8. prop. 3. f. 147.
(o) In Actis Erudit. A. 1695 p. 493.

rectionis eorundem ſemidiametro telluris in directum jacet (§. 17). Ergo ad lineam horizontalem tam veram (§. 209 *Mech.*& §. 38 *Anal. infin.*), quam apparentem perpendicularis (§. 209). *Quod erat unum.*

II. Si linea directionis gravium ad horizontalem perpendicularis; ſemidiametro telluris in directum jacet (§. 206). Continuata igitur in centrum telluris incidit (§. 470 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

213. Cum terra ſit propemodum ſphærica, ut in Geographia demonſtratur, ingentes marium tractus, immo omnium fluidorum tractuumque terreſtrium æquabilium ſuperficies in omnibus ſuis punctis a centro telluris æqualiter abſunt (§. 471 *Geom.*). Quare cum experientia conſtet, gravia per lineas perpendiculares ad ſuperficiem aquarum deſcendere; gravia niti verſus centrum Telluris inde evincitur.

SCHOLION.

214. *Quodſi terra figura non ſit perfecte ſpharica, ex deſcenſu perpendiculari gravium concludi nequit, quod verſus centrum illius nitantur: cum in ſolo circulo, cujus rotatione ſphara generatur, normales ad peripheriam in centro concurrant* (§. 18 Analyſ. infinit.). *Sed ſuo loco, ubi de figura Telluris agemus, patebit, utique aſſumi poſſe citra erroris aſſignabilis periculum, gravia niti verſus centrum terra. Immo in ſtaticis ſufficit, deſcenſum perpendicularem ad libellam aquarum experientia conſtare.*

COROLLARIUM 2.

215. Quoniam pro corpore gravi, ſalva gravitate, ſolum gravitatis centrum ſubſtitui poteſt (§. 125); linea directionis corporis gravis eſt recta ex centro gravitatis ad lineam horizontalem ſive apparentem, ſive veram perpendicularis.

PROBLEMA 39.

216. *Data ſemidiametro Telluris* AC *vel* LC *una cum longitudine lineæ horizontalis apparentis* AD, *determinare diſtantiam puncti extremi* D *a linea horizontali vera* AL. Tab. II. Fig. 20.

RESOLUTIO.

1. Quadrato ſemidiametri Telluris AC addatur quadratum lineæ horizontalis apparentis AD.
2. Ex aggregato extrahatur radix, quæ erit recta AD (§. 417 *Geom.*).
3. Inde ſubtrahatur ſemidiameter CL: quod relinquitur, eſt diſtantia lineæ horizontalis apparentis a vera DL.

E. gr. Ponamus ſemidiametrum telluris, qualis vulgo ſtatuitur, 860 milliarium Germanicorum & AD unius milliaris: erit

$AC^2 = 739600$
$AD^2 = \quad 1$

$DC^2 = 739601$
Unde $DC = 860{,}00057$
$CL = 860$

$LD = 0{,}00057$ ſeu $\frac{57}{100000}$

Aliter.

Quoniam $GD : AD = AD : DL$ (§. 334 *Geom.*); erit $DL = AD^2 : GD$ (§. 302 *Arithm.*). Eſt vero DL ipſius GL ſeu diametri telluris particula admodum exigua, quippe in diſtantia milliaris demum $\frac{57}{100000}$ unius milliaris, ſeu $\frac{57}{172000000}$ diametri telluris. Quamobrem $AD^2 : GL$ ſenſibiliter non differt a $AD^2 : GD$. Ut itaque habeatur DL, quadratum lineæ horizontalis apparentis AD dividatur per diametrum Telluris GL.

E. gr. Sit AD 900 pedum Pariſinorum ſeu 129600 linearum (pes enim Pariſinus continet 12 digitos, digitus 12 lineas), diameter Telluris juxta *Picardum* (p) 39231564 pedum pariſinorum ſeu linearum 5649345216. Quodſi ergo $AD^2 = 16796190000$ per $GL = 5649345216$ dividas, prodibit DL fere 3 linearum.

SCHOLION.

217. *Hac poſteriore methodo* Picardus (q) *tabulam conſtruxit, quam huc transferre in uſum futurum libuit. Continet autem columna prima longitudinem lineæ horizontalis apparentis* AD *in pedibus pariſinis; altera puncti extremi* D *altitudinem* DL *ſupra lineam horizontalem veram* AL.

AD	DL	AD	DL
300ped.	0.dig. $0\frac{1}{3}$ lin.	3300ped.	3 dig. 6 lin.
600	$1\frac{1}{3}$	3600	4 0
900	3	3900	4. 8
1200	$5\frac{1}{3}$	4200	5. 4
1500	$8\frac{1}{3}$	4500	6. 3
1800	1. 0	4800	7. 1
2400	1. $9\frac{1}{3}$	5400	8. 11
2700	2. 3	5700	10. 0
3000	2. 9	6000	11. 0

COROLLARIUM.

218. Si linea horizontalis apparens AD 300 pedes non excedit; citra errorem ſenſibilem pro vera aſſumi, conſequenter etiam planum aliquod pro horizontali haberi poteſt.

PROBLEMA 40.

219. *Explorare, utrum planum aliquod propoſitum ſit horizontale, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Ex trabeculis ligneis conſtruatur triangulum æquicrurum FCG, Tab. II. Fig. 28.

(p) Traité du Nivellement p. 196.
(q) loc. cit. c. 1. p. 7.

FCG, continuatis cruribus in A & B, quo longius, eo melius.

2. Ex vertice C ſuſpendatur globus plumbeus D & baſis trianguli FG dividatur bifariam in E.

3. Libella ſic conſtructa collocetur ſuper plano dato, ita ut cruribus ſuis AC & CB eidem inſiſtat.

Dico, ſi filum CD tranſeat per punctum medium E, planum eſſe horizontale.

DEMONSTRATIO.

Quia globus plumbeus D filum CD gravitate ſua extendit; pro linea directionis recte habetur (§. 19). Quodſi ergo FG bifariam ſecet in E; erit ad FG perpendicularis (§. 184 *Geom.*) Quoniam vero AC=CB *per conſtruct.* adeoque AC:CB = CF:FG; erit $x = o$ (§. 207 *Geom.*), conſequenter AB ipſi FG parallela (§. 255 *Geom.*) & CD etiam ad AB (§. 230 *Geom.*), hoc eſt, linea directionis globi ad planum, cui libella inſiſtit, perpendicularis. Planum adeo horizontale eſt (§. 212).

SCHOLION.

220. *Figura inſtrumenti variis modis mutari ſolet, eodem tamen ſemper manente fundamento. Quemadmodum vero ad praxes ſtaticas plerumque ſufficit; ita inferius artem libellandi expoſituri alia libellarum genera hac accuratiora deſcribemus, quarum beneficio linea horizontalis per tractus ampliſſimos continuatur.*

DEFINITIO 28.

221. Per *Baſin corporis gravis* intelligo figuram, in cujus perimetro circumcirca terminantur partes incumbentes aut fulcra, quibus ipſæ incumbunt. Tab. II. Fig. 20.

E. gr. Incumbat corpus grave duobus fulcris quadrangularibus CD & EF; figura CDEF dicetur baſis ejus.

THEOREMA 27.

222. *Si linea directionis corporis gravis intra baſin cadit, nec corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere ſatis incurvatur: corpus in ſitu ſuo acquieſcit: ſin illa extra baſin cadit vel corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere ſatis incurvatur, in eam labitur partem, verſus quam cadit centrum gravitatis.*

DEMONSTRATIO.

I. Incumbat corpus GB plano cuidam alteri firmo ac ſtabili AF EB, ſitque linea directionis CD. Cum hæc ex centro gravitatis C educatur (§. 215); centrum gravitatis deſcendere nititur per rectam CD (§. 19). Sed juxta eandem ipſi renititur corpus, cui incumbit, idque ſatis firmum ac ſtabile, ut cedere neſciat, *per hypoth.* deſcenſus adeo centri gravitatis Tab. II. Fig. 25.

impeditur (§ 75) adeoque corpus quieſcit (§. 123). *Quod erat unum.*

Tab. II. Fig. 24. II. Incumbant extrema alicujus corporis duobus fulcris FE & DC, & linea directionis IL intra baſin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur (§. 215); centrum gravitatis per rectam IL deſcendere nititur (§. 19). Sed corpus proprio pondere eousque incurvari nequit, ut a fulcris recedant ejus extrema, *per hypotheſ.* Ergo centrum gravitatis impeditur, quo minus deſcendat, conſequenter corpus in hoc ſitu acquieſcit (§. 123). *Quod erat ſecundum.*

Tab. II. Fig. 26. III. Cadat linea directionis CM corporis IL extra baſin. Cum centrum gravitatis ſit I (§. 215); id ſecundum rectam CM deſcendere nititur (§. 19). Quare cum nihil ſecundum eandem directionem ipſi reſiſtat; actu deſcendet, adeoque corpus labitur in eam partem, verſus quam cadit centrum gravitatis (§. 211). *Quod erat tertium.*

Tab. II. Fig. 24. IV. Denique corpus grave duobus fulcris EF & DC ita incumbat, ut linea directionis IL intra baſin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur; centrum gravitatis per rectam IL deſcendere nititur, Quare cum corpus proprio pondere eo usque incurvari poſſit, ut a fulcris recedat, *per hypoth.* centrum gravitatis actu deſcendit, adeoque corpus labitur in eam partem, verſus quam linea directionis cadit (§. 211). *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM.

223. Quo major itaque vis requiritur, ut linea directionis extra baſin emoveatur, conſequenter, quo longius ea diſtat a perimetro baſis; eo firmius corpus in loco ſuo conſiſtit.

PROBLEMA 41.

224. *Invenire, utrum corpus grave in dato ſitu extra lapſus periculum conſtituatur, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis corporis gravis (§. 186).
2. Ex eo demittatur perpendicularis in lineam horizontalem apparentem, juxta probl. 40 (§. 219), ſi opus ſit determinandam: quæ erit linea directionis (§. 215).

Quodſi perpendiculum intra baſin corporis cadit, extra lapſus periculum conſtituitur; ſin minus, certo ruet in eam partem, verſus quam perpendiculum cadit (§. 222).

SCHOLION 1.

225. *Hinc ratio apparet, cur turres in-*

inclinata Bononienſis & Piſana *non corruant, etſi illa anno* 1110 *excitata ad altitudinem pedum* 130 *aſſurgat & perpendiculum a baſi intervallo 9 pedum recedat, hæc vero anno* 1173 *exſtructa altitudinem habeat cubitorum* 78 *& intervallum inter baſin atque perpendiculum cubitorum* $7\frac{1}{3}$ *admittat: id quod expreſſius oſtendit* Paulus Caſatus (r).

SCHOLION 2.

226. *Idem problema motibus animalium explicandis inſervit: qualia inprimis dedit* Joannes Alphonſus Borellus (s). E. gr. *Cum centrum gravitatis in homine inter nates & pubim exiſtat; linea directionis intra ſpatium calcaneis interjectum adeoque intra baſin cadit, quando erecto corpore utroque pede pavimento inſiſtit: quare in hoc ſitu firmiter conſiſtit. Enimvero ſi pes alteruter elevetur, baſis definietur ſpatio, quod pes unus occupat* (§. 221). *Cadit adeo linea directionis extra baſin, nempe verſus dexteram, ſi pes dexter elevetur, conſequenter homo ſuper ſolo pede ſiniſtro ſtare non poterit* (§. 221), *niſi corpus in latere ſiniſtro incurvet, quo linea directionis in pedem ſiniſtrum retrahatur. Enimvero talia fuſius proſequi non eſt noſtri inſtituti: apprime autem obſervanda ſunt in picturis & ſculpturis.*

SCHOLION 3.

227. *Immo hinc ratio reddi poteſt multorum in ſtructura corporis animalis occurrentium.* E. gr. *Cum homo erectus ſtare ac incedere debeat, neceſſarium utique fuit, ut planum per medium tranſiens corpus divideret ipſum in partes utrinque æquiponderantes. Unde partes geminatæ, quales ſunt aures, oculi, brachia cum manibus, crura cum pedibus, a lateribus compareant, quæ ſui ſimiles non habent, ut frons, naſus, os, mentum, pectus, venter, genitale membrum, medium tenent locum eamque habent figuram, ut in partes æquales & ſimiles, adeoque in æquiponderantes, dividi poſſint.*

DEFINITIO 29.

228. *Centrum motus* eſt punctum, circa quod grave, aut plura gravia commune centrum gravitatis habentia rotari poſſunt. Tab. II. Fig. 27.

E. gr. Si pondera P & Q rotari poſſint circa punctum N ita ut deſcendente P ipſum Q aſcendat; dicetur N centrum motus.

THEOREMA 28.

229. *Diſtantia* IN *centri gravitatis ponderis particularis a centro gravitatis communi aut centro motus* N, *ad lineam directionis* Ip *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Cum linea directionis Ip corporis p tranſeat per centrum gravitatis ipſius (§. 215) & grave eodem modo gravitet, in quocunque lineæ directionis puncto centrum gravitatis corporis exiſtat (§. 78); Tab. II. Fig. 27.

(r) Mechanic. lib. 1. c. 9. p. 50 & ſeqq.

(s) De motu Animalium c. 18 usque ad 23. p. 165 & ſeqq. conf. Caſatum Mechan. lib. 1. c. 11 p. 62 & ſeqq.

(§. 78); diſtantia centri gravitatis corporis p a centro motus vel centro gravitatis communi IN eadem eſt, quæ diſtantia ipſius N a linea directionis. Sed diſtantia ipſius N a linea directionis Ip eſt perpendicularis NI (§. 225 *Geom.*). Ergo eadem perpendicularis NI eſt diſtantia centri gravitatis corporis p a puncto N. *Q. e. d.*

PROBLEMA 42.

Tab. III. Fig. 28. 230. *Dato centro gravitatis* C *una cum pondere corporis* AB, *determinare vires in* A & B *requiſitas, ut in ſitu horizontali ſuſtentetur.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad ſummam diſtantiarum virium in A & B applicatarum a centro gravitatis corporis ſuſtentati C, pondus ejusdem G & diſtantiam vis in B applicatæ BC numerus quartus proportionalis: Dico, hunc eſſe vim in A applicandam.
2. Quare ſi is ſubtrahatur a pondere G, relinquetur vis in B applicanda.

Sit e. gr. G = 300 librarum, AC = 5′, CB = 8′: erit AC + CB = AB = 13, adeoque vis in A applicanda = G. CB: AB = 300. 8 : 13 = $184\frac{8}{13}$, conſequenter vis in B = $115\frac{5}{13}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus AB ſuſtentatur a viribus A & B *per hypoth.* neceſſe eſt ut eadem vi renitantur, quantum illud deorſum nititur (§. 75). Nititur autem corpus AB deorſum tota vi gravitatis, hoc eſt, quanta eſt ponderis G eidem æqualis & ex centro gravitatis C ſuſpenſi (§. 125). Ergo vires A & B junctim ſumtæ ponderi huic æquantur, conſequenter eorum centrum gravitatis commune in C (vi §. *cit.*). Sed cum linea AB ſit horizontalis, *per hypoth.* adeoque linea directionis GC ad eam perpendicularis (215), vires autem in A & B ſecundum eandem directionem renitantur; erunt quoque earum lineæ directionis ad AB perpendiculares & hinc a centro gravitatis communi C diſtant intervallis AC & CB (§. 229). Eſt adeo AC + CB : CB = G : A (§. 148). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

231. Corpus adeo AB gravitat in fulcra, a quibus ſuſtentatur, in ratione reciproca diſtantiarum a centro gravitatis ipſius.

SCHOLION.

232. *Ne mirentur tyrones, nos ad vires reſiſtentes quascunque & grave ſurſum urgentes ea applicare, quæ de ponderibus deorſum nitentibus demonſtrata ſunt: eodem enim manente effectu, pondera* H & I *facili negotio, ſi ita viſum fuerit, ſubſtitui poſſunt.*

PRO-

PROBLEMA 43.

Tab. II. Fig. 28. 233. *Dato centro gravitatis* F *corporis* IH *una cum gravitate ipſius determinare punctum* M, *quod ſi plano horizontali incumbat, pondus datum* G *in* L *appenſum corpus* IH *ex ſitu horizontali dimovere nequit.*

RESOLUTIO.

Concipiatur in centro gravitatis F appenſum pondus gravitati totius corporis IH æquale (§. 125) & quæratur ejusdem atque ponderis dati G centrum gravitatis commune M (§. 149). Quodſi enim punctum M plano horizontali incumbat, pondus G corpus HI e ſitu ſuo dimovere nequit (§. 124). *Q. e. i. & d.*

Sit e. gr. baculi centrum gravitatis F, ſitula aqua plena librarum 24, pondus baculi 2, LF = 18″. Reperietur LM = LF. F : (G + F) = 18. 2 : 26 = 18 : 13 = 1″ 4‴ fere. Mirum ergo non eſt (quod Statices ignari mirantur) ſitulam baculo IH ſupra menſam poſito appenſam non decidere.

PROBLEMA 44.

234. *Dato corporis* AB *centro gravitatis* C *una cum pondere ejus* G, *determinare puncta* L & M, *in quibus ſupponenda ſunt fulcra* MN & LO, *ut in data ratione premantur.* Tab. III. Fig. 28.

RESOLUTIO.

Sumantur in linea horizontali AB, quæ per centrum gravitatis C tranſit, rectæ MC & CL in data ratione. Quodſi fulcra MN & LO in punctis hac ratione determinatis ſupponas, ea premuntur in data ratione (§. 231).

COROLLARIUM.

235. Quodſi in M & L fulcrorum loco humeros aut manus ſupponant operarii; pondus portare poterunt, ſi viribus eorum proportionatum. Unde patet, quomodo onus ferendum in data ratione diſtribui poſſit.

SCHOLION.

236. *Si pondus ferendum ex longurione extra centrum gravitatis ipſius ſuſpendatur; quærendum eſt centrum gravitatis commune ponderis atque longurionis, & ſuppoſito in eodem pondere utrique æquali, reliqua peraguntur ut in reſolutione problematis. Exempla ſpecialia, quibus problemata hæc illuſtrantur, dedit* Stevinus (t).

CA-

(t) Stat. lib. 2. prop. 7. 8. Operum f. 474 & ſeqq.

CAPUT V.
DE
MOTU RECTILINEO COMPOSITO.

DEFINITIO 30.

237. *Motus ſimplex* eſt, qui a vi una efficitur.

DEFINITIO 31.

238. *Motus compoſitus* eſt, qui efficitur a viribus pluribus conſpirantibus. Dicuntur autem *vires conſpirare*, ſi directio unius non eſt oppoſita directioni alterius, veluti cum radius circuli circa centrum rotari & interea punctum per eam recta incedere concipitur.

COROLLARIUM.

239. Omnis ergo motus curvilineus eſt compoſitus (§. 74).

DEFINITIO 32.

240. *Angulus directionis* eſt, quem lineæ directionis duarum virium conſpirantium comprehendunt.

THEOREMA 29.

Tab. II. Fig. 19. 241. *Si mobile* A *duplici vi urgeatur, altera quidem ſecundum directionem* AB, *altera vero ſecundum directionem* AC, *ita ut celeritates ſint ut latera* AB *&* AC; *motu compoſito diagonalem parallelogrammi* AD *deſcribit.*

DEMONSTRATIO.

Si mobile A ſola vi ſecundum AB impreſſa moveretur, momentò primo foret in aliquo puncto rectæ AB, veluti in H, & ad rectam HL ipſi AC parallelam accederet. Si ſola vi ſecundum AC impreſſa progrederetur, eodem momento foret in aliquo puncto ipſius rectæ AC, veluti in I, & ad rectam IL ipſi AB parallelam accederet. Sed cum directiones virium ſibi non opponantur, neutra alteram impedire valet, adeoque eodem momento mobile accedet tum ad HL, tum ad IL, conſequenter erit in puncto L, ubi HL & IL concurrunt. Quoniam vero celeritates ſunt ut AB ad BD *per hypoth.* & ſpatia AH & HL eodem tempore deſcripta ut celeritates (§. 33), conſequenter AL: HL = AB : BD; erit AHL pars trianguli ABD (§. 268 *Geom.*), conſequenter AL pars diagonalis AD (§. 337 *Geom.*). Eodem modo patet, ductis KM & MG ipſis AB & AC parallelis, quod mobile momento ſecundo futurum ſit in M, tandem

demque in D. Conſtat ergo propoſitum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

242. Quodſi ergo concipiamus rectam AC motu æquabili ſibi ſemper parallelo juxta ductum alterius rectæ AB moveri ac interea punctum motu æquabili in eadem deſcendere, punctum repræſentabit corpus, quod duplici vi juxta directiones AB & AC celeritatibus, quæ ſunt ut AB & AC, movetur, adeoque motu compoſito deſcribetur triangulum ABD.

SCHOLION.

243. *Solent igitur nonnulli in demonſtrando theoremate præſente punctum in linea* AC *deſcendens, dum ipſa interea juxta ductum recta* AB *promovetur, pro corpore ſumere, quod duplici vi juxta hypotheſin theorematis movetur: id quod etiam ad juvandam imaginationem utiliter ſumi poteſt, cum ſic pateat poſſibilitas hypotheſeos intuitiva ratione.*

COROLLARIUM 2.

244. Mobile motu compoſito eodem tempore deſcribit diagonalem AD, quo motu disjuncto deſcriberet latera parallelogrammi AB & AC (§. 241).

COROLLARIUM 3.

245. Cum circa quamlibet rectam AD parallelogrammum aliquod ABDC conſtrui poſſit, conſtructis nempe triangulis æqualibus ACD & ABD tanquam ſuper baſi communi (*vi* §. 337. 205. *Geom.*); omnis motus rectilineus, ubi ad demonſtrandum utile fuerit, in compoſitum reſolvi poteſt.

COROLLARIUM 4.

246. Quoniam vero laterum AC & CD ratio varia eſſe poteſt, pro diverſitate angulorum CAD & DAB, motu quoque variis modis compoſito eadem recta AD deſcribi (§. 245), adeoque & idem motus rectilineus in varios compoſitos reſolvi poteſt.

THEOREMA 30.

247. *In motu compoſito uniformi velocitas a viribus conſpirantibus producta eſt ad velocitatem alterutrius, ut diagonalis* AD *parallelogrammi* ABDC, *juxta cujus latera agunt ſeparatæ, ad latus alterutrum* AB *vel* AC.

DEMONSTRATIO.

Eodem enim tempore, dum vis una conficit latus parallelogrammi AB & altera AC ſigillatim, conjunctæ conficiunt diagonalem AD (§. 241). Eſt ergo diagonalis AD ſpatium a viribus conſpirantibus dato tempore deſcriptum (§. 12). Sed in motu uniformi celeritates in eodem tempore ſunt ut ſpatia (§. 33). Eſt ergo celeritas a viribus conſpirantibus orta ad celeritatem a vi alterutra ortam ut AD ad AB vel AC. *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 19.

COROLLARIUM 1.

248. Datis itaque viribus conſpirantibus, hoc eſt, data celeritatum ratione per rectas AB & AC magnitudine datas, & directione per eaſdem rectas poſitione

ne datas, aut per angulum directionis, datur motus obliqui celeritas & directio, quia diagonalis & magnitudine & poſitione datur (§. 339. & ſeqq. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

249. Non tamen vice verſa motu obliquo dato dantur ſimplices, quia idem ex diverſis ſimplicibus componi poteſt (§. 245.).

COROLLARIUM 3.

250. Motus adeo ſimplex per diagonalem AD celeritate ut AD æquipollet motibus per latera AB & AC celeritatibus ut AB & AC conjunctis, hoc eſt, perinde eſt, ſive mobile juxta directionem AD celeritate ut AD, ſive ſimul juxta directiones AB & AC celeritatibus ut AB & AC moveatur (§. 241. 246).

THEOREMA 31.

Tab. III. Fig. 30. 251. *In motu compoſito ab iiſdem viribus producto major eſt velocitas, ſi angulus directionis minor: illa autem minor, ſi hic major.*

DEMONSTRATIO.

Sit angulus directionis major BAC, minor FAC. Quoniam vires eædem ſunt *per hypoth.* erit AC utrique parallelogrammo AFCE & BACD communis, & præterea AB = AF. Evidens eſt in hypotheſi anguli majoris deſcribi diagonalem AD, in hypotheſi minoris vero ipſam AE & quidem eodem tempore ob AB = AF, (§. 244). Sunt igitur celeritates ut AD ad AE (§. 33). Quare cum AD < AE; velocitas in hypotheſi anguli majoris minor eſt, quam in hypotheſi minoris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Cum datis cruribus AC & CE cum angulo intercepto ACE, angulus CEA (§. 40. *Trigon.*) & inde porro AE (§. 36. *Trig.*) reperiatur; data virium conſpirantium celeritate & angulo directionis in caſu quocunque ſpeciali celeritas motus compoſiti inveniri; conſequenter ratio celeritatum ab iiſdem viribus ſub diverſis directionum angulis productarum definiri poteſt.

THEOREMA 32.

253. *Si mobile a duabus viribus ſecundum directiones* AB *&* AC *trahitur, quæ æquipollent tertiæ trahenti ſecundum directionem* AD, *erunt ſollicitationes ad motum inter ſe reciproce ut ſinus angulorum, quos lineæ directionis* BA *&* AC *cum linea directionis tertiæ* AD *comprehendunt, & alterutra earum erit ad ſollicitationem a media pendentem ut ſinus anguli, quem linea directionis alterius cum linea directionis tertiæ comprehendit ad ſinum anguli* BAC. Tab. II. Fig. 29.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BD ipſi AC & DC ipſi AB parallela (§. 258. *Geom.*); erit angulus BDA = DAC & ADC = BAD (§. 255. *Geom.*), ac BADC pa-

parallelogrammum (§. 102. *Geom.*). Quoniam vires ſecundum directiones AB & AC trahentes in ſollicitando mobili ad motum, ſeu quatenus mobile ad motum urgent (§. 110), æquipollent vi mobile ſecundum directionem AD trahenti *per hypoth.* ſollicitationes laterales ſunt ut AB & BD = AC (§. 335. *Geom.*), media vero ſollicitatio ut AD (§. 250). Erunt igitur (§. 33. *Trigon.*) laterales ut ſinus angulorum BDA & BAD, & lateralis ſecundum directionem AB trahens ad mediam ſecundum directionem AD trahentem ut ſinus anguli BDA ſeu DAC ad ſinum anguli ABD ſeu BAC (§. 233. *Geom.* & §. 5. *Trigon.*), lateralis vero agentis ſecundum directionem AC ſive BD ut ſinus anguli BAD ad ſinum anguli BAC. *Q. e. d.*

SCHOLION.

254. *Sollicitationes ſunt in ratione compoſita maſſarum & celeritatum initialium* (§. 110. 22), *conſequenter celeritatum in motu æquabili; ubi c eſt ut* dc. *Rectæ, per quas exponuntur motus in reſolutione compoſiti in ſimplices, ſunt ut celeritates* (§. 250). *Quare ſi per eas exponuntur ſollicitationes, maſſa corporum, in quibus concipiuntur vires, ſupponenda ſunt æquales* (§. 281. Arithm.) *id quod ſemper facere licet, cum corpori cuicunque data celeritate lato, vel data celeritate initiali inſtructo, dari poſſit aliud eidem in ſollicitatione ad motum æquivalens, quod habet maſſam datam* (§. 146), *quia celeritates initiales ſunt ut diſtantiæ a centro motus. Atque hæc ratio eſt, cur in præſente tractatione præciſa maſſa corporum ea conſideramus inſtar punctorum, in quibus non ſpectatur niſi celeritas initialis.*

DEFINITIO 33.

255. Per *Tendentiam* intelligimus rectam velocitatis & directionis repræſentatricem. Et *Tendentia media* vocatur, quæ in motu compoſito pluribus datis ſimul ſubſtitui poteſt.

PROBLEMA 42.

256. *Si mobile* A *urgetur ſecundum directiones* BA, CA, DA, EA *celeritatibus ut* AB, AC, AD, AE, *determinare directionem & celeritatem mobilis in motu compoſito, qui ex ſimplicibus iſtis reſultat,* ſeu, *datis quotcunque tendentiis* AB, AC, AD, AE, *invenire mediam* AK. Tab. XIII. Fig. 128.

RESOLUTIO.

1. Per Centrum gravitatis commune G omnium punctorum B, C, D, E, in quibus terminantur tendentiæ mediæ, ducatur recta AK indefinita ex centro mobilis A.

2. In hanc ex A transferatur AG to-

toties, quod ſunt tendentiæ datæ.

Dico AK fore tendentiam mediam.

DEMONSTRATIO.

Ducatur per centrum mobilis A recta RS & ex ſingulis punctis B, C, D, E atque G demittantur in eam perpendiculares Bb, Cc, Dd, Ee, Gg: tendentiæ BA æquivalebunt laterales Bb & bA, ſecundæ CA laterales cC & cA, tertiæ DA laterales Dd & dA, quartæ EA laterales Ee & eA (§. 250, 255). Jam cum directiones Bb, Cc, Dd & Ee ſibi mutuo non ſint contrariæ, tendentiæ cognomines in determinanda media ſunt attendendæ: ex adverſo cum directiones bA & cA ſint contrariæ directionibus Ad & Ae, ſintque velocitates verſus partem S majores velocitatibus verſus partem R *per hypoth.* exceſſus tendentiarum verſus S ſupra tendentias verſus R attendendus erit in media determinanda. Jam ſi parallelogrammum AgGH compleatur; tendentiæ perpendiculares Bb, Cc, Dd & Ee æquivalebunt mediæ 4 AH & exceſſus contrariarum fortiorum ſupra debiliores Ae + Ad − Ab − Ac æquivalet tendentiæ mediæ parallelæ 4HG (§. 156) ob rationem paulo ante datam (§. 254). Enimvero ſi AH continuetur in I, donec fiat AI = 4 AH & ducatur IK parallela ipſi HG, erit etiam IK = 4 HG & AK = 4 AG (§. 268. *Geom.*). Quare cum tendentiæ laterales AI & IK æquipolleant diagonali AK (§. 250); tendentiæ quoque BA, CA, DA & EA tendentiæ AK æquipollent, adeoque ipſa AK media eſt (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

257. *Ex demonſtratione adeo problematis præſentis patet, ſi mobile ad motum urgeatur viribus* B, C, D *&* E *eo modo, ut, ſi* B *ſola ageret, mobile* A *progrederetur ſecundum directionem* AB *celeritate ut* AB; *ſi ſola* C *ipſum impelleret, ſecundum directionem* AC *celeritate ut* AC; *ſi ſola vis* D *mobile urgeret, ſecundum directionem* AD *celeritate ut* AD, *ſi denique ſola vis* E *mobile* A *ad motum concitaret, ſecundum directionem* AE *celeritate ut* AE; *idem mobile* A *viribus* B, C, D, E *una agentibus moveri ſecundum directionem* AK *celeritate ut* AK. *Patet vero eodem prorſus modo tendentiam mediam determinari, ſi plures quotcunque dentur. Opus autem eſt in demonſtratione reſolutione tendentiarum datarum in alias laterales eidem æquipollentes, ut demonſtrari poſſit,* AK *eſſe directionem tendentiæ mediæ: quod enim celeritas ſit ut* 4 AH *abſque ea patet* (§. 156).

CA-

CAPUT VI.
DE
DESCENSU GRAVIUM IN PLANO INCLINATO.

DEFINITIO 34.

258. *Planum inclinatum* eſt, quod cum horizontali efficit angulum obliquum.

DEFINITIO 35.

259. *Gravitatem abſolutam* voco, qua corpus deſcendit libere in medio non reſiſtente, ſeu in deſcenſu libero ad motum ſollicitatur.

DEFINITIO 36.

260. *Gravitatem reſpectivam* appello, qua corpus deſcendit, parte aliqua ad ſuperandam reſiſtentiam impenſa, ſeu qua in deſcenſu per reſiſtentiam impedito ad motum ſollicitatur. Talis eſt, qua deſcendit in plano inclinato, ubi pars aliqua ad reſiſtentiam plani vincendam impenditur, ſeu qua ad motum ſollicitatur ſuper plano inclinato.

THEOREMA 33.

Tab. III. Fig. 31. 261. *Si grave in plano inclinato conſiſtit, gravitas reſpectiva eſt ad gravitatem abſolutam ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB.

DEMONSTRATIO.

Sit CB linea horizontalis. Cum globus D ſecundum directionem AC deſcendere nitatur in plano inclinato, libere autem deſcenderet per rectam DH ad horizontalem CB perpendicularem (§. 212); ſi erigatur in D perpendicularis ad AC & ducatur GF ipſi AC parallela occurrens ipſi DH in F, exponet DF gravitatem abſolutam, DG vero partem, qua reſiſtentiam plani vincit, & FG gravitatem reſpectivam (§. 250). Quodſi parallelogrammum DGFE compleatur; erit EF = DG & FE = ED (§. 335 *Geom.*). Eſt igitur gravitas abſoluta ad reſpectivam ut DF ad FG ſive DE. Enimvero cum DH & AB ad eandem CB perpendiculares exiſtant *per hypoth.* inter ſe parallelæ ſunt (§. 206 *Geom.*), adeoque anguli EDF & CAB æquales (§. 233 *Geom.*). Quoniam vero præterea anguli E & B recti ſunt, *per hypoth.* erit DF : DE = CA : AB (§. 267 *Geom.*). Quare gravitas abſoluta ad reſpectivam

vam ut CA ad AB (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

262. Cum adeo globus D ſuper plano inclinato gravitate tantum reſpectiva gravitet, pondus L juxta directionem longitudini plani parallelam DA trahens eum retinebit, ſi fuerit ad ipſum in ratione altitudinis AB ad longitudinem plani AC.

COROLLARIUM 2.

263. Quodſi longitudo plani CA ſumatur pro ſinu toto, erit AB ſinus anguli inclinationis ACB (§. 3 *Trigon.*). Eſt igitur gravitas abſoluta ad reſpectivam ponderis ſuper plano inclinato, adeoque etiam pondus D ad pondus L juxta directionem DA ipſum ſuſtentans, ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM 3.

264. Hinc gravitates reſpectivæ ejusdem corporis ſuper diverſis planis inclinatis ſunt inter ſe ut ſinus anguli inclinationis. Eſt enim ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis plani unius, ita gravitas abſoluta ad reſpectivam ſuper eodem (§ 263) & ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis plani alterius, ita eadem gravitas abſoluta ad reſpectivam ſuper hoc plano (§. *cit.*). Quare ut ſinus anguli inclinationis planorum, ita ſunt gravitates reſpectivæ ejusdem corporis ſuper iisdem (§. 196 *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

265. Major ergo gravitas reſpectiva, quo major angulus inclinationis; minor itidem illa eſt, quo minor hic exiſtit: cum creſcentibus angulis creſcant, decreſcentibus decreſcant ſinus (§. 58. 301 *Geom.* & §. 2 *Trigon.*).

COROLLARIUM 5.

266. Sicut itaque in plano verticali, ubi inclinatio maxima, nempe perpendicularis, gravitas reſpectiva degenerat in abſolutam; ita in plano horizontali, ubi nulla inclinatio, gravitas reſpectiva prorſus exſpirat, hoc eſt, grave ſecundum longitudinem plani nullum niſum exercet.

COROLLARIUM 6.

267. In plano igitur verticali vis motum impediens ipſi æqualis eſt: in plano horizontali ad grave retinendum vi nulla opus.

PROBLEMA 43.

268. *Invenire ſinum anguli inclinationis plani, ſuper quo data vi pondus datum ſuſtentari poſſit.* Tab. III. Fig. 31.

RESOLUTIO.

Fiat ut pondus datum D ad vim datam L, ita ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis plani (§. 262).

E gr. Sit pondus 1000, vis 50 librarum: reperietur angulus inclinationis 2° 52′

Log. 1000 = 30000000
Log. 50 = 16989700
Log. Sin. tot. 100000000

Log. Sin. inclin. = 8. 6989700, cui in tabulis quam proxime reſpondent 2° 52′.

THEOREMA 34.

Tab. III. Fig. 31. 269. *Si pondus L juxta directionem perpendicularem AB deſcendit & pondus D juxta directionem plano inclinato parallelam attollit; altitudo aſcenſus ponderis D eſt ad altitudinem deſcenſus alterius L ut ſinus anguli inclinationis C ad ſinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Aſcendat enim pondus D ex C usque in D, erit altitudo, ad quam aſcendit, DH. Sed cum pondus L in plano perpendiculari deſcendat, *per hypoth.* erit altitudo, per quam ipſum deſcendit, ipſi CD æqualis. Altitudo igitur aſcenſus ponderis D eſt ad altitudinem deſcenſus alterius L ut DH ad CD. Enimvero ſi CD ſumatur pro ſinu toto, DH eſt ſinus anguli inclinationis C (*§. 2 Trigon.*). Sunt ergo altitudines prædictæ ut ſinus anguli inclinationis & ſinus totus. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

270. Eſt igitur altitudo deſcenſus CD ponderis L ad altitudinem aſcenſus DH ponderis D ut reciproce pondus D ad pondus L ipſi æquiponderans (§. 262).

COROLLARIUM 2.

271. Quare cum ſit CD. L = DH. D (*§. 297 Arithm.*) & niſus atque reniſus æquiponderantium D & L æquales ſint (§. 75): momenta ponderum D & L ſunt in ratione compoſita maſſarum & altitudinum, per quam in plano ſive inclinato, ſive perpendiculari vel aſcendunt, vel deſcendunt (§. 159 *Arithm.*).

THEOREMA 35.

272. *Si pondera E & D trahentia rectam AB habeant centrum gravitatis commune in C; erunt ea inter ſe in ratione reciproca diſtantiarum* CH & CI, *nempe* E : D = CI : CH. Tab. XIII. Fig. 129. n. 1 2

DEMONSTRATIO.

Ducantur BF & AG ad rectam AB perpendiculares & ex centris gravitatis ponderum D & E rectæ EG & DF ipſi AB parallelæ. Quoniam pondera D & E non aliter trahunt rectam AB ac ſi planis inclinatis BD & AE incumberent; perinde erit ac ſi in B ſuſpenderetur pondus juxta directionem perpendicularem BF, quod eſt ad D ut BF ad BD, & in A ſuſpenderetur pondus juxta directionem perpendicularem AG, quod eſt ad E ut AG ad AE (§. 261). Sit pondus prius P; alterum Q: erit P : D = BF : BD & Q : E = AG : AE. Enimvero propter paralleliſmum linearum GE & DF atque AB angulus GEA = HAC & FDB = ABD (§. 233 *Geom.*). Quare cum præterea anguli G & H, itemque F & I ſint recti *per conſtruct.* erit BF : BD = CI : CB & AG:

AG : AE = CH : CA (§. 267 *Geom.*), conſequenter P : D = CI : CB & Q : E = CH : CA (§. 167 *Arithm.*). Jam cum pondera P & Q juxta directionem perpendicularem ſint in æquilibrio *per demonſtr.* erit P : Q = AC : CB (§. 144), conſequenter P : E = CH : CB (§. 198 *Arithm.*) & hinc tandem D : E = CH : CI (§. 200 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

273. Quoniam pondera D & E ſibi invicem æquilibrantur, ſi ſub obliqua quacunque directione rationem reciprocam diſtantiarum habuerint, hoc eſt, ſi D : E = CH : CI (§. 272), eſt vero E. CH = D. CI (§. 297 *Arithm.*); vires æquiponderantium etiam ſub directionibus obliquis æſtimandæ ſunt per factum ex maſſa in diſtantiam a centro gravitatis.

COROLLARIUM 2.

Tab. II. Fig. 27. 274. Si pondera ſive ex centro gravitatis communi, ſive ex alio quocunque extra illud poſito ſuſpendantur; momenta ſunt in ratione compoſita maſſarum & diſtantiarum a puncto ſuſpenſionis N, nempe in eo ſitu, quo centrum gravitatis ipſius P deſcendit per altitudinem IK & centrum gravitatis alterius ponderis Q aſcendit per altitudinem OH, ut Q ON & P. IN (§ 146. 271. 133). Sed cum verticales ad N ſint æquales (§. 156 *Geom.*) & lineæ directionum KI & HO ſint ad horizontalem LM in O & I perpendiculares (§. 215); ON : NI = HO : IK (§. 267 *Geom.*). Quare momenta ponderum Q & P ſunt etiam ut Q. HO & P. IK, hoc eſt, in ratione compoſita maſſarum & altitudinum, per quas perpendiculariter centrum gravitatis vel aſcendit, vel deſcendit. Superior igitur (§. 146. 273) conſtituta virium æſtimatio cum præſente conſentit.

COROLLARIUM 3.

275. Vires adeo æquales ſunt, quæ pondera elevant per altitudines ipſis reciproce proportionales.

SCHOLION 1.

276. *Hoc principium ad demonſtrandas machinarum vires ſine demonſtratione aſſumit* Carteſius (u). *Ait enim,* quod iisdem viribus, quibus pondus v. gr. 100 librarum in duorum pedum altitudinem attolli poteſt, aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem poſſit elevari.

SCHOLION 2.

277. *Hinc etiam ratio patet, cur currus onuſtus difficilius trahatur ſuper plano inclinato, quam ſuper horizontali: gravatur nimirum ea ponderis parte, quæ eſt ad pondus totum ipſius in ratione altitudinis ad longitudinem plani. Ex quo etiam intelligitur, cur idem difficilius trahatur in via lutoſa & arenoſa. Ceterum in praxi ratio longitudinis plani ad altitudinem facile definitur. Si* Tab. *enim recta* FD *ſit longitudini plani* AC III. *parallela, hoc eſt, linea directionis currus,* Fig. *atque* FC *altitudini* CD *parallela ope* 32. *perpendiculi definiatur, & ex* C *ducatur per-*

(u) In Tract. de Mechanica (qui inter poſthuma habetur) p. 13.

perpendicularis ad DC, *erit* $y = o$ & $o = x$ (*§.* 233 Geom.) *hincque* $y = x$. *Quare, ob rectos* D & B, FC : FD = EA : EB (§. 267 Geom.).

THEOREMA 36.

278. *Vires mortuæ ſunt in ratione compoſita maſſarum & velocitatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires æquiponderantium cum ad motum producendum tendant, ſed non actu moveant pondera, ſunt vires mortuæ (*§.* 9), adeoque in quacunque directione in ratione compoſita maſſarum & diſtantiarum a centro motus (*§.* 146, 272). Enimvero ſi ponamus centra gravitatis circa centrum motus tanquam punctum fixum moveri æquabiliter, eodem tempore deſcribent arcus diſtantiis proportionales (§. 138, 412 *Geom.*): qui cum ſint celeritatibus proportionales (§. 33); vires etiam mortuæ erunt in ratione compoſita maſſarum & celeritatum (§. 185 *Arithm.*). *Q.e.d.*

SCHOLION.

279. *In conatu jam adeſt celeritas initialis* dc, *elementum ejus, qua moveretur mobile, ſi motus actu ſequeretur. Quare cum celeritas ſit ut elementum ejus* dc; *mirum non eſt, quod vires hic ſint in ratione celeritatum prodituramm & maſſarum compoſita. Sunt nempe in ratione compoſita maſſarum & celeritatum initialium, quibus inſtruuntur, ac ideo etiam celeritatum futurarum, conſequenter diſtantiarum a centro motus, tanquam illis proportionalium.*

COROLLARIUM.

280. Quodſi ergo maſſæ æquales ſunt, vires mortuæ velocitatum rationem habent.

THEOREMA 37.

281. *Pondera* E & F *ſuper planis inclinatis* AC & CB *ejuſdem altitudinis* CD *æquiponderantia ſunt ut longitudines planorum* AC & CB. Tab. III. Fig. 33.

DEMONSTRATIO.

Quoniam pondera E & F æquiponderant, *per hypoth.* eadem vis, quæ pondus E ſuper plano inclinato AC ſuſtentare valet, etiam alterum F ſuper plano inclinato CB ſuſtentabit, & hæc dicatur V. Eſt vero V : E = DC : AC & V : F = DC : CB (§. 262) Ergo E : F = AC : CB (§. 196 *Arithm.*). *Q.e.d.*

SCHOLION.

282. Simon Stevinus (x) *ingenioſam affert hujus theorematis demonſtrationem, quam ob miram facilitatem huc transferre libet. Catena, cujus partes exacte ponderant in ratione longitudinis, imponatur triangulo* GIH, *illud per ſe patet, partes* GK & HK *æquilibrari: æqui-* Tab. III. Fig. 34.

(x) Element. Static. Lib. 1. prop. 19. f. 448 Operum.

æquipollet enim GKH *catenæ in punctis* G & H *ſuſpenſa. Quodſi jam* IH *non æquiponderet ipſi* GI; *pars præponderans prævalebit, & motus perpetuus catenæ circa* GIH *orietur, qui cum ſit abſurdus, patet partes catenæ IH & GI, adeoque pondera quævis alia, quæ itidem ſunt ut longitudines planorum IH & GI æquiponderare. Supponit adeo motum perpetuum eſſe abſurdum, ſeu id axiomatis inſtar ſumit.*

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 33. 283. Quodſi communis planorum altitudo CD ſumatur pro ſinu toto, CB & CA ſunt coſecantes angulorum inclinationis A & B (§.11 *Trigon.*). Pondera igitur F & E ſuper planis inclinatis CB & CA æquiponderantia ſunt ut coſecantes angulorum inclinationis. Sunt item reciproce ut ſinus angulorum inclinationis A & B (§. 33 *Trigon.*).

THEOREMA 38.

284. *Grave ſuper plano inclinato deſcendit motu uniformiter accelerato.*

DEMONSTRATIO.

Gravitas reſpectiva eſt ad abſolutam in conſtante ratione (§.261), cumque adeo hæc non mutetur, (§.78), illa quoque omni deſcenſus tempore eadem. Quare cum eodem ſemper modo vis gravitatis grave ad motum ſollicitet (§. 25); ſingulis momentis æqualibus æquales addet celeritates. Grave igitur motu uniformiter accelerato deſcendit (§.67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

285. Sunt igitur ſpatia deſcenſus in ratione duplicata temporum (§. 80), itemque velocitatum (§. 81).

COROLLARIUM 2.

286. Eadem etiam temporibus æqualibus creſcunt ſecundum numeros impares (§. 84).

COROLLARIUM 3.

287. Tempora vero ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. 82), itemque velocitates in eadem exiſtunt (§. 83).

COROLLARIUM 4.

288. Spatium quoque a gravi in plano inclinato deſcendente decurſum eſt ſubduplum ejus, quod eodem tempore cum velocitate, quam grave in fine ejusdem habet, motu uniformi conficitur (§. 92).

COROLLARIUM 5.

89. Deſcenſus adeo gravium ſuper planis inclinatis iisdem legibus adſtringitur, quibus deſcenſus eorundem in perpendiculari tenetur (§. 86. 87).

SCHOLION.

290. *Hinc* Galilæus *leges illas exploraturus experimenta ſumſit in planis inclinatis* (§. 89) : *tardior enim, ut in theoremate ſequente demonſtratur, eſt deſcenſus in plano inclinato, & hinc ſpatia facilius notari poſſunt.*

THEOREMA 39.

291. *Celeritas gravis in plano inclinato decidentis in fine temporis dati eſt ad celeritatem, quam perpendiculariter deſcendens eodem*

dem tempore acquireret, ut altitudo plani inclinati ad longitudinem ejus.

DEMONSTRATIO.

Celeritatis elementa, dum grave per planum inclinatum deſcendit, producuntur a gravitate reſpectiva, dum vero perpendiculariter deſcendit, ab abſoluta. Si celeritates ſint ut C & *c*, tempuſculum *dt*, maſſa mobilis *m*, gravitas abſoluta & reſpectiva ut G & *g*, erit $G:g = \frac{mdC}{dt} : \frac{mdc}{dt}$ (§. 112), $= dC : dc$ (§. 181 *Arithm.*) $= C : c$ (§. 187 *Arithm.*). Sed G ad *g* ut longitudo plani ad altitudinem ipſius (§. 261). Ergo in fine cujusvis temporis *t* celeritates C & *c* ſunt ut longitudo plani ad altitudinem ejus (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Celeritas gravis perpendiculariter cadentis ad celeritatem in plano inclinato deſcendentis eſt in fine ejuſdem temporis (incipiendo nimirum a quiete) ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis (§. 33 *Trigon.*).

THEOREMA 40.

Tab. III. Fig. 35. 293. *Spatium a gravi in plano inclinato confectum* AD *eſt ad ſpatium* AB, *quod eodem tempore in perpendiculari percurreret, ut velocitas in plano inclinato ad velocitatem in deſcenſu perpendiculari in fine temporis dati.*

DEMONSTRATIO.

Si grave ab initio motus eam celeritatem habuiſſet, quam in D conſtitutum habet, duplum ipſius AD ſpatium confeciſſet (§. 288). Similiter ſi ab initio motus eam celeritatem habuiſſet, quam in B habet, duplum ipſius AB confeciſſet (§. 92), utrobique nempe motu æquabili. Sunt igitur ſpatia dupla 2 AD & 2 AB, eodem nempe tempore percurſa, *per hypoth.* ut celeritates (§. 33). Ergo & AD atque AB ſunt ut eædem celeritates (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

294. Eſt igitur ſpatium in plano inclinato percurſum ad ſpatium, per quod grave eodem tempore in perpendiculari deſcenderet, ut plani altitudo AB ad longitudinem ejus AC, (§. 291), itemque ut ſinus anguli inclinationis B ad ſinum totum (§. 292).

COROLLARIUM 2.

295. Si ex angulo recto B ad AC perpendicularis demittatur; erit AC : AB = AB : AD (§. 330 *Geom.*). Quare eodem tempore, quo grave ex A perpendiculariter deſcendit in B ſuper plano inclinato perveniet in D (§. 294).

COROLLARIUM 3.

296. Dato igitur ſpatio deſcenſus perpendicularis in altitudine plani AB,

habetur ſpatium eodem tempore in plano inclinato percurrendum AD, ſi ex B ad CA perpendicularis demittatur.

COROLLARIUM 4.

297. Similiter dato ſpatio in plano inclinato percurſo AD, invenitur ſpatium AB, per quod eodem tempore grave perpendiculariter decidiſſet, ſi ex D perpendicularis erigatur, quæ cum catheto plani AB concurrens punctum B determinabit.

COROLLARIUM 5.

Tab. III. Fig. 36. 298. Cum in ſemicirculo anguli D, E, F, C recti ſint (§. 317 *Geom.*); grave per omnia plana AD, AE, AF, AC eodem tempore deſcendit, quo nempe per diametrum AB, ſi ea fuerit ad lineam horizontalem LM perpendicularis (§. 297).

PROBLEMA 44.

Tab. III. Fig. 35. 299. *Dato ſpatio AD in plano inclinato AC percurſo, determinare ſpatium, quod in alio plano inclinato eodem tempore percurreret.*

RESOLUTIO.

1. Ex puncto D erigatur perpendicularis DB occurrens altitudini AB in B: erit AB ſpatium, per quod eodem tempore caderet perpendiculariter grave (§. 296).
2. Quare ſi ex B demittatur perpendicularis BE ad planum AF; erit AE ſpatium, quod in plano inclinato AF conficit grave eodem tempore, quo cadit perpendiculariter ex A in B (§. 295), conſequenter & in inclinato AC ex A in D pervenit. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

300. Cum ſit AB ad AD ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis C & AB ad AE ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis F (§. 294); ſpatia AD & AE, quæ grave eodem tempore in diverſis planis inclinatis percurrere valet, ſunt ut ſinus angulorum inclinationis C & F (§. 196 *Arithm.*) & reciproce ut gravia per eadem plana deſcendentia (§. 283), conſequenter etiam reciproce, ut longitudines planorum AC & AF æque altorum (§. 281). Hinc problema per calculum variis modis ſolvitur.

THEOREMA 41.

301. *Velocitates, quæ in diverſis planis inclinatis eodem tempore acquiruntur, ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex puncto B altitudinis AB ad plana AC & AF perpendiculares BD & BE; erunt AD, AB & BE ſpatia eodem tempore percurſa (§. 299). Cum adeo ſit, ut AB ad AC ita velocitas per AD acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam, & ut AB ad AF ita velocitas per AE acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam (§. 291), conſequenter ob AB : AC = Tab. III. Fig. 35.

AD :

AD : AB & AB : AF = AE : AB (§. 330 *Geom.* & §. 169 *Arithm.*), velocitas per AD acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam ut AD ad AB & velocitas per AE acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam ut AE ad AB (§. 167 *Arithm.*); velocitates eodem tempore per AD & AE acquiſitæ ſunt ut ſpatia AD & AE iſto tempore percurſa (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

302. Velocitates in diverſis planis inclinatis eodem tempore acquiſitæ ſunt ut ſinus angulorum inclinationis C & F, reciproce ut pondera per iſta plana deſcendentia, nec non reciproce ut eorundem planorum æquealtorum longitudines AC & AF (§. 300).

THEOREMA 42.

Tab. III. Fig. 35. 303. *Si grave per planum inclinatum* AC *ad lineam horizontalem* CB *pervenit, eandem celeritatem acquiſivit, quam in deſcenſu perpendiculari* AB *usque ad eandem lineam horizontalem* CB *acquireret.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex B perpendicularis DB; erit AD ſpatium eodem tempore percurſum, quo percurritur AB (§. 296), adeoque celeritas per AB acquiſita ad celeritatem per AD acquiſitam ut AC : AB (§. 291). Celeritas vero per AC acquiſita eſt ad celeritatem per AD acquiſitam in ratione ſubduplicata ipſius AC ad AD (§ 285) = $\sqrt{AC} : \sqrt{AD}$ (§. 159 *Arithm.*). Quare cum ſit AC : AB = AB : AD (§. 330 *Geom.*), adeoque AC ad AD in ratione duplicata AC : AB (§. 216 *Arithm.*) = $AC^2 : AB^2$ (§. 259 *Arithm.*), conſequenter $\sqrt{AC} : \sqrt{AD}$ = AC : AB; erit celeritas per AC acquiſita ad celeritatem per AD acquiſitam ut AC ad AB (§. 167 *Arithm.*). Celeritas igitur per AC acquiſita eſt celeritati per AB acquiſitæ æqualis (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

304. Grave igitur per diverſa plana inclinata AC, AG, AF, cadendo eandem celeritatem acquirit, ubi ad eandem lineam horizontalem CF pervenit.

COROLLARIUM 2.

305. Si grave cadit perpendiculariter ex L in I eandem celeritatem acquirit, quæ per planum inclinatum HI acquiritur (§. 304). Quare ſi per planum IK motum continuat, ubi ad I pervenit, eodem modo movebitur, ac ſi ſtatim ab initio in plano inclinato HK motum fuiſſet. Tab. III. Fig. 37.

COROLLARIUM 3.

306. Cum tamen motus per planum inclinatum IK tardior ſit quam per perpendiculum IM (§. 291); grave per LI & IK deſcendens tardius lineam horizontalem KM attingit, quam ſi conſtan-

ter per LM perpendiculariter deſcendiſſet (§. 90 *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

Tab. III. Fig. 38. 307. Quodſi grave deſcendit per planum inclinatum LM, in M eam velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PM (§. 304). Quodſi ergo ubi ad M pervenit, motum ſuum continuet per MN, nec flexus in M motui officiat, niſi quod directionem mutet; eam in N velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PN, vel etiam QN (§. *cit.*). Quamobrem ſi ex N per NO feratur, perveniens ad lineam horizontalem OR ea velocitate præditum eſt, quam acquireret per OQ, ſeu QR (§. *cit.*). Grave igitur per plura plana inclinata contigua LM, MN, ON motum continuans, eam acquirit celeritatem, ac ſi perpendiculariter per QR deſcendiſſet.

COROLLARIUM 5.

308. Cum itaque curvæ ex rectis infinite parvis componantur; grave per curvam QS deſcendens eandem adipiſcitur celeritatem, quam ex caſu perpendiculari QR acquireret.

THEOREMA 43.

Tab. III. Fig. 38. 309. *Tempus deſcenſus per planum inclinatum* AC *eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per* AB *ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB: *tempora vero deſcenſuum per diverſa plana inclinata æquealta* AC *&* AG *ſunt ut longitudines planorum.*

DEMONSTRATIO.

Tempus per AC æquale eſt tempori, quo motu uniformi percurritur AC dimidia celeritate in C acquiſita, & tempus per AB æquale eſt tempori, quo motu uniformi percurritur eadem AB celeritate dimidia in B acquiſita (§. 288). Sed celeritates iſtæ dimidiæ æquales ſunt (§. 303). Tempora igitur ſunt ut AC & AB (§. 32); *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, tempora deſcenſuum per AC & AG eſſe ut AC & AG: *Quod erat alterum.*

THEOREMA 44.

Tab. III. Fig. 36. 310. *Si diameter circuli* AB *fuerit ad lineam horizontalem* LM *perpendicularis, grave ex quovis peripheriæ puncto* D, E *vel* C *eodem tempore deſcendit in* B, *quo nempe diametrum* AB *percurrit.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex C perpendicularis GC: erit tempus, quo GB percurritur, ad tempus, quo BC percurritur, ut BG ad BC (§. 309). Tempus vero, quo GB percurritur, eſt ad tempus, quo AB percurritur, in ratione ſubduplicata BG ad AB (§. 87), hoc eſt, cum ſit GB:BC=BC:AB (§. 330 *Geom.*) in ratione GB ad BC (§. 216 *Arithm.*). Tempus adeo deſcenſus per GB ad tempus deſcenſus per

BC & diametrum AB eandem rationem habet (§. 167 *Arithm.*). Ergo tempus, quo percurritur BC, æquale eſt tempori, quo AB percurritur (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 45.

Tab. III. Fig. 39. 311. *Deſcenſus per ſemicycloidem* DEF *& per quemcunque ejus arcum* DG *ſunt æquidiuturni.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus DG in partes infiniteſimas reſolutus, quarum una ſit M*m*, & ſemicyclois DEF in numero totidem diviſa; quarum una E*e*: erit DG : DF = M*m* : E*e* (§. 171 *Arithm.*). Concipiamus porro ſemicycloidem DF in E & arcum DG in M ita dividi, ut ſit DF : DG = DE : DM = E*e* : M*m* (§. 167 *Arithm.*). Ducantur denique ſemiordinatæ TE, *te*, NM, *nm*, itemque chordæ in circulo genitore DB, DL, DO. Quoniam DF = 2 AD, DE = 2 DB, DM = 2 DO & DG = 2 DL (§. 168 *Analyſ. infinit.*), & DF : DE = DG : DM *per hypoth.* erit DA : DB = DL : DO (§. 181 *Arithm.*) & hinc $DA^2 : DB^2 = DL^2 : DO^2$ (§. 260 *Arithm.*). Quoniam vero DA : DB = DB : DT (§. 330 *Geom.*); erit $DA^2 : DB^2$ = DA : DT (216. 259 *Arithm.*). Similiter quia DA : DL = DL : DH & DA : DO = DO : DN; erit $DA^2 : DL^2$ = DA : DH & $DA^2 : DO^2$ = DA : DN (§. *cit. Arithm.*), conſequenter $DL^2 : DO^2$ = DH : DN (§. 196 *Arithm.*). Quamobrem ulterius DA : DT = DH : DN (§. 167 *Arithm.*) & AT : DT = HN : DN (§. 193 *Arithm.*), adeoque AT : HN = DT : DN (§. 173 *Arithm.*) & $\sqrt{AT} : \sqrt{HN} = \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$ (§. 260 *Arithm.*). Sed ut $\sqrt{AT}$ ad $\sqrt{HN}$ ita velocitas in E ad velocitatem in M (§. 307. 87), ita etiam DB ad DO (§. 310. 301), immo DE ad DM (§. 168 *Analyſ. infinit.* & §. 181 *Arithm.*). Ergo velocitas in E ad velocitatem in M ut E*e* ad M*m per demonſtr.* conſequenter cum tempus per E*e* ſit ut ſpatium E*e* per velocitatem in E diviſum & tempus per M*m* ut ſpatium M*m* per velocitatem in M diviſum (§. 37); tempus per E*e* æquale eſt tempori per M*m* (§. 185. 149 *Arithm.*) & hinc tempus per omnia E*e*, hoc eſt per DF, æquale eſt tempori per omnia M*m* hoc eſt per DG. (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 46.

312. *Si plana* DC *&* FH *cum horizontalibus* CK *&* HI *æquales efficiunt angulos, ſimiliter inclinata ſunt.* Tab. III. Fig. 40.

DEMONSTRATIO.

Cum plana inclinata dicantur, quando cum horizontalibus angulum

gulum efficiunt obliquum (§. 258); non alio modo quam per angulos, quos cum horizontalibus ſuis efficiunt, diſtingui poteſt eorum inclinatio (§. 476 *Geom.*). Jam anguli æquales ſunt ſimiles (§. 174 *Geom.*), adeoque per eos planorum inclinatio diſtingui nequit (§. 24 *Arithm.*). Ergo plana, quæ cum ſuis horizontalibus angulos efficiunt æquales, ſimiliter inclinata ſunt (§. *cit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

313. Cum in planis inclinatis ſimilibus DC & FH anguli C & H ſint æquales (§. 312) & demiſſis in horizontales CK & HI perpendicularibus DK & FI anguli K & I recti (§. 78 *Geom.*); erit CD : FH = DK : FI (§. 267 *Geom.*), hoc eſt, altitudines longitudinibus proportionales ſunt.

THEOREMA 47.

Tab. III. Fig. 40. 314. *Si duo gravia per duo aut plura plana* AB, BC *&* EG, GH *ſimiliter inclinata & proportionalia incedant, ut nempe ſit* AB : BC = EG : GH; *tempora deſcenſus erunt in ſubduplicata ratione longitudinum* AB, BC *&* EG, GH.

DEMONSTRATIO.

Sit AB : BC = $a : b$; erit ob AB : BC = EG : GH *per hypoth.* EG = ma & GH = mb. Cum plana AB & EG ſint ſimiliter inclinata, *per hypoth.* non aliter quam partes ejusdem plani percurruntur, adeoque tempus per AB eſt ad tempus per EG ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{ma}$ (§. 287). Eodem modo oſtenditur, eſſe tempus per BC ad tempus per GH ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{mb}$, & ita porro, ſi plura fuerint plana. Quare tempus per AB + BC eſt ad tempus per EG + GH ut $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ad $\sqrt{ma} + \sqrt{mb}$ (§. 192 *Arithm.*) hoc eſt, ut $1 : \sqrt{m}$ (§. 181 *Arithm.*), ſeu ut $\sqrt{(a+b)}$ ad $\sqrt{(ma+mb)}$ (§ 178 *Arithm.*): quæ ratio ſubduplicata planorum AB + BC & EG + GH. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

315. Quoniam AB : EG = AP : EQ & CB : GH = BN : GO (313), ſunt proportiones inter ſe ſimiles ob AB : EG = CB : GH *per hypoth.* erit AB + BC : EG + GH = AP + BN : EQ + GO (§. 261) = [ob AP + DN = DM + MK = DK & EQ + GO = FL + LI = FI, (§. 226 *Geom.*)] DK : FI (§. 168 *Arithm.*). Tempus igitur per plana ſimilia & proportionalia AB, BC & EG, GH cum ſit in ratione ſubduplicata AB + BC & EG + GH (§. 314); in ratione quoque ſubduplicata altitudinum DK & FI exiſtit.

COROLLARIUM 2.

316. Et quia ſuperficies curvæ AB & DE ſimiles ac ſimiliter poſitæ ex innumeris planis infinite parvis proportionalibus & ſimilibus conſtant; tempus per AB erit ad tempus per DE in ratione ſubduplicata AB ad DE. Tab. III. Fig. 41.

CA-

CAPUT VII.

DE ASCENSU GRAVIUM, CUM PERPENDICULARI, TUM IN PLANO INCLINATO.

THEOREMA 48.

317. *Si grave in medio non reſiſtente vi impreſſa ſive perpendiculariter, ſive per planum inclinatum aſcendit, motus ejus uniformiter retardatur.*

DEMONSTRATIO.

Dum grave vi impreſſa perpendiculariter aſcendit, a vi gravitatis abſolutæ ſecundum eandem perpendicularem (§. 215); dum vero per planum inclinatum aſcendit, a vi gravitatis reſpectivæ ſecundum directionem plani (§. 261) continuo deorſum impellitur. Motus adeo ejus continuo retardatur (§. 77). Quoniam vero vis gravitatis tam abſolutæ, quam reſpectivæ in omnibus locis, per quæ grave deſcendit, eadem (§. 78 & §. 261); æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus eliduntur (§. 25), conſequenter motus uniformiter retardatur (§. 70). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

318. Grave igitur ſive perpendiculariter, ſive per declive in medio non reſiſtente aſcendens ſpatium percurrit ſubduplum ejus, quod eodem tempore in plano horizontali motu uniformi deſcriberet cum ea celeritate, quam ab initio motus habebat (§. 97).

COROLLARIUM 2.

319. Ejusdem igitur ſpatia æqualibus temporibus confecta ordine retrogrado decreſcunt ut numeri impares 7. 5. 3. 1. 0 (§. 98), adeoque aſcenſus tandem ſiſtitur, conſequenter ubi vis impreſſa fuerit abſumta, corpus vi gravitatis rurſus deſcendit.

COROLLARIUM 3.

320. Sunt adeo inverſe ut ſpatia iisdem temporibus ab alio gravi per eandem altitudinem cadente confecta. Sit enim e. gr. tempus in quatuor partes diviſum; momento primo grave A deſcendet per ſpatium 1, B aſcendet per 7; ſecundo A deſcendet per 3, B aſcendet per 5; tertio A deſcendet per 5, B aſcendet per 3; ultimo A deſcendet per 7, B aſcendet per 1 (§. 86. 319).

COROLLARIUM 4.

321. Unde grave vi impreſſa aſcendens ad eam altitudinem aſcendit, ex qua decidere deberet, ut eam cadendo celeritatem acquireret, qua ſurſum propellitur.

COROLLARIUM 5.

322. Quamobrem cadendo acquirit vim aſcendendi ad eam altitudinem, unde deciderat, in medio nimirum non reſiſtente.

PROBLEMA 45.

323. *Dato tempore, quo grave impetu impreſſo ad altitudinem datam aſcendit, determinare ſpatia ſingulis momentis confecta.*

RESOLUTIO.

Ponatur idem grave eodem tempore per eandem altitudinem deſcendiſſe & quærantur ſpatia ſingulis momentis percurſa (§. 94): hæc enim inverſo ordine ſumta eadem ſunt cum ſpatiis aſcenſus quæſitis (§. 320).

E. gr. Corpus perpendiculariter projectum intra 4 ſecunda aſcendit per intervallum 240 pedum. Quæruntur ſpatia ſingulis temporibus confecta? Quodſi corpus deſcendiſſet, primo minuto deſcendiſſet per 15 pedes, ſecundo per 45, tertio per 75, quarto per 105. Primo itaque aſcendit per 105, ſecundo per 75, tertio per 45, ultimo per 15 pedes.

PROBLEMA 46.

324. *Dato tempore, quo grave vi impreſſa ad datam altitudinem aſcendit, determinare tempus, quo ad altitudinem aliam datam pervenit.*

RESOLUTIO.

Quæratur tempus, quo grave per altitudinem deſideratam decidere poteſt (§. 95): eodem enim ad eandem aſcendet (§. 320. 322).

Vide ſupra exemplum probl. 2. (§ 95).

THEOREMA 49.

325. *Vires corporum vivæ ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Corpus E cadendo per AB acquirit vim aſcendendi per AB, & F cadendo per CD vim adipiſcitur, qua per altitudinem CD elevari poteſt (§. 322). Sunt adeo vires, quibus corpora E & F per altitudines AB & CD elevantur, in ratione compoſita altitudinum AB & CD atque maſſarum E & F, quia vires in elevandis corporibus per eas altitudines totæ conſumuntur. Sed AB & CD ſunt in ratione duplicata velocitatum cadendo per iſtas altitudines acquiſitarum (§. 86). Ergo vires E & F ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum. Sunt vero vires E & F vivæ, utpote non ſolo niſu, ſed impetu concepto agentes, adeoque cum motu actuali conjunctæ (§. 9). Conſtat igitur vires vivas eſſe in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum. Q. e. d.

Tab. III. Fig. 42.

CO-

COROLLARIUM.

326. Quare ſi maſſæ fuerint æquales; vires ſunt in ratione duplicata celeritatum (§. 181 *Arithm.*).

SCHOLION I.

327. *Errant qui promiſcue vires omnes in ratione compoſita maſſarum & velocitatum eſſe ſtatuunt, propterea quod mortua in eadem deprehenduntur* (§. 278). *Errorem communem detexit & emendavit* (y) *Vir illuſtris* Leibnitius. *Aliam theorematis* Leibnitiani *demonſtrationem invenit & per literas mecum pro humanitate ſua communicavit celeberrimus* Bernoullius, *quam ipſis viri ingenioſiſſimi verbis huc tranſcribo.*

Tab. IV. Fig. 43. „Concipe, inquit, corpus C moveri oblique in elaſtrum L velocitate CL ut 2, angulo inclinationis CLP exiſtente 30 gr. cujus nempe ſinus CP eſt ſemiſſis radii CL. Suppono autem eam eſſe reſiſtentiam in elaſtro, ut ad illud tendendum requiratur præciſe unus velocitatis gradus in illo corpore, ſi perpendiculariter impingeret. Quid ergo jam fiet poſt incurſionem obliquam corporis C in elaſtrum L? Quoniam motus per CL componitur, ut notum eſt, ex duobus collateralibus per CP & PL (*vide §.* 241), & cum OP, ſecundum quam corpus directe impingit in elaſtrum L, exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, conſumetur hic motus per CP, tenſo elaſtro (perinde enim eſſet ac ſi corpus C celeritate CP perpendiculariter incurreret in elaſtrum, quod per hypotheſin eam celeritatem deſtruere poteſt) remanente corporis celeritate & directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM ſit = PL = $\surd 3$ (ponitur enim CL = 2) & applicato in M alio ſimili elaſtro faciente cum LM angulum LMQ, cujus ſinus LQ = CP = 1; per eandem rationem manifeſtum eſt, corpus C poſt tenſionem elaſtri L tenſurum eſſe elaſtrum M amiſſo motu per LQ & ſervato motu per QM. Prolongata itaque QM ad N, ut fiat MN = QM = $\surd 2$, ibique ſubſtituto elaſtro ſimili tertio, conſtituente cum MN angulum MNR ſemirectum, quo ſcilicet MR iterum ſit = CP = 1; patet ſimiliter motum per MR totum impendi in tenſionem elaſtri N, corpore interim moveri pergente directione & celeritate RN = 1. Denique ſi hac celeritate reſidua impingat perpendiculariter in elaſtrum O, huic flectendo totam ſuam vim reliquam dabit; ipſum itaque corpus ad quietem redigetur. Hiſce ita præmiſſis, patet nunc potentiam corporis C tantam fuiſſe, ut per ſe ſolum tendere poſſit præciſe quatuor elaſtra talia, ad quæ ſingula ſeorſim tendenda requiritur dimidia velocitas corporis æqualis ipſi C, adeoque cum effectus illius quadruplo major ſit, quam effectus hujus, evidens eſt quoque vim corporis velocitate 2 gr. quadruplam eſſe vis corporis ejusdem vel æqualis velocitate 1 gr. Haud abſimili modo demonſtrarem corpus C velocitate 3 gr. tendere poſſe 9 elaſtra, ad quorum unum tendendum unus velocitatis gradus in eo corpore requiritur, & tandem in genere numerum elaſtrorum tenſorum ſemper eſſe „qua-

(y) Act. Erudit. A. 1686 p. 161 & ſeqq.

„quadratum numeri graduum velocita-„tis. Unde igitur ſequetur, vires cor-„porum æqualium eſſe in duplicata ra-„tione celeritatum. *Q. e. d.*

SCHOLION 2.

328. *Prodiit nuper Pariſiis Tractatus Mathematici hujus eminentis* (z), *in quo hanc virium menſuram a nonnullis Mathematicis exteris impugnatam multo apparatu ſtabilivit. Præterea Viri celeberrimi* Graveſandius (a) Hermannus & Bülffingerus (b) *eandem menſuram aliis modis demonſtrarunt, &* Polenus (c) *experimentis confirmavit. Ego in Principiis Dynamicis* (d) *analyſi vere dynamica eandem virium menſuram erui. Qui vires vivas a mortuis non diſtinguunt, vires promiſcue æſtimant per celeritatem in maſſam ductam.*

THEOREMA 50.

Tab. III. Fig. 39. 329. *Si grave vel perpendiculariter per* AD, *vel per quamcunque ſuperficiem* FED *deſcendat & impetu concepto per aliam* DC *rurſus aſcendat, in punctis æquealtis veluti in* G, H & Q, *eandem vim eandemque celeritatem habebit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam grave vi cadendo per AD vel FD acquiſita ad C usque ex D per DGC aſcendit (§. 322); ubi ad G pervenit, ea ipſi ſupereſt vis, qua ad C usque aſcendere valet. Sed eandem vim adipiſcitur cadendo ex C per CG, itemque ex A ad H, nec non ex F in Q (§. *cit.*). In punctis adeo æque altis G, H & Q eandem vim habet. *Quod erat unum.*

Sunt autem vires cadendo acquiſitæ in punctis G, H & Q ut quadrata celeritatum (§. 326). Quare cum vires æquales ſint, *per demonſtr.* celeritatum quoque quadrata, conſequenter ipſæ celeritates æquales ſunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

330. Quodſi adeo grave per ſuperficiem quamcunque FED deſcendat & per aliam ſimilem ac æqualem ſimiliterque poſitam DGC rurſus aſcendat; idem omnino eſt, ac ſi eadem linea eadem velocitate ſingulis ſui partibus bis percurreretur (§. 329). Unde tempora deſcenſus & aſcenſus per æqualia ſpatia æqualia ſunt (§. 25).

CA-

(z) Diſcours ſur les Loix de la communication du mouvement, a Paris 1727.
(a) In Element. Phyſ. Tom. I. p. 112 edit. poſter.
(b) In Comment. Acad. Scient. Petropolitanæ p. 1.45.
(c) In Tractatu de Caſtellis p. 56 & ſeqq.
(d) In Comment. Acad. Scient. Petropolit. p. 231.

CAPUT VIII.

DE

DESCENSU ET ASCENSU CORPORUM IN LINEIS CURVIS.

DEFINITIO 37.

331. *Curva iſochrona* dicitur, in qua grave ſine acceleratione deſcendit, hoc eſt æqualibus temporibus æqualiter ad horizontem accedit.

COROLLARIUM.

332. In Curva iſochrona tempora deſcenſus ut altitudines ejusdem.

SCHOLION.

333. *Problema de curva iſochrona invenienda propoſuit* Leibnitius (e) & *ſuppreſſa analyſi demonſtrationem ſyntheticam dedit* (f). *Dedit autem ſolutionem ope calculi differentialis tunc temporis naſcentis* Jacobus Bernoulli (g): *dedere poſt eum alii alias.*

PROBLEMA 47.

Tab. XIII. Fig. 30. 334. *Invenire curvam iſochronam.*

RESOLUTIO.

Sit linea horizontalis BC, altitudo, per quam grave ad eandem deſcendit AC, curva iſochrona GMB. Sit AP $= x$, PM $= y$; erit ducta *pm* ipſi PM infinite propinqua P*p* $= dx$, *m*R $= dy$ & M*m* $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417. *Geom.*). Quoniam in curva iſochrona tempora deſcenſus ſunt ut altitudines, per quas deſcenditur (§. 332); erit tempus per *Mm* ut P*p*, adeoque $= dx$. Et quia celeritas in M acquiſita eadem eſt cum celeritate in P acquiſita (§. 308), adeoque in ratione ſubduplicata altitudinis AP (§. 87); erit celeritas, qua arculus infinite parvus M*m* percurritur, $= \sqrt{x}$. Jam cum per arculum M*m* grave motu æquabili feratur, erit ipſe tanquam ſpatium a mobili percurſum (§. 12) $= dx\sqrt{x}$ (§. 34). Eſt itaque in curva iſochrona

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

$$x\,dx^2 = dx^2 + dy^2$$

$$x\,dx^2 - dx^2 = dy^2$$

h. e. $$dx^2(x - 1) = dy^2$$

$$dx\sqrt{(x - 1)} = dy$$

Fiat $$x - 1 = v$$

erit $$dx = dv$$

$$dx\sqrt{(x - 1)} = dv\sqrt{v} = v^{1:2}\,dv$$

adeoque $$v^{1:2}\,dv = dy$$

(e) Nouvelles de la Republ. des lettres Septemb. 1687.

(f) In Actis Erudit. A. 1689 p. 196 & ſeqq.

(g) In Actis Erudit. A. 1690 p. 217 & ſeqq.

$$\frac{2}{3}v^{3:2} = y$$
$$\frac{4}{9}v^3 = y^2 \text{ ſive } v^3 = \frac{9}{4}y^2$$

Apparet adeo, Curvam iſochronam eſſe e numero paraboloidum quadratico-cubicalium (§. 519 *Analyſ. infin.*), cujus abſciſſa $=v$, ſemi ordinata PM$=y$, parameter $\frac{9}{4}$. Quoniam altitudo, per quam cadit grave, eſt x, ſed $v=x-1$; curva BMC lineam verticalem AC non ſecat in A, ſed in G, conſequenter mobile cadere debet per altitudinem AG, antequam in curva GMB deſcendere poſſit. Et quia AG $=1$, parameter vero $=\frac{9}{4}$; ſi ſit parameter $=p$, erit $p=\frac{9}{4}$ AG, adeoque $\frac{4}{9}p=$ AG, hoc eſt, altitudo AG, per quam deſcendere debet grave, antequam per curvam ita deſcendere poteſt, ut altitudines deſcenſus ſint tempori proportionales, quatuor nonis parametri curvæ æqualis. Mobile adeo non ex quiete aſcenſum inchoat, ſed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem quatuor nonis parametri æqualem.

SCHOLION.

335. *Supponimus directiones gravis cadentis, quas vi gravitatis habet, inter ſe parallelas: quemadmodum & in præcedentibus factum. Idem vero problema in hypotheſi directionum convergentium ſolvit* Varignonius (h). *Lubet igitur ſolutionem in eadem hypotheſi ſubjungere.*

PROBLEMA 48.

336. *Invenire lineam iſochronam in hypotheſi directionum in centro Telluris convergentium.* Tab. XIII. Fig. 131.

RESOLUTIO.

Sit diſtantia AC puncti horizontalis A, unde grave cadit, a centro Telluris C$=b$, AP$=x$ ut ante, AN arcus radio AC deſcriptus $=y$, quia ad AC perinde ac in problemate præcedente ſemiordinatæ ad eandem altitudinem perpendicularis (§. 38 *Analyſ. infin.*). Sit porro radius Cn ipſi CN infinite propinquus & radiis CP atque Cp particula infinite parva Pp differentibus deſcribantur arcus concentrici PM & pm; erit MR$=$P$p=dx$, N$n=dy$ & ob ſimilitudinem ſectorum CnN & CmM (§. 138. 412 *Geom.*)

$$CN : Nn = Cm : mR$$
$$b : dy = b-x :$$

adeoque $mR = (b-x)\,dy : b$.

Porro ob angulum ad R rectum (§. 38 *Analyſ. infin.*)

$MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*)

adeoque $Mm^2 = dx^2 + (b-x)^2 dy^2 : b^2$
$= (b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2) : b^2$

Enim-

(h) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1699 p. 2. & ſeqq.

Enimvero vi analyſeos præcedentis (§. 334)

$$Mm^2 = xdx^2$$

Ergo $xdx^2 = (b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2) : b^2$

$$b^2xdx^2 - b^2dx^2 = (b-x)^2dy^2$$

$$bdxV(x-1) = (b-x)dy$$

$$\frac{bdxV(x-1)}{b-x} = dy$$

$$\int \frac{bdxV(x-1)}{b-x} = y$$

Cum y ſit arcus AN & eo dato determinetur punctum M ducto ex centro C radio CN & intervallo CP ob AP $= x$ noto ſeu $= b - x$ arcu PM; non alia re opus eſt, quam ut arcus AN ex aſſumta AP ſive x determinetur: id quod fit ope curvæ BQD. Si enim elementum ejus $PpQq$ ponatur $= bdxV(x-1) : (b-x)$; cum ſit $Pp = dx$, erit ſemiordinata PQ $= bV(x-1) : (b-x)$. Quare ſi area BPQ dividatur per AB $= 1$; prodibit recta arcui AN æqualis. Conſtruatur itaque parallelogrammum rectangulum ABLK æquale areæ BPQ, cujus altitudo conſtans AB $= 1$; erit BL $=$ AK $=$ AN arcui, qui adeo circuli quadratura præſuppoſita determinari poteſt. Apparet itaque curvæ iſochronæ in præſenti caſu conſtructionem pendere a quadratura curvæ BQD & quadratura circuli.

Ut curvæ BQD natura inveſtigetur, fiat

$$PQ = bV(x-1) : (b-x) = 0$$

erit

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Patet adeo ſemiordinata PQ evaneſcente, x degenerare in AB $= 1$, ſive in B, ubi PQ $= 0$, eſſe AB adhuc $= 1$.

Fiat porro PQ $= bV(x-1) : (b-x) = \infty$

erit

$$b - x = 0$$

$$b = x$$

Ergo ubi BP $= x$ degenerat in BC $= b$, ſemiordinata CR fit infinita, & hinc CR ad BC in centro C normalis eſt aſymptotus curvæ BQD.

Ut curvæ BQD conſtructio detegatur, fiat BP $= v$, erit ob AP $= x$ & AB $= 1$

$$x = v + 1$$

$$x - 1 = v$$

$$PQ = \frac{bV(x-1)}{b-x} = \frac{bVv}{b-v-1}$$

Quoniam Vv eſt ſemiordinata parabolæ, cujus vertex in B, abſciſſa BP, parameter AB $= 1$ (§. 392 *Anal. finit.*); conſtruatur circa axem BC parabola AHS, erit PH $= Vv$

$=\sqrt{v}$. Ducatur porro recta CV per punctum H ex centro C rectæ AT ad AC normali in V occurrens. Quoniam PH & AV inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : PH = CA : AV$$
$$b-v-1 : \sqrt{v} = b : \frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$$

Eſt igitur AV = PQ, adeoque punctum curvæ Q, a qua conſtructio iſochronæ pendet, habetur ſi parallelogrammum PAVQ compleatur.

Hinc vero porro eruitur æquatio curvæ BQD ad axem AT relatæ. Nimirum ſi ſit VQ = AP = y & AV = PQ = x, AB = a; erit

$$x = \frac{b\sqrt{(ay-a^2)}}{b-y}$$
$$x^2 = \frac{ab^2y - a^2b^2}{(b-y)^2}$$
$$x^2(b-y)^2 = ab^2y - a^2b^2$$

ſeu ob $(b-y)^2 = b^2 - 2by + y^2$

$$b^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = ab^2y - a^2b^2$$
$$x^2y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 - ab^2y + a^2b^2 = 0$$

Si fiat $x = 0$

erit
$$a^2b^2 - ab^2y = 0$$
$$a - y = 0$$
$$a = y$$

Eſt igitur ſemiordinata AB in origine abſciſſarum A = a, quod convenit cum ſuperioribus, & curva BQD algebraica (§. 377 *Anal. finit.*), tertii quidem generis (§. 382 *Anal. finit.*).

Ut vero nunc etiam æquatio ad curvam iſochronam in hypotheſi directionum convergentium eruatur, fiat præter AB = 1, BP = v, arculus mR radio Cp = CR deſcriptus = dz, cum ſit Pp = dv, erit M$m^2 = dz^2 + dv^2$ (§. 417 *Geom.*). Eſt vero M$m^2 = xdx^2$ vi ſuperioris analyſeos. Quare cum ſit

$$x = v + 1$$

erit
$$dx = dv$$
$$dx^2 = dv^2$$
$$xdx^2 = (v+1)dv^2$$
$$= vdv^2 + dv^2$$

Habemus itaque

$$dz^2 + dv^2 = vdv^2 + dv^2$$
$$dz^2 = vdv^2$$
$$dz = v^{1:2}dv$$
$$z = \tfrac{2}{3}v^{3:2}$$
$$\tfrac{9}{4}z^2 = v^3$$

hoc eſt, $\tfrac{9}{4}$ AB. PM^2 = BP^3

Quoniam PM eſt arcus circuli radio CP deſcriptus, curva iſochrona BMC in hypotheſi directionum [illegible]

num convergentium tranſcendens eſt (§. 380 *Analyſ.*).

Ut curvæ hujus indoles porro detegatur, ponatur in æquatione differentiali ad eandem $dz = dv\sqrt{v}$ ſeu $\frac{dz}{dv} = \sqrt{v}$

$$v = 0$$

erit

$$\frac{dz}{dv} = 0$$

$$dv = \infty$$

Eſt vero in B $v=0$ & $dv=\infty$. Axis igitur CB curvam BMC in C tangit, adeoque ea axi convexitatem ibidem obvertit.

Quodſi fiat CP=0, arculus quoque radio CP deſcriptus $mR=dz$ $=0$: punctum ergo M coincidit cum C, adeoque curva BMC cum axe in C concurrit, quæ in B eam tangit. Neceſſe igitur eſt ut ibidem ſit ad axem concava, conſequenter punctum flexus contrarii habet.

Jam in puncto flexus contrarii *M* eſt $Mm^2 = CP.\, dPp$ (§. 309 *Anal. infin.*). Fiat igitur $CB=c$. Cum ſit $BP=v$, erit $CP=c-v$, adeoque $Pp=-dv$. Jam

$$dz = -v^{1:2}dv$$

adeoque

$$v^{1:2}dz = dv$$

$$-v^{-1:2}dz = -dv$$

$$\tfrac{1}{2}v^{-3:2}dzdv = -ddv = dPp,$$ ob conſtantem dz,

$$\tfrac{1}{2}(c-v)v^{-3:2}dzdv = CP.\, dPp$$

Porro $Mm^2 = dz^2 + dv^2$
$= vdv^2 + dv^2$

Habemus itaque

$$vdv^2 + dv^2 = \tfrac{1}{2}(c-v)v^{-3:2}dzdv$$
$$= \tfrac{1}{2}(c-v)v^{-1}dv^2$$

$$v + 1 = (c-v) : 2v$$

$$v^2 + v = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}v$$

$$v^2 + \tfrac{3}{2}v = \tfrac{1}{2}c$$

$$v^2 + \tfrac{3}{2}v + \tfrac{9}{16} = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16}$$

$$v + \tfrac{3}{4} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16})}$$

$$v = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16})} - \tfrac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16})} - \tfrac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}AC.AB + \tfrac{1}{16}AB^2)} - \tfrac{3}{4}AB$$

ob $c + 1 = AC$

Sit *Cl* ultimum elementum curvæ, erit $hl = dz$ & $hc = dv$, & ob rectam ad *h* (§. 38 *Anal. infin.*) *hl* ad *hc* ut ſinus anguli *hCl* ad ſinum anguli *hlC* (§. 33 *Trigon.*), adeoque $dv : dz =$ ſin. *hCl* : ſin. *hlC*. Si *Cl* ſit ultimum curvæ elementum, punctum *l* infinite parvo intervallo ab axe AC diſtat, ſeu cum eo coincidit, atque adeo punctum *l* eſt in axe AC & angulus *hCl* idem cum ACG, intra quem curva BMC comprehenditur. Quare

$dv:dz =$ ſin. ACG : Coſin. ACG. Eſt vero $dz\sqrt{v} = dv$, adeoque $dz : dv = \sqrt{v} : 1 = \sqrt{BC} : \sqrt{AB}$. Eſt igitur ſinus anguli ACG, intra quem curva continetur, ad ejus coſinum in ratione ſubduplicata rectarum CB & BA (§. 167 *Arithm.*). Et per hoc theorema angulus ACG, conſequenter arcus AG determinatur, qui curvæ iſochronæ toti conſtruendæ ſufficit.

Denique in æquatione $dz = dv\sqrt{v}$ ſubſtituatur valor ipſius $v = x - 1$, erit $dz = dx\sqrt{(x-1)}$.

Fiat $dz = 0$

erit $dx\sqrt{(x-1)} = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$= AB$

Quare cum x denotet altitudinem, per quam grave cadit, ſeu motus acceleratricem, & dz in puncto B ſit $= 0$, ubi axis BC curvam tangit, *per demonſtrata*; grave non ex quiete motum in curva BMC incipere debet, ſed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem AB.

Tab. XIV. Fig. 32. Angulus, intra quem continetur curva iſochrona in hypotheſi directionum convergentium, determinatur, ſi ſuper AC, hoc eſt, recta inter locum A, unde deſcenſus incipit, & centrum Telluris C interjecta, deſcribatur ſemicirculus, & in B, ubi curva axem tangit, erigatur perpendicularis BD, factaque BE = BA ducatur ex C rectæ ED parallela CF perpendiculari BD ultra ſemicirculum continuatæ in F occurrens: eſt enim ACF angulus quæſitus, conſequenter arcus AG ex centro C radio CA deſcriptus curvæ conſtruendæ ſufficit. Etenim AB BD = BD : BC (§. 327 *Geom.*). Quare AB ad BD in ratione ſubduplicata AB : BC (§. 216. 159 *Arithm.*), ſeu AB : BD = $\sqrt{AB} : \sqrt{BC}$, conſequenter $\sqrt{BC} : \sqrt{AB}$ = BD : AB (§. 169 *Arithm.*). Quoniam, FC parallela ipſi DE *per conſtruct.* erit DB : BE = FB : BC (§. 268 *Geom.*), adeoque $\sqrt{BC} : \sqrt{AB}$ = BF : BC (§ 167 *Arithm.*). Eſt vero etiam BF : BC = ſin. BCF : ſin. CFB (§. 33 *Trig.*) = ſin. ACG : Coſin ACG. Ergo ſin. ACG : Coſ. ACG = $\sqrt{BC} : \sqrt{AB}$ (§. 167 *Arithm.*). Eſt igitur ACG angulus quæſitus.

Quodſi ſuper AH = $\frac{1}{2}$ AC ſemicirculus AIH deſcribatur & in B perpendicularis excitetur, ductiſque AI & IH fiat IK = AL = $\frac{1}{4}$ AB & LO = KA, erit O punctum axis, cui punctum flexus contrarii reſpondet. Eſt enim AB : AI = AI : AH ſive $\frac{1}{2}$ AC (§. 330 *Geom.*), adeoque

que $AI=\sqrt{\frac{1}{2}AC.AB}$ (§. 377 *Geom.*). Quare cum angulus AIK ſit rectus (§. 317 *Geom.*), erit $AK = \sqrt{(\frac{1}{2}AC.AB + \frac{1}{16}AB^2)}$. Et quia $LB = \frac{1}{4}AB$ & $LO = AK$ *per conſtruct.* erit $BO=\sqrt{(\frac{1}{2}AC.AB+\frac{1}{16}AB^2)}-\frac{1}{4}AB$. Quare in O eſt punctum axis, quod puncto flexus contrarii reſpondet.

SCHOLION 1.

337. *Atque ita calculo analytico eruimus præcipuas curvæ iſochronæ proprietates in hypotheſi directionum convergentium, quæ præſenti inſtituto inſerviunt. Conſtat enim, quomodo ſit conſtruenda ſuppoſita quadratura curva cujusdam per parabolam conſtruenda & quadratura circuli. Conſtat præterea, quænam ſint puncta, quibus ductus curvæ determinatur, nempe quod in* B *axem tangat, eique convexitatem obvertat, punctum* O *reſpondeat flexui contrario, ita ut curva portioni axis* OC *concavitatem obvertat, in* C *denique eadem cum axe concurrat, tota autem intra angulum* ACG *contineatur. Quoniam tamen curva iſta & rectificabilis, & quadrabilis eſt, quadraturam & longitudinem in corollariis determinare libet.*

COROLLARIUM 1.

Tab. XIII. Fig. 131. 338. Quoniam $Mm=dx\sqrt{x}$ (§ 336) $=x^{1:2}dx$, erit arcus curvæ $BM=\frac{2}{3}x^{3:2}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Sed $x=v+1$ (§. *cit.*). Ergo $BM=(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}v)\sqrt{(v+1)}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{2}{3}AP.\sqrt{AP}-\frac{2}{3}AB}{AB}$. Quare ſi ſuper AP deſcribatur ſemicirculus & Tab. XIV. Fig. 133. erecta in B perpendiculari BC & in D (eſt autem $AD=\frac{2}{3}AP$) perpendiculari DE ducatur recta AE occurrens ipſi DE in E, tandemque ex EA reſecetur $EG=\frac{2}{3}AB$, erit AG longitudo arcus. Eſt enim $AP:AC=AC:AB$ (§. 330 *Geom.*), adeoque $AC=\sqrt{AP}$ ob $AB=1$. Porro cum ED ipſi BC parallela (§. 256 *Geom.*); $AB:AC=AD:AE$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $AE=\frac{AD.AC}{AB}=\frac{\frac{2}{3}AP.\sqrt{AP}}{AB}$. Quare cum $GE=\frac{2}{3}AB$ *per conſtr.* erit utique recta AG arcui curvæ æqualis.

COROLLARIUM 2.

339. Quoniam elementum areæ eſt Tab. XIII. Fig. 131. ſector infinite parvus $CmR=mR.\frac{1}{2}CR$ $=v^{1:2}dv(\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}v)$ (§. 336) $=\frac{1}{2}cv^{1:2}dv-\frac{1}{2}v^{3:2}dv$, erit area $BMC=\frac{1}{3}cv^{3:2}-\frac{1}{5}v^{5:2}=(\frac{1}{3}cv-\frac{1}{5}v^2)\sqrt{v}=(5cv-3v^2)\sqrt{v}:15=\frac{(5CB.BP-3BP^2)\sqrt{BP}}{15\,AB}$ ob $AB=1$. Quodſi fiat $v=c$, erit area integra $=(5c^2-3c^2)\sqrt{c}:15=\frac{2}{15}c^2\sqrt{c}=\frac{2}{15}BC^2.\sqrt{BC}:AB$, denuo ob $AB=1$.

SCHOLION 2.

340. *Quoniam* $v=BP$ *& area curvæ incipit in puncto* B, *non opus eſt, ut de quantitate adjicienda ſolliciti ſimus. Sed cum in corollario primo origo ipſius* x *in* A, *curva autem in* B; *ideo pro* x *ſubſtitui debebat* v, *ut conſtaret de quantitate adjicienda.*

COROLLARIUM 3.

341. Si CM ad PM perpendicularis

 (§. 38

(§. 38 *Anal. infinit.*) fiat infinite magna, erit ea axi AC parallela & PM arcus, itidemque alter AN degenerat in rectam arcui æqualem, propterea quod cum AC nullibi concurrit (§. 82. 256 *Geom.*). Quare cum x ſive AP intuitu infinitæ b ſive AC=0; erit $b-x=0$, adeoque æquatio $y=\int \frac{bdx\surd(x-1)}{b-x}$ (§. 336) degenerat in ſequentem $y=\int bdx\surd(x-1):b=\int dx\surd(x-1)$; qui eſt caſus *Leibnitianus* (§. 334).

SCHOLION 5.

342. *Cum centrum terræ ingenti admodum intervallo diſtet, & altitudines, in quibus gravium deſcenſus nobis uſui eſſe poteſt, reſpectu illius diſtantiæ ſint admodum exiguæ; caſus directionum parallelarum praxi ſatisfacit, cui etiam ob faciliorem curvæ deſcriptionem ſeſe commendat* (§. 334 *Mech.* & §. 581 *Analyſ.*). *In illo igitur acquieſcere poteramus, niſi nobis quoque propoſitum eſſet ſpeciminibus illuſtribus docere, quomodo principiis mathematicis in his Elementis a nobis explicatis in ſolvendis problematis arduis ſit utendum & quo ordine ratiocinia ſint concatenanda, ut non perturbato animi ſtatu ad portum optatum perveniatur. Quamobrem nec piget de ſolutione generali problematis in duplici hypotheſi hactenus conſiderati nonnulla addere. Nimirum ſolvimus problema de curva iſochrona in hypotheſi accelerationis* Galilæana, *propterea quod experimentis in iis altitudinibus, in quibus ea capere licet, ſatisfacit, ita ut in locum hypotheſeos naturæ quoad nos ſurrogari poſſit* (§. 85 & ſeqq.). *Enimvero cum aliæ quoque hypotheſes non ſint impoſſibiles atque Geometræ ſit problema in omni hypotheſi ſolvere, quamdiu ignoratur, quænam illarum ſit hypotheſis naturæ; ut oſtendamus reſtat, quid fieri conveniat data quacunque accelerationis lege. Generalem adeo ſolutionem hic inprimis admittimus in uſum artis inveniendi, ut appareat progreſſus a ſolutionibus particularibus ad generales.*

PROBLEMA 49.

343. *Invenire curvam iſochronam in quacunque accelerationis hypotheſi.*

RESOLUTIO.

Quodſi acceleratio alia ſtatuatur, quam quæ in hypotheſi *Galilæana* obtinet, directionibus parallelis manentibus, curvæ iſochronæ BMC accedat curva celeritatum ANE juxta altitudinem acceleratricem AG tanquam communem axem deſcripta, cujus ſemiordinatæ PN, GE exprimunt celeritates per abſciſſas iisdem reſpondentes AP, AG acquiſitas. Tab. XIV. Fig. 134.

Sit itaque AP=x, PM=y, PN=v, reperietur, eodem prorſus quo ſupra (§. 334) modo Mm=vdx, ut adeo habeamus

$$dx^2+dy^2=v^2dx^2$$
$$dy^2=v^2dx^2-dx^2$$
$$dy=dx\surd(v^2-1)$$

Si

Quodſi jam ſit $v = Vx$, quemadmodum in hypotheſi *Galilæana*, prodibit $dy = dx V(x-1)$, prorſus ut ſupra (§. *cit.*). Solutio itaque particularis convertitur in univerſalem, aut potius ſpecialis in generalem, ſi pro Vx ponas v; id quod regulis Logicis, quas ſtabilivimus, ad amuſſim congruit (§. 710 *Log.*).

Tab. XIV. Fig. 135. Quodſi magis arriſerit ope loci ſollicitationum centralium, ſeu ſcalæ gravitatis IQO problema ſolvere; pari facilitate idem præſtatur. Accedat enim porro ad curvam iſochronam BMC & curvam celeritatum ANC ſcala ſollicitationum centralium IQO & ſit communis abſciſſa AP in altitudine acceleratrice AG $= x$, PM $= y$, PN $= v$, PQ $= g$; erit $v^2 = 2 \int g dx$ (§. 113). Quare ſi pro v^2 hunc valorem ſubſtituas, prodibit $dy = dx V(2 \int g dx - 1)$. Quodſi jam ſupponas, quemadmodum id obtinet in hypotheſi *Galilæana* (§. 112), gravitatem conſtantem, quæ adeo ſit ut 1; erit $dy = dx V(2 \int dx - 1) = dx V(2x - 1)$, vel, cum hic ſola ratio attendatur, minime autem magnitudo abſoluta, $dy = dx V(x - 1)$, ut ſupra (§. 334).

SCHOLION.

344. *In curva iſochrona tempora deſcenſus ſunt ut altitudines, per quas deſcenditur (§. 332). Invenire itaque poſſunt etiam curvæ aliæ, in quibus tempus ad altitudinem relationem quamcunque conſtantem vel quomodocunque aſſignabilem habet. Quamobrem in gratiam artis inveniendi ſolutionem problematis generalem apponimus, ſub quo curva iſochrona tanquam caſus particularis continetur.*

PROBLEMA 50.

345. *Invenire curvam, in qua grave deſcendit ea lege, ut tempus habeat ad altitudinem, per quam deſcendit, relationem datam, ſeu ut tempora deſcenſus habeant inter ſe relationem ex datis altitudinibus dato modo aſſignabilem, ſuppoſitis quacunque accelerationis lege & directionibus ſive parallelis, ſive convergentibus.*

RESOLUTIO.

Non differt reſolutio problematis præſentis a reſolutione præcedentis, niſi quod circa axem communem deſcribatur, præter curvam deſcenſus BMC, curvam celeritatis ANE, etiam curva temporis PS. Nimirum grave in curva BMC ea lege deſcendit, ut in M ſit celeritas ut ſemiordinata PN, tempus vero ut PS. Tab. XIV. Fig. 136.

Sit AP $= x$, PN $= v$, PS $= t$, PM $= y$; erit $Mm = V(dx^2 + dy^2)$ itemque ob ſuppoſitum per Mm motum æquabilem fieri, ut ſupra (§. 334.)

Ha-

Habemus itaq; $vdt = \surd(dx^2+dy^2)$

$$v^2dt^2 = dx^2+dy^2$$
$$v^2dt^2 - dx^2 = dy^2$$
$$dy = \surd(v^2dt^2 - dx^2)$$
$$y = \int\surd(v^2dt^2 - dx^2)$$

Quodſi ergo in dato caſu ſpeciali v exprimatur per x & dt per dx, prodit æquatio curvæ deſcenſus reſpondens.

Sit. E. gr. $v = \surd x$ & $t = x$, quemadmodum in curva iſochrona, ſuppoſita accelerationis lege *Galilaana*; erit $dt = dx$, adeoque $y = \int\surd(xdx^2 - dx^2) = \int dx\surd(x-1)$, ut ſupra (§. 334).

Quodſi quis in caſu directionum convergentium problema reſolvere velit, non novo calculo opus eſt, ſed in æquatione prima paulo ante (§.336) inventa pro $x\,dx^2$ ſubſtitui debet v^2dt^2: quo facto habemus

$$v^2dt^2 = \frac{b^2dx^2+(b-x)^2dy^2}{b^2}$$
$$v^2b^2dt^2 = b^2dx^2+(b-x)^2dy^2$$
$$\frac{v^2b^2dt^2 - b^2dx^2}{(b-x)^2} = dy^2$$
$$dy = \frac{b\surd(v^2dt^2 - {}^2dx^2)}{b-x}$$

Quodſi etiam hic in dato caſu ſpeciali v & t per x determinentur, æquatio curvæ deſcenſus prodit.

E. gr. Sit ut ante $v = \surd x$, $t = x$, quemadmodum pro curva iſochrona ſuppoſuimus; erit $dy = \frac{b\surd({}^2xdx^2 - {}^2dx^2)}{b-x} = \frac{bdx\surd(x-1)}{b-x}$, ut ſupra (§. 336).

SCHOLION.

346. *Ubi adeo problema in caſu particulari ſolutum, veluti in caſu* Leibnitii, *non difficilis eſt ſolutio univerſalis, quamcunque univerſalitatem eidem donare volueris: id quod etiam in aliis problematis ſimiliter obtinet. Enimvero ubi ſolutio generalis ad caſum ſpecialem applicanda, plus difficultatis oritur, quatenus nempe formulæ, quæ per ſubſtitutionem prodeunt, vel ſummandæ, vel ad quadraturas aut rectificationes ſimpliciorum curvarum reducendæ. Atque ea ratio eſt, cur Geometræ eminentes artem inveniendi ſive analyſin promoturi parum ſolliciti fuerint de ſolutionibus generalibus, modo particulares dare poſſent, in quibus ars eminebat, novis artificiis analyticis introductis.*

DEFINITIO 38.

347. *Curva iſochrona paracentrica* dicitur, per quam deſcendens grave æqualiter æqualibus temporibus à dato puncto recedit, vel ad illud accedit. Dicitur etiam *curva acceſſus & receſſus æquabilis.* Tab. XIV. Fig. 137.

Sit BCM curva quæſita, D punctum fixum in axe datum, DM eſſe debet ut tempus deſcenſus ab A in M,

SCHO-

SCHOLION.

348. *Problema de curva iſochrona paracentrica invenienda primum propoſitum eſt a* Leibnitio (i); *ſed cum ſolutu difficilius ſit priore, dudum intactum reliquerunt Geometræ, donec tandem ſolutionem daret* Jacobus Bernoulli (k) *& ſimul ſolutiones* Leibnitii *Fratrisque* Joannis (l) *eliceret. Generalius deinde idem problema ſolvit* Varignonius (m). *Lubet hic dare ſolutionem præcedenti, quantum licet, affinem.*

Tab. XIV. Fig. 137.

PROBLEMA 51.

349. *Invenire curvam iſochronam paracentricam.*

RESOLUTIO.

Sit A punctum, unde deſcenſum inchoat grave; D punctum, a quo vel recedit, vel ad quod accedit, prout caſus tulerit. Radio AD deſcribatur ſemicirculus ANF, ductisque ad punctum curvæ M rectis DM & D*m* infinite propinquis agantur ad axem normales NQ & PM, itemque *nq*, quæ erit ipſi NQ infinite propinqua. Ducatur NT tangens circulum in N (§. 38 *Anal. infin.*) & *n*O normalis ad NQ, tandemque radio DM arculus MR ex centro D.

Sit jam DN = DA = DF = *a*, DQ = *z*, DM = *t*, erit *m*R = *dt*, Q*q* = *n*O = *dz* & QN = $V(a^2-z^2)$ (§. 417 *Geom.*). Quæratur jam ut in problemate anteriore de curva iſochrona (§. 334 & 336) arcus M*m* duplici modo, nempe 1. ex principiis pure geometricis, 2. ex principiis mechanicis, ſeu conditione problematis.

I. Quoniam TN circulum tangit in N *per conſtruct.* angulus TND rectus eſt (§. 38 *Anal. infin.*), adeoque △ DNQ ∽ △ QNT ſeu angulus DNQ = QTN (§. 329 *Geom.*). Sed ob paralleliſmum rectarum *n*O & QT (§. 256 *Geom.*) angulus O*n*N = QTN (§. 233 *Geom.*). Ergo O*n*N = DNQ (§. 87 *Arithm.*). Quare cum DQN & *n*ON ſint recti *per conſtruct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$NQ : DN = nO : Nn$$
$$V(a^2-z^2) : a = dz :$$
$$Nn = adz : V(a^2-z^2)$$

Porro ob ſectores D*n*N & DRM ſimiles (§. 138. 412 *Geom.*)

$$DN : Nn = DM : MR$$
$$a : adz$$

(i) In Actis Erudit. A. 1689. p. 198.
(k) In Actis Erudit. A. 1694 p. 277.
(l) Ibid. p. 371. 394.
(m) In Comment. Academ. Reg. Scient. A. 1699 p. 9 & ſeqq.

$$a : \frac{adz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = t :$$

$$MR = tdz : \sqrt{(a^2-z^2)}$$

$$\text{Hinc } MR^2 = t^2dz^2 : (a^2-z^2)$$

$$\text{Sed } mR^2 = dt^2$$

$$\text{Ergo } Mm^2 = \frac{t^2dz^2}{a^2-z^2} + dt^2$$

$$= \frac{t^2dz^2 + a^2dt^2 - z^2dt^2}{a^2-z^2}$$

II. Quoniam motus per arculum infinite parvum Mm æquabilis ſupponitur, erit ſpatium Mm in ratione compoſita temporis & celeritatis in M acquiſitæ (§. 34). Sed tempus eſt ut mR ſive dt (§. 347) & celeritas in M acquiſita in hypotheſi *Galilæana* ſeu gravitatis conſtantis ut $\sqrt{AP}$ (§. 87). Ergo $Mm = dt.\sqrt{AP}$. Eſt vero ob parallelas QN & PM (§. 268 *Geom.*)

$$DN : DQ = DM : DP$$

$$a : z = t :$$

$$DP = tz : a$$

$$\text{Ergo } AP = AD + DP$$

$$= a + tz : a$$

$$= \frac{a^2 + tz}{a}$$

$$\text{Unde } Mm = dt.\sqrt{AP} \text{ per demonſtr.}$$

$$= dt\sqrt{(a^2+tz)} : \sqrt{a}$$

$$Mm^2 = \frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{1.a}$$

hoc eſt, ſumta a pro unitate,

$$Mm^2 = \frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{a^2}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{a^2} = \frac{a^2dt^2 - z^2dt^2 + t^2dz^2}{a^2-z^2}$$

$$a^4dt^2 + a^2tzdt^2 - a^2z^2dt^2 - tz^3dt^2 = a^4dt^2 - a^2z^2dt^2 + a^2t^2dz^2$$

$$a^2zdt^2 - tz^3dt^2 = a^2t^2dz^2$$

$$dt\sqrt{(a^2z - z^3)} = adz\sqrt{t}$$

$$\sqrt{a}$$

$$dt\sqrt{(a^3z - az^3)} = adz\sqrt{at}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^3z - az^3)}}$$

h. e. $a^{-1:2}t^{-1:2}dt = adz : \sqrt{(a^3z - az^3)}$

$$2a^{-1:2}t^{1:2} = a\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)}).$$

$$a$$

$$2a^{1:2}t^{1:2} = a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$$

$$\int.\ 2\sqrt{at} =$$

Atque hæc eſt æquatio, quam dedit *Leibnitius* pro curva iſochrona paracentrica (n). Omnis itaque rei cardo huc redit, ut $a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$ determinetur, quod membrum æquationis abſolute ſummari nequit. Dari autem poteſt conſtructio ſive per quadraturam, ſive per rectificatio-

(n) In Actis loc. cit. p. 371 & 372.

tionem alicujus curvæ. Dabimus primo conſtructionem per quadraturam.

Quoniam igitur $a^3dz : \sqrt{(a^3z - az^3)}$ eſt elementum curvæ, erit ſemiordinata $v = a^3 : \sqrt{(a^3z - az^3)}$ (§. 98 *Anal. infinit.*)

Ut curvæ hujus indoles detegatur, ponatur

$$v = \infty$$

erit $\sqrt{(a^3z - az^3)} = 0$

$$a^3z - az^3 = 0$$

$$a^2 - z^2 = 0$$

$$a = z$$

Tab. XIV. Fig. 138. Quando itaque z fit a, hoc eſt, DQ degenerat in DC, ſemiordinata CR fit infinita. Eſt adeo CR aſymptotus curvæ.

Fiat $z = 0$

erit $v = \frac{a^3}{0}$

Quare ubi z fit o, ſeu evaneſcit, ſemiordinata DS eſt aſymptotus curvæ.

Quoniam $v = a^3(a^3z - az^3)^{-1:2}$

erit

$$dv = -\tfrac{1}{2}a^3(a^3z - az^3)^{-3:2}(a^3dz - 3az^2dz)$$

Si jam fiat $dv = 0$,

erit

$$-\tfrac{1}{2}a^3(a^3z - az^3)^{-3:2}(a^3dz - 3az^2dz) = 0$$

$$a^3dz = 3az^2dz$$

$$a^2 = 3z^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = z$$

Quando itaque DQ $= \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$, applicata QN fit minima (§. 63 *Analyſ. infin.*)

Quoniam $v = \frac{a^3}{\sqrt{(a^3z - az^3)}} = \frac{a^3}{\sqrt{(a^2 - z^2)}\sqrt{az}}$

erit $\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : \frac{a^2}{\sqrt{az}} = a : v$$

Eſt vero $\sqrt{az}$ ſemiordinata parabolæ QG, cujus parameter $= a$ & abſciſſa DQ (§. 392 *Analyſ.*) & $\sqrt{(a^2 - z^2)}$ ſemiordinata circuli = QF radio DA $= a$ deſcripti (§. 377 *Geom.*). Curva igitur quadranda ita conſtruitur. Circa communem axem AC deſcribatur ſemicirculus AFC radio AD $= a$ & parabola DGB, cujus vertex in D centro ſemicirculi, parametro a radio ſemicirculi æquali. Fiat deinde DI = GQ & DO = DA, itemque DL = QF, ductiſque OK ipſi AI & KI ipſi LQ parallelis; erit DT = QN. Eſt enim

DI : DA = DO : DK

$$\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$$

DL : DO = DK : DT

$V(a^2-z^2) : a = \frac{a^2}{Vaz} : \frac{a^3}{V(a^2-z^2)Vaz}$

Demiſſo itaque ex T perpendiculari TN ad QN; punctum N eſt in curva quæſita. Quodſi tandem ſpatio SDQNH fiat æquale rectangulum ADZV, erit ob AD=a, DZ= $a^2 \int (dz : V(a^3z - az^3))$.

Habemus ergo $\overline{DZ = 2Vat}$

$\overline{\frac{1}{4} DZ^2 = at}$

$\frac{DZ^2}{4a} = t$

Unde rectæ t, quibus puncta in iſochrona paracentrica determinantur, facile inveniuntur. Nimirum fiat Dc = $\frac{1}{4}$DZ & ducatur bc ipſi ZA parallela; erit (§. 268 *Geom.*) DA : DZ = Db : Dc, conſequenter Dc = t. Quare ſi ex centro D radio Dc deſcribatur arcus ſecans DF in M; erit punctum M in iſochrona paracentrica.

Videamus jam porro, quomodo ſummatio formulæ $\frac{dt}{Vt} = \int \frac{adz}{V(a^2z-z^3)}$ reducatur ad rectificationem arcus cujusdam. Quoniam $adz : V(a^2z-z^3)$ eſt elementum arcus, *per hypoth.* erit

$$V(dx^2+dy^2) = \frac{adz}{V(a^2z-z^3)}$$

$$dx^2+dy^2 = \frac{a^2dz^2}{a^2z-z^3}$$

Quoniam coordinatæ curvæ rectificandæ dx & dy per z dari debent, quadratum $a^2dz^2 : (a^2z-z^3)$ ſeu ejus multiplum dividendum eſt in duo alia, quorum latera, ſi fieri poteſt, ſunt ſummabilia. Quamobrem cum numerator a^2dz^2 debeat eſſe aggregatum duorum quadratorum, evidens eſt requiri, ut quadrata non modo diverſa habeant ſigna, verum etiam tales denominatores, qui in ſe invicem ducti producunt a^2z-z^3. Enimvero cum a^2z-z^3 in iſtiusmodi factores reſolvi nequeat, fieri autem id poſſit, ſi mutetur in $a^2z^2-z^4$, cum tunc factores ſint $az+z^2$ & $az-z^2$ (§. 86 *Anal.*); fractio $a^2dz^2 : (a^2z-z^3)$ ducatur in z ut habeatur $a^2zdz^2 : (a^2z^2-z^4)$. Quare ſi laterum numeratores dicantur interea q & w; erunt latera $qdz : (Vaz+z^2)$ & $wdz : (Vaz-z^2)$. Ex differentiandi regulis conſtat, fore latera ſummabilia, ſi fiat $q = \frac{a+2z}{2}$ & $w = \frac{a-2z}{2}$, adeoque ipſa latera fiant $\frac{(a+2z)dz}{2V(az+z^2)}$ & $\frac{(a-2z)dz}{2V(az-z^2)}$.

Videamus itaque, an quadratorum ſumma = $\frac{a^2dz^2}{a^2z-z^3}$. Quoniam

itaque

itaq; $dx = \frac{(a+2z)dz}{2\sqrt{(az+z^2)}}$ & $dy = \frac{(a-2z)dz}{2\sqrt{(az-z^2)}}$

erit $dx^2 = \frac{(a^2+2az+4z^2)dz^2}{4az+4z^2}$ & $dy^2 = \frac{(a^2-4az+4z^2)\,dz^2}{4az-4z^2}$ ſeu reductione ad eandem denominationem facta $dx^2 = (4a^3z + 16a^2z^2 + 16az^3 - 4a^2z^2 - 16az^3 - 16z^4)\,dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$ & $dy^2 = (4a^3z - 16a^2z^2 + 16az^3 + 4a^2z^2 - 16az^3 + 16z^4)\,dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$, adeoque $dx^2 + dy^2 = 8a^3zdz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4) = a^3dz^2 : (2az - 2z^3)$, ſeu multiplum quadrati dividendi conſequenter $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dz\sqrt{a^3} : \sqrt{(2az-2z^3)}$.

Eſt vero $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2z-z^3)}}$

$$\frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{2t}} = \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2z-z^3)}}$$

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} =$$

$$\frac{at^{1:2}dt}{\sqrt{2a}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z-z^3)}} = dv$$

$$\frac{2at^{1:2}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2at} = v$$

$$2at = v^2$$

$$t = v^2 : a$$

Quoniam itaque per hanc æquationem valor ipſius t inveniri poteſt; pro conſtruenda curva iſochrona paracentrica prius conſtrui debet curva, in qua altera coordinata eſt $\sqrt{(az+z^2)}$ ſeu ſemiordinata hyperbolæ æquilateræ, cujus axis tranſverſus $= a$, abſciſſa $= z$ (§. 507 *Analyſ.*), altera $\sqrt{(az-z^2)}$, ſeu ſemiordinata circuli, cujus diameter $= a$, abſciſſa $= z$.

Ut curvæ hujus natura intelligatur, fiat

$$x = \sqrt{(az+z^2)} \qquad y = \sqrt{(az-z^2)}$$

erit $x^2 = az+z^2$ $\qquad y^2 = az-z^2$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + az + z^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} = \tfrac{1}{2}a + z$$

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

$$az = a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - a\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{4}a^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - a\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$az - z^2 = 2a\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$

$$y^2 =$$

$$y^2 + x^2 + a^2 = 2a\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^2x^2 + a^4$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 = 2a^2x^2 - x^4$$

Eſt itaque curva tertii generis (§. 382 *Analyſ.*).

Fiat $x = 0$

 erit

erit $y^4 + 2a^2y^2 = 0$

$$y = 0$$

Fiat $y = 0$

erit $2a^2x^2 - x^4 = 0$

$$2a^2 = x^2$$

$$\sqrt{2a^2} = x$$

Tab. XIV. Fig. 139. In vertice ergo D eſt origo utriusque indeterminatæ x & y. Quando ergo DG $= x = \sqrt{2a^2}$, ſemiordinata y evaneſcit, adeoque curva ſecat axem in G.

Porro ſi æquatio differentietur, erit

$$4y^3dy + 4yx^2dy + 4y^2xdx + 4a^2ydy = 4a^2xdx - 4x^3dx$$

Quare ſi fiat $dy = 0$, erit

$$4y^2xdx = 4a^2xdx - 4x^3dx$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

quæ eſt maxima applicata (§. 63 *Analyſ. infinit.*). Quoniam vero $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ eſt ſemiordinata circuli HI (§. 377 *Anal.*), maxima applicata cadit in I, ubi circulus ex centro D radio DN $= a$ deſcriptus curvam ſecat.

Ponatur in æquatione $a^2 - x^2 = y^2$ valor ipſius $y^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$, habemus

$$a^2 - x^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$

$$2a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$a = \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$a^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{3}{4}a^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = DH$$

Quodſi ponamus abſciſſarum originem in G & GQ $= v$, erit DQ $= x = b - v$, adeoque æquatio ob $b = \sqrt{2a^2}$ in hanc degenerat:

$$b^2(b-v)^2 - (b-v)^4 = y^4 + 2y^2(b-v)^2 + b^2y^2$$

Fiat jam $v > b$, e. gr. $= \frac{3}{2}b$

erit $b - v = b - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{2}b$

$(b-v)^2 = \frac{1}{4}b^2$ $2(b-v)^2 = \frac{1}{2}b^2$

$(b-v)^4 = \frac{1}{16}b^4$

conſequenter

$$\tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{16}b^4 = y^4 + \tfrac{1}{2}b^2y^2 + b^2y^2$$

h. e. $\frac{3}{16}b^4 = y^4 + \frac{3}{2}b^2y^2$

Cum itaque valor ipſius y non fiat imaginarius, etiamſi v ſeu GQ ſumatur major quam GD, ſeu axe curvæ GIFDIG; curva ultra D continuatur, adeoque ſe mutuo ſecant partes in D, hoc eſt, curva nodum in D habet. Ex conſtructione autem patet, partem inferiorem fore priori ſimilem.

Ut determinetur angulus, ſub quo curva axem in D ſecat, inveſtiganda eſt ut ſupra (§. 336) ratio laterum infinite parvorum Dq & qf.

& qf. Quodſi enim Df ſumatur pro ſinu toto, fq ſinus, Dq coſinus anguli quæſiti. Quodſi ergo in communi axe hyperbolæ atque circuli genetricium abſciſſa ſumatur dz, ſemiordinata hyperbolæ erit $V(adz+dz^2)$ (§.507 *Analyſ.*), circuli vero $V(adz-dz^2)$ (§. 377 *Analyſ.*), hoc eſt, eum dz^2 differentiale ſecundi gradus reſpectu primi adz evaneſcat, utrobiq; $=Vadz$. Quoniam itaque per conſtructionem Dq eſt ſemiordinata hyperbolæ & qf ſemiordinata circuli; erit ad verticem $qf=q$D, adeoque qDf angulus curvæ cum axe ſemirectus (§. 241 *Geom.*), conſequenter angulus curvæ rectus eſt.

Poteſt idem etiam aliis modis oſtendi. Nimirum

$$qD=dx=\frac{(a+2z)\,dz}{2V(az+z^2)}$$

$$qf=dy=\frac{(a-2z)\,dz}{2V(az-z^2)}$$

Sed in eaſu inſtantis evaneſcentiæ z fit dz. Quare ſi pro z ſubſtituatur dz, erit

$$qD=\frac{adz+2dz^2}{2V(adz+dz^2)}$$

$$qf=\frac{adz-2dz^2}{2V(adz-dz^2)}$$

Eſt vero dz^2 reſpectu $dz=0$. Ergo per ea, quæ modo diximus.

$$qD=\frac{adz}{2Vadz}=\tfrac{1}{2}Vadz$$

$$qf=\frac{adz}{2Vadz}=\tfrac{1}{2}Vadz$$

Ergo qD$=qf$, ut ante.

Idem inveniri debet, ſi in æquatione differentiali ad curvam pro x ſubſtituatur dx & pro y ponatur dy. *Æquatio enim $a^2xdx-x^3dx=y^3dy+x^2ydy+a^2ydy$ facta ſubſtitutione in ſequentem degenerat:

$$a^2dx^2-dx^4=dy^4+dx^2dy^2+a^2dy^2$$

Quare cum ſit $dx^4=0$

$$dy^4=0 \quad dx^2dy^2=0$$

erit $a^2dx^2=a^2dy^2$

$$dx^2=dy^2$$

$$dx=dy$$

hoc eſt, qD$=qf$, ut ante.

Immo poteſt etiam in æquatione ad curvam $2a^2x^2-x^4=y^4+2y^2x^2+2a^2y^2$ pro x ſubſtitui dx & in locum ipſius y ſurrogari dy: quo facto habemus

$$2a^2dx^2-dx^4=dy^4+2dy^2dx^2+2a^2dy^2$$

Sed $dx^4=0$ $dy^4=0$ $2dy^2dx^2=0$

Ergo $2a^2dx^2=2a^2dy^2$

$$dx=dy, \text{ ut ante.}$$

Ut

Ut tandem etiam intelligatur natura iſochronæ paracentricæ, cum pro ea ſit

$$\frac{aat}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z-z^3)}} = dv$$

ſeu $t = v^2 : 2a$,

ſi fiat $dz = 0$

erit $dv = 0$

adeoque $t = 0$

Curva itaque axem in D ſecat.

Ex ipſa autem conſtructione apparet, ſi DQ $= z$ fiat $= a$, ſeu DN, rectam DM in O cadere, atque adeo curvam axem ibidem ſecare, ultra eum ex altera parte continuandam. Eſt vero tum $v =$ DFIG, adeoque DO $=$ (DFIG)^2: $2a$.

Patet idem ex valoribus x & y. Etenim ſi ſit

$$z = a$$

erit $x = \sqrt{(az + z^2)}$
$= \sqrt{2a^2} =$ DG
& $y = \sqrt{(az - z^2)}$
$= \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$

adeoque DO $= t = v^2 : 2a$
$=$ (DFIG)^2 : $2a$

Habemus hinc
DO : DFIG $=$ DFIG : $2a$

Quoniam vero curva iſochrona paracentrica utrinque ultra axem continuatur, ſe mutuo in O partes ſecant.

SCHOLION.

350. *Poterat quoque problema præſens ad modum præcedentis variis modis univerſalius reſolvi, nimirum in quacunque gravitatis hypotheſi, cum in ſolutione* Galilæanam *ſuppoſuerimus ſumentes celeritatem acquiſitam in ratione ſubduplicata altitudinis. Sed non opus eſt, ut iſtiusmodi ſolutionibus immoremur.*

DEFINITIO 39.

351. *Curva Tautochrona* dicitur, in qua mobile per quoscunque arcus eodem tempore deſcendit.

COROLLARIUM.

352. Quoniam deſcenſus per Cycloidem & quemcunque ejus arcum ſunt æquidiuturni (§. 311); cyclois curva tautochrona eſt (§. 351).

PROBLEMA 50.

353. *Determinare tempus deſcenſus per curvam in quacunque gravitatis hypotheſi, ſive directiones ſupponantur parallelæ, ſive convergentes.* Tab. XIV. Fig. 140.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AP, per quam deſcendit grave, AMB curva deſcenſus, ANR curva celeritatis, PN celeritas in P acquiſita, in C centrum gravium. Radiis CM & cm infinite propinquis deſcribantur arcus PM & pm, ſitque AP $= x$, PM $= y$: erit Pp $=$ MR $= dx$, R$m = dy$, adeoque M$m =$

$\sqrt{(dx^2}$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Quoniam motus per M æquabilis, erit $Mm = dt.PN$ (§. 34), conſequenter

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dt.PN$$

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{PN}$$

Si punctum C infinite diſtet, arcus PM & *pm* evadent rectæ ad AC perpendiculares, manentque omnia ut ante.

Quodſi ex hypotheſi gravitatis ſpeciali ſubſtituatur valor ipſius PN, ſive celeritatis; prodibit valor temporis pro illa gravitatis hypotheſi. Si vero ulterius ex æquatione ad curvam ſubſtituatur valor ipſius y per x; prodibit tempus in caſu ſpeciali dato.

In hypotheſi *Galilæana* $PN = \sqrt{x}$ ſive, ſi parameter parabolæ, quæ curva celeritatum ANR, fuerit a, $PN = \sqrt{ax}$ (§. 87). Ergo tempus per $Mm = \sqrt{(dx^2+dy^2)} : \sqrt{ax}$, adeoque $dt^2 = (dy^2+dx^2) : ax$.

Sit jam curva deſcenſus AMB etiam parabola, cujus vertex in A, axis AT; erit in hypotheſi directionum parallelarum $AQ = PM = y$, $QM = AP = x$, adeoque (§. 388 *Analyſ.*),

$$x^2 = ay$$

$$2xdx = ady$$

$$4x^2dx^2 : a^2 = dy^2$$

Ergo $$dt^2 = \left(\frac{4x^2dx^2}{a^2} + dx^2\right) : ax$$

$$= \frac{(4x^2+a^2)dx^2}{a^3x}$$

$$dt = \frac{dx\sqrt{(4x^2+a^2)}}{\sqrt{a^3x}}$$

Quoniam $dt = \sqrt{(dx^2+dy^2)} : \sqrt{ax}$; poterat idem valor facilius inveniri, elementum arcus parabolici $Mm = dx\sqrt{(4x^2+a^2)} : a$ (§. 146 *Anal. infin.*). dividendo per celeritatem in M acquſitam $= \sqrt{ax}$.

Eſt igitur $t = \int(dx\sqrt{(4x^2+a^2)} : a\sqrt{ax}) = PO$.

Quodſi per quadraturam alicujus curvæ ANR curva temporum conſtrui debet, dividendo ſpatium APN per quantitatem conſtantem a; erit elementum illius curvæ $PNnp = dx\sqrt{(4x^2+a^2)} : \sqrt{ax}$.

Quare cum ſit $Pp = dx$; erit ſemiordinata ejus $PN = \sqrt{(4x^2+a^2)} : \sqrt{ax}$, ſeu, ſi $a = 1$, $PN = a\sqrt{(4x^2+a^2)} : \sqrt{ax}$. Eſt vero $\sqrt{ax}$ ſemiordinata parabolæ, cujus abſciſſa $AP = x$, parameter $= a$ (§. 392 *Analyſ.*), $\sqrt{(4x^2+a^2)}$ abſciſſa hyperbolæ æquilateræ a centro computata, cujus axis tranſverſus $= 2a$, ſemi-

 ordi-

ordinata $= 2y$ (§. 147 *Anal. infin.*). Curva igitur, a cujus quadratura pendet conſtructio curvæ temporum, ita conſtruitur. Circa communem axem AX conſtruatur parabola AMT & hyperbola æquilatera AOV (§. 472 *Anal.*), cujus centrum in C, axis dimidius AC $= a$, qui ſimul parabolæ AMT parameter. Ducta ſemiordinata parabolæ PM, fiat CQ $= 2$ AP $= 2x$, erit ex Q erecta ad CQ perpendiculari QO $= \surd(4x^2 + a^2)$. Ducatur TF parallela ipſi CX per punctum M & AH parallela ipſi QG, erit TL $=$ CA $= a$ & TC $=$ PM $= \surd ax$. Fiat TG $=$ QO $= \surd(4x^2 + a^2)$ & ducatur FG parallela ipſi LC, erit (§. 268 *Geom.*). Tab. XIV. Fig. 141.

$$TC : TL = TG : TF$$

$$\surd ax : a = \surd(4x^2 + a^2) :$$

$$TF = \frac{a\surd(4x^2 + a^2)}{\surd ax}$$

Quodſi ergo PM continuetur in N, donec PN $=$ TF, erit punctum N in curva temporum.

Si curvæ temporum conſtructionem ad rectificationem alicujus curvæ reducere volueris; fiat

$$\frac{dx\surd(a^2 + 4x^2)}{a\surd ax} = \surd(dz^2 + dy^2)$$

erit $\frac{a^2dx^2 + 4x^2dx^2}{a^3x} = dz^2 + dy^2$

Fiat jam $dz^2 = \frac{dx^2}{ax}$

$$dy^2 = \frac{4x^2dx^2}{a^3x} = \frac{4xdx^2}{a^3}$$

erit $a^{-1:2}x^{-1:2}dx = dz$

$$2a^{-1:2}x^{1:2} = z$$

$$\frac{2\surd x}{\surd a} = z$$

$$dy = 2x^{1:2}a^{-3:2}dx$$

$$y = \tfrac{4}{3}x^{3:2}a^{-3:2} = \frac{4x\surd x}{3a\surd a}$$

ſit $a = 1$; erit

$$z = 2\surd ax \qquad y = \frac{4x\surd x}{3\surd a}$$

$$z^2 = 4ax \qquad \tfrac{9}{16}ay^2 = x^3$$

Æquatio prima eſt ad parabolam Apollonianam (§. 388 *Anal.*) cujus parameter $4a$, abſciſſa x, ſemiordinata z: altera vero ad parabolam ſecundi generis, cujus parameter $= \frac{9}{16}a$, abſciſſa ad parabolam externam relata $= x$, ſemiordinata $= y$, ſeu abſciſſa $= y$, ſemiordinata $= x$ (§. 519 *Analyſ.*). Conſtruenda igitur eſt parabola pa- Tab. XIV. Fig. 142.

parametro $4a$ AMR (§. 393 *Anal.*) & alia ſecundi generis, cujus parameter $\frac{9}{12}a$, ANT (§. 581 *Anal.*): erit PM $= z$ abſciſſa, PN $=$ AQ $= y$ ſemiordinata curvæ, a cujus quadratura pendet conſtructio curvæ temporis. Ut curvæ hujus natura intelligatur, ſubſtituatur in æquatione $x^3 = \frac{9}{12}ay^2$ valor ipſius $x = z^2 : 4a$ ex æquatione prima inventus, erit ob $x^3 = z^6 : 64a^3$ æquatio ad illam curvam

$$\frac{z^6}{64a^3} = \frac{9}{12}ay^2$$

adeoque $z^6 = 36a^4y^2$

quæ eſt curva quinti generis (§. 382 *Analyſ.*) ex familia parabolarum, ſeu paraboliformium (§. 519 *Analyſ.*).

Tab. XIV. Fig. 143. Sit DMA quadrans circuli, cujus radius CA $= a$, CP $= x$ erit M$m = adx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 153 *Anal. infin.*), adeoque $dt = adx : \sqrt{(a^2 - x^2)}\sqrt{ax}$, quod elementum cum coincidat cum eo, quod paulo ante (§. 349) pro invenienda curva iſochrona paracentrica reperimus; quæ ad ejus ſummationem ſpectant, ibidem relegenda ſunt.

Tab. III. Fig. 39. Sit CMD cyclois, AOB ſemicirculus genitor, DN $= x$, AD $= a$, erit AN $= a - x$. Quare cum M$m = dx\sqrt{a} : \sqrt{x}$ (§. 168 *Analyſ. infin.*); erit

$$dt = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{adx\sqrt{a}}{a\sqrt{(ax-x^2)}}$$

$$t = \frac{\sqrt{a}}{a} \cdot \int \frac{adx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

Enimvero $\int(adx : \sqrt{(ax-x^2)})$ $=$ arcui DO (§. 157 *Analyſ. infin.*), $\sqrt{a} = \sqrt{}$AD & $a =$ AD. Ergo tempus deſcenſus per arcum MC $= \sqrt{}$AD. DO : AD.

Quodſi ergo x ſive DN degeneret in a ſive AD, erit tempus deſcenſus per ſemicycloidem CMD $= \sqrt{}$AD. DOA : DA.

PROBLEMA 51.

354. *Determinare tempus deſcenſus in convexitate curvæ, in quacunque gravitatis hypotheſi, ſive directiones ſint parallelæ ſive convexæ.* Tab. XIV. Fig. 140.

RESOLUTIO.

Sit ANR curva, per quam grave deſcendit, AP $= x$, PN $= y$, erit N$n = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit celeritas in P acquiſita $= v$, erit ut in probl. præced. (§. 353), ſi elementum temporis fuerit dt, $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : v$.

In hypotheſi *Galilæana* $v = Vx$. Ergo $dt = V(dx^2 + dy^2) : Vx$. Quare ſi ex æquatione ad curvam deſcenſus ſubſtituatur ut ibidem valor ipſius dy^2; prodibit æquatio ad curvam temporis.

Sit ANR parabola; erit (§. 21 *Anal. infin.*)

$$adx = 2ydy$$

$$\frac{adx}{2y} = dy$$

$$dy^2 = a^2dx^2 : 4y^2$$
$$= a^2dx^2 : 4ax$$

Quare

$$dt = V\left(dx^2 + \frac{a^2dx^2}{4ax}\right) : Vx$$

$$= \frac{dxV(4ax + a^2)}{V4axVx}$$

$$= \frac{dxV(4ax + a^2)}{2Vax^2} = \frac{dxV(ax + \frac{1}{4}a^2)}{Va}$$

$$t = \int dxV(ax + \tfrac{1}{4}a^2) : xVa$$

Quare ſi hic valor ſumitur pro ſpatio curvilineo per Va diviſo; erit ſemiordinata curvæ, a cujus quadratura conſtructio curvæ temporis pendet, $V(ax + \frac{1}{4}a^2) : x$. Eſt vero $V(ax + \frac{1}{4}a^2)$ ſemiordinata parabolæ, cujus parameter $= a$, ſi abſciſſæ a foco, cujus diſtantia a vertice $= \frac{1}{4}a$ (§. 396 *Analyſ.*) computentur. Quare curvæ quadrandæ vertex eſt in foco parabolæ & aſſumta parametro a pro unitate, ſemiordinata curvæ, a cujus quadratura conſtructio curvæ temporis pendet, eſt quarta proportionalis ad parabolæ abſciſſam a centro computatam, ſemiordinatam & parametrum. Sit ſemiordinata hujus curvæ $= v$, erit

$$v = aV(4ax + a^2) : 2x$$

$$vx = \tfrac{1}{2}aV(4ax + a^2)$$

$$v^2x^2 = a^3x + \tfrac{1}{4}a^4$$

Eſt igitur curva tertii generis (§. 382 *Analyſ.*), ſed facillimæ, quemadmodum apparet, conſtructionis.

Quodſi conſtructionem curvæ temporis reducere volueris ad rectificationem alicujus curvæ, cujus elementum $= V(dz^2 + dy^2)$, abſciſſa ſcilicet exiſtente z, ſemiordinata y; erit

$$\frac{4axdx^2 + a^2dx^2}{4ax^2} = dz^2 + dy^2$$

Fiat

$$dz^2 = \frac{4axdx^2}{4ax^2} \qquad dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4ax^2}$$

$$= dx^2 : x \qquad = adx^2 : 4x^2$$

$$dz = x^{-1:2}dx \qquad dy = \frac{dxVa}{2x}$$

$$z = 2x^{1:2} \qquad y = \int \frac{dxVa}{2x}$$
$$= 2Vx$$

Eſt

Eſt vero $\sqrt{x}$ ſemiordinata parabolæ, cujus parameter = 1, (§. 392 *Anal.*) & $\int \frac{dx}{x}$ ſpatium hyperbolicum aſymptoticum, cujus latus potentiæ = 1 (§. 120 *Anal. infin.*). Quare curva, a cujus rectificatione pendet curvæ temporis conſtructio, conſtruetur, ſi abſciſſæ fiant ſemiordinatis parabolæ duplis, ſemiordinatæ autem ſpatiis hyperbolicis dimidiis per $\sqrt{a}$ diviſis æquales, axe parabolæ exiſtente ſimul aſymptoto hyperbolæ. Arcus hujus curvæ erunt ut tempus deſcenſus per convexitatem parabolæ.

Si curva ANR fuerit cyclois & diameter circuli genitoris = 1, erit $Nn = dx : \sqrt{x}$ (§. 368 *Anal. infin.*), adeoque $dt = dx : x$. Pendet adeo temporis determinatio a quadratura hyperbolæ intra aſymptotos (§. 120 *Anal. infin.*): Et quoniam $t = \int dx : x$, ſed $\int dx : x$ logarithmus ipſius x ſumtus in logarithmica, cujus ſubtangens = 1 (§. 243 *Anal. infin.*), tempus deſcenſus per convexitatem cycloidis etiam per logarithmos determinari poteſt.

DEFINITIO 40.

355. *Curva brachyſtochrona* eſt, per quam grave tempore minore a puncto dato ad aliud datum, quam per quamvis aliam deſcendit. Dicitur etiam *Oligochrona*, item *curva celerrimi deſcenſus.*

SCHOLION.

356. *Problema hoc propoſuit* Joannes Bernoulli. *Analyſi ſuppreſſa cycloidem eſſe monuerunt* Leibnitius (o) & Hoſpitalius (p). *Solutionem integram exhibuit* Jacobus Bernoulli (q), *methodo ſynthetica ex natura deſcenſus celerrimi quandam ejus proprietatem deducens, quam cycloidi convenire poſtea oſtendit.* Joannes *vero* (r) *ex fundamentis diopt ricis id ſolvit, propterea quod advertit eam eandem eſſe cum curvatura radii per medium uniformiter denſum propagati. Equidem ſolutio facilis videri poterat prima fronte. Cum enim tempus deſcenſus per arculum Mm infinite parvum ſit minimum, hoc vero ſit* $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$ *in hypotheſi* Galilæana (§. 354); *non alia re opus eſſe videbatur, quam ut ejus differentiale ponatur nihilo æquale* (§. 63 Analyſ. infin.). *Enimvero tentanti apparebit, ſic nos delabi ad æquationem differentialem tertii gradus. Alia igitur via incedere libet, quæ nos tandem deducit ad analogiam* Joannis Bernoulli *ſine ſuppoſita identitate* Brachyſtochronæ *cum curvatura radii per medium non uniformiter denſum.*

(o) In Actis Erudit. A. 1697 p. 203.
(p) Ibid. p. 217.
(q) Ibid. p. 212.
(r) Ibid. p. 207 & ſeqq.

Tab. XIV. Fig. 144.

PROBLEMA 52.

357. *Invenire curvam brachyſtochronam ſive celerrimi deſcenſus.*

RESOLUTIO.

Sint ſemiordinatæ PM, *pm* & Q*n* infinite propinquæ, & P*p*=*p*Q; erunt arcus M*m* & *mn* infinite parvi, & demiſſis perpendicularibus MR & *m*O, erectaque perpendiculari *n*S ipſi *pm* continuatæ in S occurrente, erit MR=*m*O=*n*S & RS reſpectu arcus M*n* conſtans.

Sit jam AP=x, PM=y; erit P*p*=PQ=MR=*n*S=dx, *m*R=dy & M*m*=$\surd(dx^2+dy^2)$. Sit RS=b; erit *m*S=O*n*=$b-dy$, adeoque *mn*=$\surd(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)$.

Quoniam motus per M*m* eſt æquabilis, erit toto tempuſculo deſcenſus celeritas conſtans, nempe ea, quæ deſcenſu per altitudinem AP acquiſita. Ex eadem ratione celeritas in deſcenſu per arculum *mn* conſtans eſt, nempe ea, quæ deſcenſu per altitudinem AQ acquiſita. Sit prior=c, poſterior=C, erit tempus deſcenſus per M*m* = $\surd(dx^2+dy^2):c$ & tempus per *mn*=$\surd(dx^2+b^2-2bdy+dy^2):C$ (§. 34), conſequenter tempus deſcenſus per M*m*+*mn* = $dt = \frac{\surd(dx^2+dy^2)}{c} + \frac{\surd(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}{C}$. Quoniam tempuſculum minimum eſt, & dx conſtans, dy vero variabilis, erit (§. 63 *Anal. infinit.*).

$$ddt = \frac{dyddy}{c\surd(dx^2+dy^2)} + \frac{dyddy-2bddy}{C\surd(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)} = 0$$

hoc eſt

$$\frac{dy}{c\surd(dx^2+dy^2)} = \frac{b-dy}{C\surd(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}$$

ſive

$$\frac{mR}{c.\,Mm} = \frac{mS}{C.\,mn}$$

$$C.\,mn.\,mR = c.\,Mm.\,mS$$

adeoque

$$Mm:mn = C.\,mR:c.\,mS$$

Jam in hypotheſi *Galilæana* $C=\surd Ap$ & $c=\surd AP$ (§. 87).

Quare M*m*: *mn*=*m*R. $\surd Ap$: *m*S. $\surd AP$

Quæ eſt proprietas curvæ brachyſtochronæ a *Jacobo Bernoulli* alia via erutæ.

Quodſi fiat M*m*=*mn*, erit C. *m*R=*c*. *m*S, adeoque

$$c:C=mR:mS$$

$$\&\ c:mR=C:mS$$

hoc eſt, elementa ſemiordinata-

rum

rum mR & mS ſive nO ſunt ut celeritates acquiſitæ, ſeu ad has celeritates in ratione conſtante: id quod eſt fundamentum ſolutionis *Joannis Bernoulli* ex dioptricis principiis ab ipſo derivatum.

Quodſi jam arcus $Mm = V(dx^2 + dy^2)$ ſumatur conſtans, dx fiet variabilis. Sit celeritas in M acquiſita $= v$ & ratio conſtans ipſius dy ad eandem $= Mm : a$, erit

$$dy : v = V(dx^2 + dy^2) : a$$

$$a dy = v V(dx^2 + dy^2)$$

$$a^2 dy^2 = v^2 dx^2 + v^2 dy^2$$

$$a^2 dy^2 - v^2 dy^2 = v^2 dx^2$$

$$dy^2 = \frac{v^2 dx^2}{a^2 - v^2}$$

$$dy = \frac{v dx}{V(a^2 - v^2)}$$

Formula hæc generalis eſt & in omni hypotheſi gravitatis, etiam utcunq; variabilis, obtinet. Quodſi jam ſubſtituatur valor ipſius v ex data gravitatis hypotheſi, prodibit formula ſpecialis.

Sit itaque in hypotheſi gravitatis conſtantis

$$v^2 = ax, \text{ adeoque } v = Vax$$

erit
$$dy = \frac{dx Vax}{V(a^2 - ax)}$$

$$= \frac{dx Vx}{V(a-x)}$$

$$= \frac{x dx}{V(ax - x^2)}$$

Eſt vero $x dx : V(ax - x^2)$ differentia inter $adx : 2V(ax - x^2)$ & $(adx - 2x dx) : 2V(ax - x^2)$. Ergo

$$dy = \frac{adx}{2V(ax - x^2)} - \frac{(adx - 2x dx)}{2V(ax - x^2)}$$

$$y = \int \frac{adx}{2V(ax - x^2)} - \frac{\int (adx - 2x dx)}{2V(ax - x^2)}$$

$$= \int \frac{adx}{2V(ax - x^2)} - V(ax - x^2)$$

Eſt vero $V(ax - x^2)$ ſemiordinata circuli DH diametro $CB = a$ deſcripti (§. 377 *Analyſ.*) & $\int (adx : 2V(ax - x^2))$ arcus CH (§. 157 *Anal. infin.*). Quamobrem $y =$ arcui $CH - DH = PM$. Eſt vero in cycloide $MH =$ arcui BH (§. 575 *Analyſ.*) & $AC = PM + MH + HD$ = arc. CH + arc. HB (§. 574 *Analyſ.*). Ergo in eadem arc. $CH = PM + HD$, conſequenter PM eſt æqualis differentiæ inter arcum CH & ejus ſinum HD. Tab. XV. Fig. 145.

Curva igitur celerrimi deſcenſus ſive brachyſtochrona eſt cyclois, adeoque eadem cum tautochrona (§. 352).

COROLLARIUM.

358. Quoniam in cycloide PM = arc. CH –

CH—HD (§. 357); ſi utrumque multiplicationis membrum multiplices per dimidium circuli genitoris radium = $\frac{1}{2}$ OC, prodibit

$\frac{1}{2}$ OC. PM = $\frac{1}{2}$ OC. arc. CH — $\frac{1}{2}$ OC. HD
$\frac{1}{2}$ OC. arc. CH = Sect. COH (§. 435 *Geom.*)
$\frac{1}{2}$ OC. HD = △ COH (§. 392 *Geom.*)

$\frac{1}{2}$ OC. PM = Sect. COH — △ COH = ſegmento HIC (§ 436 *Geom.*)

Eſt adeo cyclois externa ſegmentorum circularium repræſentatrix.

SCHOLION I.

359. *Elegantem hanc cycloidis proprietatem, etſi ad mechanicam non ſpectet, hic tamen annotari conſultum fuit, ubi ex demonſtratis tanta facilitate fluit. Poterat vero etiam ex formula analytica deduci. Etenim elementum arcus* AC = adx : 2$\sqrt{}$(ax—x²) (§. 157 Anal. infin.), *qui in* $\frac{1}{2}$ CO = $\frac{1}{4}$ a *ductus producit elementum ſectoris* = a²dx : 8$\sqrt{}$(ax—x²) (§. 435 Geom.). *Quodſi porro* DH *altitudinem* △ COH = $\sqrt{}$(ax—x²) *in baſin ejus dimidiam* $\frac{1}{2}$ CO = $\frac{1}{4}$ a *ducas, prodibit area* △ COH = $\frac{1}{4}$ a $\sqrt{}$(ax—x²) (§. 392 Geom.), *cujus adeo elementum* = (a²dx—2axdx) : 8$\sqrt{}$(ax—x²). *Quare ſi hoc elementum trianguli ab elemento ſectoris auferas, relinquetur elementum ſegmenti* HIC = axdx : 4$\sqrt{}$(ax—x²) (§. 436 Geom.). *Eſt vero elementum ipſius* PM = xdx : $\sqrt{}$(ax—x²) (§. 357). *Quodſi ergo idem in* $\frac{1}{4}$ a *ſeu* $\frac{1}{2}$ CO *ducas, prodibit* axdx : 4$\sqrt{}$(ax—x²) *elementum ſectoris modo repertum, conſequenter ſector* = $\frac{1}{4}$ a ∫ (xdx : $\sqrt{}$(ax—x²)) = $\frac{1}{2}$ CO. PM.

SCHOLION 2.

360. *Quodſi detur altitudo, per quam grave ad locum datum in linea curva celerrime deſcendere debet, cyclois deſcribenda eſt per duo puncta data. Quamobrem ut problema ad praxin transferri poſſit, oſtendendum adhuc erit, quomodo cyclois per data duo puncta deſcribatur.*

PROBLEMA 53.

361. *Deſcribere cycloidem per data duo puncta* A & C *tranſeuntem.* Tab. XV. Fig. 146.

RESOLUTIO.

1. Jungantur puncta data A & C recta AC &
2. Deſcribatur cyclois quæcunque ABD, circulo genitore END, quæ rectam AC in B ſecet.
3. Fiat deinde AB : AC = ED : FG, erit FG diameter circuli genitoris cycloidis per puncta A & C tranſeuntis: quo dato
4. Cyclois ACG deſcribi poteſt (§. 573 *Anal.*).

DEMONSTRATIO.

Id unice demonſtrandum, eſſe AB : AC = ED : FG, quod ut fiat, ducantur rectæ SP & TQ ad AH perpendiculares, quæ erunt inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*). Et quoniam HA, DE & GF perpendiculares ad AF *per conſtr.* erunt quoque eædem inter ſe parallelæ (§. *cit.*

(§. cit. Geom.). Et SP ad ED, TQ ad FG perpendiculares (§. 230 Geom.), conſequenter (§. 268 Geom.) AB : AC = SB : TC = AS : AT = EP : FQ, ob EP = AS & AT = FQ (§. 168 *Arithm.*). Sed SB = arc. BN − PN & TC = arc. FR − QR (§. 357). Ergo EP : FQ = arc. EN − PN : arc. FR − QR (§. 167 *Arithm.*), conſequenter DE. EP : DE. FQ = ſegm. EN : ſegm. FR (§. 185 *Arithm.*), quia ſcilicet $\frac{1}{2}$ DE (arc. EN − PN) = ſegm. EN & $\frac{1}{2}$ DE (arc. FR − QR) = ſegm FR (§. 436 *Geom.*). Eſt vero DE : EN = EN : EP & FG : FR = FR : FQ (§. 330 Geom.), adeoque DE. EP = EN^2 & FG. FQ = FR^2 (§. 377 Geom.), conſequenter $EN^2 : FR^2$ = ſegm. EN : ſegm. FR (§. 167 *Arithm.*). Sunt itaque ſegmenta EN & FR ſimilia (§. 406 Geom.) & hinc etiam arcus cognomines ſimiles ſunt, conſequenter EP : FQ = ED : FG (§. 12 *Trigon.*). Quare cum ſit AB : AC = EP : FQ *per demonſtrata*; erit etiam AB : AC = ED : FG (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Poteſt idem multo brevius ex principiis noſtris ſimilitudinis oſtendi, alibi propoſitis (s); ſcilicet cum omnes cycloides ſint inter ſe ſimiles, erunt omnes lineæ eodem modo ad eas determinatæ proportionales. Sed AB & AC ſunt chordæ arcuum cycloidicorum eandem baſin AF ſub eodem angulo ſecantes, adeoque eodem modo determinatæ, & diametri circulorum genitorum ſunt rectæ ex medio baſium normaliter erectæ, conſequenter itidem eodem modo determinatæ. Patet ergo eſſe diametros circulorum genitorum ED & FG ipſis AB & AC proportionales. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

362. Patet hinc præſtantia principiorum noſtrorum ſimilitudinis, ob quam merentur, quæ in Geometriam recipiantur, & ob quam etiam in eandem ipſis aditum aperuimus. Sane ſi quis analyſin ſimilitudinis invenire vellet, ex iſtis principiis deducenda forent, quæ ad eam pertinent. Per eam vero analyſin, quæ ad ſimilitudinem ſpectant, multo facilius reperirentur, quam per analyſin magnitudinum, qua nunc ſola utimur in Geometria.

SCHOLION 2.

363. Suppoſuimus in demonſtratione, ſegmenta circulorum ſimilia eſſe in ratione duplicata chordarum, nempe $EN^2 : FR^2$ = ſegm. EN : ſegm. FR *vi principiorum Geometriæ, ex quibus id facile colligitur. Quodſi quis non videat,* quo-

(s) In Actis Erudit. A. 1715 p. 213 & ſeqq.

quomodo idem inde inferatur, demonſtrationem hic ſubjicere licet per modum lemmatis & quidem multo univerſalius.

LEMMA I.

Tab. XIV. Fig. 146. 364. *Sectores ſimiles & ſegmenta ſimilia circuli habent rationem duplicatam radiorum, ſubtenſarum & ipſorum arcuum: immo ſegmenta ſimilia curvarum ſimilium habent rationem duplicatam ſubtenſarum & ipſorum arcuum, aliarumque linearum quarumcunque eodem modo determinatarum.*

DEMONSTRATIO.

Sector FOR æqualis eſt triangulo rectangulo, cujus baſis eſt arcus FR, altitudo radius FO, & ſector ENQ æqualis eſt triangulo rectangulo, cujus baſis eſt arcus EN, altitudo radius EQ (§. 415 *Geom.*). Eſt vero ſector FOR ſimilis ſectori ENQ *per hypoth.* quare cum ſectores per rationem arcuum ad radios diſcerni poſſint, erunt arcus FR & EN radiis ſuis FO & EQ proportionales (§. 24 *Arithm.*), conſequenter triangula, quibus ſectores æquales ſunt, inter ſe ſimilia ſunt (§. 183 *Geom*). Sunt igitur ſectores in ratione duplicata radiorum & arcuum (§. 398 *Geom.*). *Quod erat unum.*

Quoniam arcus FR & EN ſimiles ſunt, cum alias ſegmenta per eorum ad peripheriam rationem diſcerni poſſent, contra hypotheſin (§. 24 *Arithm.*), in triangulis FOR & EQN anguli cognomines ſunt æquales (§. 141 *Geom.*), conſequenter cum utrobique crura ſibi invicem ſint æqualia (§. 40 *Geom.*), ipſa triangula ſimilia ſunt (§. 183 *Geom.*), adeoque in ratione duplicata radiorum (§. 398 *Geom.*). Eſt igitur ſector FRO: ſect. EQN = △ FRO : △ ENQ (§. 167 *Arithm.*), conſequenter ſect. FRO − △ FRO: ſect. EQN − △ ENQ = ſect. FRO: ſect. EQN (§. 189 *Arithm.*). Ergo cum ſect. FRO − △ FRO = ſegmento FR & ſect. EQN − △ ENQ = ſegment. EN, quod per ſe patet, ſegment. FR: ſegm. EN = ſector FRO: ſect. EQN (§. 168 *Arithm.*). Sunt vero ſectores FRO & EQN in ratione duplicata radiorum FO & EQ, atque arcuum FR & EN *per demonſtr.* Ergo & ſegmenta FR & EN in ratione duplicata radiorum & arcuum ſunt (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat ſecundum.*

Arcus FR & EN ſunt ſimiles *per hypoth.* Ergo eorum ſinus (§. 12 *Trigon.*), conſequenter & ſinuum duplæ (§. 2 *Trig.*) chordæ ſunt arcubus proportionales (§. 178 *Arithm.*). Sunt vero ſectores atque ſegmenta in ratione dupli-

cata arcuum, *per demonſtrata.* Ergo & in ratione duplicata chordarum (§. 167. 260 *Arithm.*).

Idem vero multo univerſalius de quibuscunque curvarum ſimilium ſegmentis ſimilibus demonſtratur.

Tab. XV. Fig. 147. Si curvæ fuerint ſimiles, rectæ conſtantes, quæ æquationem ingrediuntur, eandem inter ſe rationem habent, cum alias per eam diſtingui poſſent, (§. 24 *Arithm.*). Quare ſi porro ſegmenta ſimilia eſſe debent, neceſſe eſt ut abſciſſæ AP & Ap ad rectas illas conſtantes a & b utrobique in eadem ſint ratione (§. *cit.*), conſequenter AP : Ap = $a : b$. Quare ſi AP = x; erit Ap = $bdx : a$. Et quoniam ſemiordinatæ PM & pm, chordæ AM & am, arcusque cognomines eodem modo determinantur; erit AM : am = arc. AM : arc. am = PM : pm = AP : ap = $a : b$ (§. 120 *Geom.*).

Quare ſi PM = y; erit $pm = by : a$. Eſt vero elementum curvæ AMP = ydx, alterius $amp = b^2ydx : a^2$ (§. 98 *Anal. infin.*), adeoque curvilineum AMP : $amp = \int ydx : \frac{b^2 \int ydx}{a^2} = a^2 : b^2$ = AM^2 : am^2 = PM^2 : pm^2 = AP^2 : ap^2. Porro quia AP : PM = $ap : pm$ *per demonſtr.* & anguli ad P & p recti *per conſtruct.* △ APM ∽ △ apm (§. 183 *Geom.*), conſequenter △ APM : △ apm = AM^2 : am^2 (§. 398 *Geom.*). Cum itaque ſit APM : apm = △ APM : △ apm (§. 167 *Arithm.*), erit ſegment. AM : ſegm. am = APM : apm (§. 189 *Arithm.*) = AM^2 : am^2 = PM^2 : pm^2 = AP^2 : ap^2 = arc. AM^2 : arc. am^2 (§. 167 *Arithm.*), conſequenter in ratione duplicata linearum quarumcunque aliarum eodem modo determinatarum, veluti ſi ex P & p demittantur in AM & am perpendicula PL & pl, rectarum PL & pl, *per demonſtrata. Quod erat tertium.*

SCHOLION.

365. *Qui ad demonſtrationem partis ultimæ lemmatis præſentis attendit, is fœcunditatem & utilitatem principiorum noſtrorum ſimilitudinis abunde perſpiciet: quæ in philoſophia prima tanquam ſede genuina ex notionibus puris independenter ab omni imagine derivavimus* (t).

DEFINITIO 41.

366. *Curva ſynchrona eſt*, ad cujus ſingula puncta D, m, M eodem tempore minimo grave pervenit. Tab. XV. Fig. 148.

SCHOLION.

367. *Curvam hanc primus invenit* Joannes Bernoulli (u). *Ex hactenus*

O 2 *autem*

(t) Ontolog. §. 215 & ſeqq.
(u) Vid. Acta Erudit. A. 1697.

autem traditis mira facilitate eam deducere licet.

PROBLEMA 54.

Tab. XV. Fig. 148. 368. *Conſtruere curvam ſynchronam* DmM, *data altitudine perpendiculari* CD, *per quam grave data tempore deſcendit, quo ad ſingula puncta ſynchronæ pervenit.*

RESOLUTIO.

1. Deſcribantur cycloides quotcunque CM, C*m* &c. commune initium in C habentes (§. 573 *Analyſ.*).
2. Erigatur in communi initio C ad baſin CA perpendicularis CD, quæ ſit altitudini datæ æqualis, per quam grave dato tempore deſcendit, ſeu, quod perinde eſt, per quam datur tempus, quo grave ad ſingula puncta D, *m*, M ſynchronæ minimo tempore pervenit (§. 357).
3. Fiat arcus AN æqualis mediæ proportionali inter diametrum circuli genitoris AB & altitudinem CD.
4. Ex puncto N ducatur baſi AC parallela NM ſecans cycloidem in M: erit punctum M in ſynchrona.

Eodem modo in cycloidibus ceteris C*m* determinantur puncta in ſynchrona ope circulorum genitorum ipſis reſpondentium.

DEMONSTRATIO.

AB : *arc.* AN = *arc.* AN : CD *per conſtr.*

$$AN = \sqrt{AB}.\sqrt{CD}$$

$$AN.\sqrt{AB} = AB.\sqrt{CD}$$

$$\frac{AN.\sqrt{AB}}{AB} = \sqrt{CD}.$$

Eſt vero AN. √AB : AB tempus deſcenſus per arcum cycloidis CM (353) & √CD tempus deſcenſus per altitudinem CD (§. 87). Quare grave eodem tempore pervenit ad punctum M, quo ad punctum D deſcendit. Quoniam itaque eodem modo oſtenditur, quod ad quodvis punctum *m* eodem tempore perveniat, quo per AD deſcendit; curva D*m*M eſt ſynchrona (§. 366).

DEFINITIO 42.

369. *Curva æquilibrationis dicitur*, in qua exiſtens pondus vel ſacoma ſemper æquilibrium faciat cum ponte ſublicio circa axem convertibili.

SCHOLION.

370. *Problema hoc ſolverunt* (x) Marchio Hoſpitalius & Jacobus Bernoulli *diverſa ratione*, Joannes Bernoulli

(x) In Actis Erudit. A. 1695 p. 56 & 65.

noulli (y) *identitatem curvæ æquilibrationis cum cycloide deſcripta ex circumvolutione rotæ ſuper rota æquali demonſtravit & problema generalius per communem Geometriam ſolvit.*

PROBLEMA 55.

Tab. XV. Fig. 149. 371. *Invenire curvam æquilibrationis.*

RESOLUTIO.

Sit pons ſublicius AB, centrum gravitatis in B habens & circa axem A verſatilis. Sit funis BCM trochleæ C circumductus, cujus una extremitas B pontem, altera A ſacoma ſuſtinet. Cum potentiæ laterales agentes juxta directiones BC & BA æquipolleant ponderi pontis agentis juxta directionem CA (§. 241. 280); ſi CA exponit pondus pontis abſolutum, BC exponet potentiam juxta BC agentem, cum qua æquilibratur pondus M. Similiter cum pondus M ad deſcenſum ſollicitetur juxta directionem CM & in curvam agat juxta directionem MK ad curvam normalem; ſi CM conſideretur ut pars ponderis M, quæ æquivalet potentiæ ut BC, integrum pondus M erit ut CK (§§. *cit.*). Quare ſi ſit quædam recta b ut pondus abſolutum M, erit CK : CM $= b$: BC.

Sit jam CP $= x$, PM $= y$, BC + CM $= a$; erit CM $= \sqrt{(x^2+y^2)}$ & hinc BC $= a - \sqrt{(x^2+y^2)}$. Eſt vero ſubnormalis PK $= ydy : dx$ (§. 35 *Anal. infin.*) & hinc CK $=$ CP + PK $= x + ydy : dx = (xdx + ydy) : dx$. Quare cum ſit

CK : CM $= b$: BC *per demonſtr.*

erit

$$\frac{xdx + ydy}{dx} : \sqrt{(x^2+y^2)} = b : a - \sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$xdx + ydy : dx\sqrt{(x^2+y^2)} =$$

$$bdx\sqrt{(x^2+y^2)} = axdx + aydy - xdx\sqrt{(x^2+y^2)} - ydy\sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$bdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - xdx - ydy$$

$$bx = a\sqrt{(x^2+y^2)} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2$$

$$bx + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = a\sqrt{(x^2+y^2)}$$

quæ eſt æquatio ad curvam æquilibrationis, cui, ſi libuerit, etiam quantitas quædam conſtans addi, vel ab eadem demi poteſt (§. 95 *Anal. infin.*).

Ut curva hæc conſtruatur, radio CD $= a$ deſcribatur ſemicirculus FDE & ducatur DG ad FE normalis. Fiat CG $= z$, erit GD $= \sqrt{(a^2 - z^2)}$ (§. 417 *Geom.*) & (§. 268 *Geom.*).

CG : CD = CP : CM

$z : a = x :$

O 3 Eſt

(y) In Actis Erudit. A. 1695 p. 606

Eſt itaque $\frac{z \cdot CM}{a} = x$

Porro $CD : DG = CM : PM$

$a : \sqrt{(a^2 - z^2)} = CM : y$

$\frac{CM . \sqrt{(a^2 - z^2)}}{a} = y$

Ergo $\frac{1}{2} x^2 = z^2 . CM^2 : 2a^2$

$\frac{1}{2} y^2 = (a^2 - z^2) . CM : 2a^2$

Quodſi hi valores in æquatione ad curvam ſubſtituantur, prodibit

$$a . CM = \frac{bz . CM}{a} + \frac{z^2 . CM^2}{a^2}$$

$$+ \frac{a^2 . CM^2 - z^2 CM^2}{2a^2}$$

$$= \frac{bz . CM}{a} + \frac{1}{2} CM^2$$

$$2a = \frac{2bz}{a} + CM$$

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Punctum itaque quodlibet M facille determinatur, cum non alia re opus ſit, quam ut ad radium circuli CD ſeu longitudinem funis BC + CM, duplum rectæ illius, quæ pondus abſolutum ſacomatis exponit, & rectam CG pro lubitu aſſumendam quæratur tertia proportionalis, ac ex diametro circuli FE auferatur.

Si ſit $a = b$, erit $CM = 2a - 2z = 2GE$: qui eſt caſus omnium ſimpliciſſimus.

Quando CM degenerat in CN, hoc eſt, quando ſit a, curva ſemicirculum in N ſecat, tumque eſt

$$a = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$0 = a - 2bz : a$$

$$\frac{a^2}{2b} = z^2$$

Patet adeo, CG eſſe tertiam proportionalem ad $2b$ & a, ſi curva peripheriam circuli ſecat.

Quoniam ſubtangens $= ydx : dy$ (§. 20 *Anal. infin.*) & vi ſuperiorum

$$dx = \frac{aydy - ydy\sqrt{(x^2+y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} - ax}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - y^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} - ax}$$

Quare ſi $CM = \sqrt{(x^2+y^2)} = a$

erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - ay^2}{(b+x)a - ax} = 0$

Ergo ubi curva peripheriam circuli ſecat, ſubtangens evaneſcit, adeoque ſemiordinata eam tangit, conſequenter N eſt punctum infinum, ſicque in noſtro caſu mechanico arcus CN ſufficit.

Quodſi

Tab. XV. Fig. 150. Quodſi in ſitu pontis horizontalis AI longitudo funis IC = CE = CN = a & præterea $b = a$, vel $b > a$; tota curvæ portio CMN ſufficit; ſi vero CI < CN, & in ſitu horizontali pondus jam fuerit in M, ſatisfacit portio MN, quoniam tum CM eſt differentia inter CN & CI.

Si ſit CI = c, reliqua ſint ut ante, erit

$$CM = \frac{2a - 2bz}{a} = a - c$$

$$a + c = \frac{2bz}{a}$$

$$\frac{a^2 + ac}{2b} = z$$

Punctum adeo M determinatur, ſi fiat CG = $(a^2 + ac) : 2b$, quæ eſt quarta proportionalis ad $2b$, a & $a+c$, hoc eſt, ad duplam lineam, quæ pondus M exprimit, radium circuli CE ſeu funis integri longitudinem ob IC + CM = CE & compoſitam ex radio & portione funis IC.

Sit $CM = 0$

erit $2a - 2bz : a = 0$

$$a^2 - az = 0$$

$$a^2 : b = z$$

Tab. XV. Fig. 151. n. 1. Habemus itaque $b : a = a : z$. Quare ſi $b = a$; erit $a = z$, adeoque punctum D cadit in E, conſequenter diameter FE curvam in centro C tangit.

Si $b > a$, etiam $a > z$ (§. 149 *Arithm.*), recta igitur CD definiens punctum curvæ C adhuc in peripheriam EN cadit, conſequenter curva ultra centrum continuari poteſt, adeoque in centro C axem FE ſecat. n. 2.

Quando itaque CD coincidit in E, erit $z = a$, adeoque cum ſit

$$x = \frac{z \cdot CM}{a}$$

$$= z\sqrt{(x^2 + y^2)} : a$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$x^2 = x^2 + y^2$$

$$y = 0$$

Curva ergo ultra centrum continuata axem ſecat in K. Quare cum ex conſtructione appareat, ab altera parte deſcribi poſſe partem ſimilem, curva in centro C nodum habet.

Si in æquatione ad curvam

$$a^2x^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + bx^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + bxy^2 + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{4}y^4$$

fiat $y = 0$

erit $a^2x^2 = b^2x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 + bx^3$

$$a^2 = b^2 + \tfrac{1}{4}x^2 + bx$$

$$a = b + \tfrac{1}{2}x$$

$$2a = 2b + x$$

Quan-

Quando itaque $b > a$; erit

$$-x = 2b - 2a$$

Unde intelligitur, punctum K a centro diſtare intervallo $2b - 2a$.

Tab. XV. Fig. 151. n. 3. Si vero fuerit $a > b$; erit

$$x = 2a - 2b$$

Ex quo apparet, curvam ſecare axem infra centrum C in L, ita & CL ſit $2a - 2b$.

Quodſi in æquatione ad curvam valor ipſius x ſumatur negativus & ponatur $y = 0$, prodibit diſtantia puncti O a centro C, ubi axem ſecat. Nimirum cum ob $y = 0$; ſit

$$a^2 = b^2 + bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

erit ob valorem ipſius x negativum

$$a^2 = b^2 - bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$a = \tfrac{1}{2}x - b$$

$$2a + 2b = x$$
$$= CO$$

Curva igitur in omni caſu in ſe redit.

Quodſi maxima curvæ latitudo determinanda, cum ſit

$$\frac{aydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - ydy = bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

erit ob $dy = 0$ (§. 63 *Anal. infin.*)

$$bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$$

$$(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} = ax$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{b+x} = CM$$

Ut igitur CM in caſu maximi inveniri poſſit, valor ejus, quem ſupra reperimus $= 2a - 2bz : a$, exprimatur etiam hic per z, ita ut pro x ſubſtituatur valor ipſius per z expreſſus. Eſt vero juxta ſuperiora $CM = ax : z$. Quare cum hic ſit $CM = ax : (b+x)$; erit

$$z = b + x$$

$$z - b = x$$

$$CM = \frac{ax}{z} = \frac{az - ab}{z}$$

Habemus itaque

$$\frac{az - ab}{z} = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$a^2z - a^2b = 2a^2z - 2bz^2$$

$$2bz^2 - a^2z = a^2b$$

$$2b$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} + \frac{a^4}{16b^2} = \frac{a^4}{16b^2} + \tfrac{1}{2}a^2$$

$$= \frac{a^4 + 8a^2b^2}{16b^2}$$

$$z - \frac{a^2}{4b} = \frac{a}{4b}\sqrt{(a^2 + 8b^2)}$$

$a - z^2$

$$\frac{a^2}{4b} - z =$$

$$z = \frac{a^2 \mp V(a^2 + 8b^2)}{4b}$$

Quodſi $a=b$, erit $z=\frac{a^2 \mp V(a^2+8a^2)}{4a}$

$$= \frac{1}{4}a \mp \frac{3}{4}a$$

Tab. XV. Fig. 151. Quando in hoc caſu $z=\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}a=a$, cum ſit $a=$CE, curva axem in centro tangit juxta ſuperiora. Ergo in caſu maximi ſatisfacit radix falſa, nempe $z=\frac{1}{4}a-\frac{3}{4}a=-\frac{1}{2}a$: quod indicio eſt, valorem ipſius z ſumi debere ex altera parte, nempe verſus O in recta CO.

Quando $b > a$, curva KCNO duplicem habet maximam ſemiordinatam, alteram nempe infra centrum, alterā ſupra idem, adeoque radix utraq; ſervit, affirmativa infra centrū, negativa ſupra idem.

In caſu denique tertio, ubi $a < b$, radix poſitiva eſt major radio. Sed cum $z=$ CG radio CE major fieri nequeat, *vi conſtruct.*; radix negativa hic itidem locum habet: id quod denuo innuit, maximam applicatam cadere ultra centrum verſus O.

SCHOLION.

372. *Illud hic notatu dignum eſt, quod pro diverſa relatione quantitatum conſtantium a & b, quæ æquationem ingrediuntur, curva ductus admodum variet, ita ut oculorum judicio pro curvis non haberentur, quæ per eandem æquationem definiuntur.*

THEOREMA 51.

373. *Si circulus X ſuper alio æquali V rotetur, ita ut punctum rotationis vel ſit in ipſa peripheria, vel extra eam, vel intra peripheriam circuli rotantis: curva hoc puncto deſcripta erit curva æquilibrationis.* Tab. XV. Fig. 152.

DEMONSTRATIO.

Sit punctum rotationis extra peripheriam, veluti in M, & initium rotationis in V, ita ut initio punctum O cadat in V. Dico curvam CMN, quæ hac rotatione deſcribitur, eſſe curvam æquilibrationis. Ducatur recta RS, quæ centra circulorum Y & X connectit & recta SM, in qua eſt punctum deſcribens M producatur, donec radio RV per initium rotationis V continuato in H occurrat. Quoniam arcus TV & TO, menſuræ angulorum R & S (§. 57 *Geom.*), æquales ſunt per geneſin curvæ CMN; erit RH=HS (§. 186 *Geom.*). Fiat RC=SM & ex centro C radio CD=RV=SO deſcribatur circulus & ex C per M ducatur radius CD, ex puncto vero D demittatur perpendicularis GD, quemadmodum in conſtructione curvæ æqui librationis fecimus (§. 371). Fiat porro ut ibidem

RV=OS=CD=a, SM=RC=b, CG =z. Quoniam RH=HS *per demonſtr.* & RC=SM *per conſtr.* erit etiam CH=RM (*§.* 91 *Arithm.*), adeoque HC: HM=HR: HS, conſequenter angulus GCD= HRT (§. 183 *Geom.*). Quare cum porro ob RT=TS & HR = HS angulus ad T rectus ſit (*§.* 179. 147 *Geom.*), & ad G itidem rectus *per conſtruct.* erit (*§.* 267 *Geom.*).

$$CG : CD = RT : RH$$
$$z : a = a :$$

Eſt itaque RH= $a^2 : z$, adeoque CH=RH−RC= $\frac{a^2}{z} - b$.

Porro ob ang. CHD=ang. HRS *per demonſtrata*: erit CM ipſi RS parallela (§ 255 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$HR : RS = HC : CM$$
$$\frac{a^2}{z} : 2a = \frac{a^2}{z} - b :$$

ſive $a^2 : 2a = a^2 - bz :$

Ergo $CM = \frac{2a^3 - 2abz}{a^2}$

$$= \frac{2a^2 - 2bz}{a}$$

Eſt itaque punctum M in curva æquilibrationis, conſequenter curva rotatione circuli X ſuper circulo Y puncto M deſcripta curva æquilibrationis (*§.* 371).

Idem eodem modo oſtenditur in iis caſibus, ubi punctum deſcribens O fuerit in peripheria, vel punctum deſcribens K fuerit intra peripheriam circuli.

PROBLEMA 56.

374. *Data curva* AB *invenire curvam aliam* LM, *ſuper qua in quocunque puncto pondus* M *datum ſit inæquilibrio cum pondere alio* B *dato.* Tab. XV. Fig. 155.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Ducatur recta KO rectam CH ad angulos rectos ſecans. Quoniam CH eſt linea verticalis *per hypoth.* erit KO linea horizontalis (§. 216). Demittantur perpendiculares BK & ME in lineam horizontalem KO ex punctis curvarum B & M, in quibus pondera æquilibrata conſtituuntur, quæ dicantur B & M; erit I centrum gravitatis ponderum conſtans commune (§. 124). Quare B: M=EI: IK (§. 144). Eſt vero ob K & E rectos (§. 78 *Geom.*) & verticales ad I æquales (*§.* 156 *Geom.*), ME: KB=EI: IK (§. 267 *Geom.*). Quare B: M=ME: KB (*§.* 167 *Arithm.*) Demittantur ex M & B perpendiculares ad CH, nempe PM & BH; erit EM=IP & KB=IH (*§.* 226 *Geom.*), adeoque B: M=IP: IH (§. 167 *Arithm.*).

Quare

Quare ſi per hanc analogiam reperiatur recta IP, datis ponderibus & recta IH (§. 271 *Geom.*), & ducta PS ad CI perpendicularis portione funis CM tanquam radio ex puncto C interſecetur; erit in M punctum curvæ æquilibrationis quæſitum.

Quodſi æquatio ad curvam AB detur, facile reperiri poteſt æquatio ad curvam æquilibrationis per communes Algebræ regulas.

CAPUT IX.
DE
MOTU PENDULORUM.

DEFINITIO 43.

376. *Pendulum* eſt grave quodlibet, ita ſuſpenſum, ut circa punctum aliquod vi gravitatis aſcenſus & deſcenſus reciprocos continuare poſſit. Aſcenſus ille & deſcenſus reciprocus *Oſcillatio* penduli vocatur.

DEFINITIO 44.

Tab. III. Fig. 44. 377. *Pendulum ſimplex* eſt quod conſtat unico pondere inſtar puncti conſiderato & linea inflexili gravitatis experte circa centrum C convertibili AC appenſo.

DEFINITIO 45.

378. *Pendulum compoſitum* eſt quod pluribus ponderibus conſtat, eandem diſtantiam tum inter ſe, tum a centro, circa quod oſcillationes fiunt, conſtanter ſervantibus.

DEFINITIO 46.

379. *Axis oſcillationis* eſt recta lineæ horizontali apparenti parallela tranſiens per centrum, circa quod pendulum oſcillatur.

THEOREMA 51.

380. *Pendulum in* B *adductum per arcum circuli* BA *deſcendit & ad punctum æque altum* D *per arcum æqualem aſcendit, inde denuo in* A *deſcendit ac ad* B *aſcendit, ſicque reciprocos aſcenſus & deſcenſus continuat.* T. b. III. Fig. 44.

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipſi parallela. Si globus A, quem inſtar puncti conſideramus, cum ſolius gravitatis ratio hic habeatur (§. 377), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit extra

 tra

tra baſin, quæ eſt in puncto C. Globus igitur in hoc ſitu quieſcere nequit, ſed deſcendit (§. 222). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH deſcendere poſſit, per arcum circuli BA deſcendit (§. 131 *Geom.*). Ubi centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus inſtruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 305) adeoque ipſum ad altitudinem æqualem elevare poteſt (§. 322). Quare cum filum impediat, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipſi AB æqualem (§. 291 *Geom.*) aſcendit. Vi igitur, quam cadendo acquiſiverat, omni abſorpta per eundem arcum AD relabitur vi gravitatis aſcenſurus ex A in B & ita porro. *Q.e.d.*

SCHOLION.

381. *Experientia theoremati non contradicit, etſi ſine fine continuata oſcillationes ei parum reſpondeant. Aeris enim reſiſtentia & frictio circa centrum C partem aliquam ejus vis abſumunt, quæ cadendo acquiſita fuerat: unde fieri nequit, ut ad eandem præciſe altitudinem elevetur globus, ex qua delapſus. Quoniam itaque aſcenſus continua capit decrementa, oſcillatio tandem ſiſtitur & pendulum in ſitu CA, in quo centrum gravitatis infimum occupat locum, quieſcit.*

Tab. IV. Fig. 45.

THEOREMA 52.

382. *Si pendulum ſimplex inter duas ſemicycloides CB & CD ſuſpendatur, quarum circuli generatores habent diametrum CF dimidiæ longitudini fili CA æqualem, ita ut filum oſcillantis iis circumplicetur; oſcillationes omnes utcunque inæquales erunt iſochronæ ſeu æquidiuturnæ in medio non reſiſtente.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim penduli filum CE ſemicycloidi BC circumplicetur, a centro gravitatis globi E, qui inſtar puncti conſideratur (§. 377), ex evolutione cyclois BEAD deſcribitur (§. 330 *Analyſ. infinit.*). Sed omnes deſcenſus & aſcenſus in cycloide ſunt æquidiuturni (§. 311). Ergo oſcillationes penduli ſunt æquidiuturnæ (§. 376). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

383. Quodſi longitudine penduli CA deſcribatur circulus ex centro C, cum portio cycloidis prope verticem A eodem fere motu deſcribatur, arcus exiguus circuli cum cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oſcillationes pendulorum ſunt ad ſenſum iſochronæ, utcunque in ſe inæquales.

COROLLARIUM 2.

384. Quo longiora itaque ſunt pendula in arcubus circuli oſcillantia; eo majores oſcillationes iſochronæ ſunt.

SCHOLION 1.

385. *Experientia non abludit. Quodſi enim*

enim duo fuerint pendula ejusdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque tamen in arcum non nimis magnum, oſcillando excurrat; in oſcillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.

SCHOLION 2.

386. *Penduli inter duas ſemicycloides oſcillantis tam theoria, quam praxis debetur illuſtri* Hugenio (z).

PROBLEMA 55.

387. *Determinare durationem oſcillationis in Cycloide.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 46. Sit diameter circuli genitoris ſeu altitudo totius Cycloidis AB $=2a$; HB altitudo, ex qua deſcendit pendulum per arcum illius QB $=2r$, HP $=x$, erit PB $=2r-x$. Sit porro tempus per QB $=t$ & ſuper HB deſcribatur ſemicirculus HNB ducanturque PM atque *pm* infinite propinquæ ad HB perpendiculares: erit PN $=\sqrt{(2rx-xx)}$, P*p* $=$ NO $=$ R*m* $=dx$, & celeritas in P, adeoque & in N (§. 303), acquiſita $=\sqrt{x}$ (§ 83), conſequenter, cum infiniteſima M*m* motu uniformi percurratur, tempus per M*m* $=dt=$ M*m* : $\sqrt{x}$ (§. 39). Conſtat vero (§. 131 *Analyſ. infinit.*) eſſe M*m* : *m*R $=$ BS : BP & AB : BS $=$ BS : BP (§. 330 *Geom.*). Eſt itaque BS ad BP in ratione ſubduplicata AB ad BP, (§. 216 *Arithm.*), hoc eſt, ut $\sqrt{}$ AB ad $\sqrt{}$ PB, conſequenter M*m* : *m*R $=\sqrt{}$ AB : $\sqrt{}$ PB (§. 167 *Arithm.*). Unde M*m* $=$ *m*R. $\sqrt{}$ AB : $\sqrt{}$ PB & $dt=dx\sqrt{a}:\sqrt{(2rx-x^2)}=2rdx\sqrt{a}:2r\sqrt{(2rx-x^2)}$. Eſt vero $rdx:\sqrt{(2rx-xx)}=$ N*n* (§. 157 *Analyſ. infinit.*) Ergo $dt=2\sqrt{a}$. N*n* : $2r$ & $\int dt=\int$ N*n*. $2\sqrt{a}:2r$. Jam quando $\int dt$ ſive t tempus denotat, quo grave per arcum cycloidis BQ deſcendit, $\int$ N*n* in ſemiperipheriam circuli degenerat. Quare ut $2r$ ſeu diameter circuli ad ſemiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum BQ, conſequenter cum $2\sqrt{a}=2a:\sqrt{a}$ denotet tempus deſcenſus perpendicularis per BA (§. 39. 83); patet tandem (§, 168 *Arithm.*) ſequens

Theorema: Tempus integræ oſcillationis per arcum quemcunque Cycloidis GDQ eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris AD ut peripheria circuli ad diametrum. Tab. III. Fig. 39.

COROLLARIUM.

388. Hinc denuo conſequitur, quod jam ſuperius aliunde demonſtratum (§. 311), tempus deſcenſus per quoslibet arcus cycloidis eſſe æquidiuturnum, oſcillationes item in omnibus arcubus cycloidis eſſe æquidiuturnas.

(z) Vide Horologium Oſcillatorium ſive demonſtrationes de motu pendulorum ad horologia aptato geometricas.

THEOREMA 53.

389. *Gravitatis actio minor eſt in iis Terræ regionibus, ubi oſcillationes ejusdem penduli ſunt tardiores; major vero, ubi eædem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oſcillationum in cycloide eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris ut peripheria circuli ad diametrum (§. 387), adeoque in ratione conſtante (§. 413 *Arithm.*). Quare ſi oſcillatio ejusdem penduli ſit tardior, deſcenſus quoque gravium perpendicularis tardior evadit: ſi ille redditur celerior; hic quoque celerior ſit neceſſe eſt. In primo igitur caſu minus ſpatium cadendo conficit grave, quam in altero, adeoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero, conſequenter gravitas minor eſt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

390. Cum adeo experientia docuerit, oſcillationes ejusdem penduli eſſe tardiores prope æquatorem, quam in remotioribus verſus polum regionibus; gravitas corporum minor eſt verſus æquatorem, quam verſus polos.

SCHOLION.

391. *Obſervavit hoc primus* Richerius A. 1672. *itinere in inſulam* Cayennæ, *quæ ab æquatore 5 fere gradibus diſtat, facto, ubi pendulum Pariſienſe ſingulis minutis ſecundis oſcillans, cujus longitudo erat pedum 3, linearum* $8\frac{3}{5}$, *minuenda erat linea una cum quadrante, ut adhuc oſcillationes ſingulis minutis ſecundis abſolveret* (a). A. 1677. Hallejus *ad inſulam* S. Helenæ *navigans reperit horologium ſuum ibi tardius moveri, quam Londini, ſed differentiam non notavit. Similes obſervationes habuere* A. 1682. Varin & des Hayes A. 1697. Couplet *filius* & A. 1704. *Feuillée* (b).

THEOREMA 57.

392. *Si duo pendula* CA & EF *in arcus ſimiles* DAB & GFH *excurrant; tempora oſcillationum ſunt in ratione ſubduplicata longitudinum* CA & EF. Tab. II. Fig. 47.

DEMONSTRATIO.

Tempus deſcenſus per DA eſt ad tempus deſcenſus per GF in ratione ſubduplicata DA ad GF (§. 314). Sed tempora iſta ſunt oſcillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oſcillationum ſunt in ratione ſubduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arithm.*), conſequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus ſimiles DA & GF *per hypoth.* deſcribuntur (§. 412 *Geom.* & 170 *Arithm.*) *Q. e. d.*

CO-

(a) Vid. Acta Eruditorum A. 1695. p. 30.
(b) Vid. *Newtonus* in Principiis lib. 3. prop. 19. p. m. 419.

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus ſimiles DA & GF excurrentium ſunt in ratione duplicata temporum, quibus ſingulæ oſcillationes conficiuntur.

THEOREMA 57.

394. *Numeri oſcillationum iſochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum ſunt reciproce ut tempora, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus *a* numerus oſcillationum penduli unius = *b*, alterius = *mb*. Cum oſcillationes ſingulæ ejusdem penduli ſupponantur æquidiuturnæ, erit tempus, quo pendulum primum oſcillationem unam conficit, = *a* : *b*, & tempus, quo alterum oſcillationem unam abſolvit, = *a* : *mb* (§. 302 *Arithm.*). Sunt ergo tempora, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt, ut *a* : *b* ad *a* : *mb*, hoc eſt, ut *amb* ad *ab* (§. 178 *Arithm*) ſeu ut *mb* ad *b* (§. 181 *Arithm.*). Sed ut *mb* ad *b* ita eſt numerus oſcillationum penduli ſecundi ad primum. Sunt itaque numeri oſcillationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora ſingularum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum in arcus ſimiles, eosque parvos excurrentium ſunt in ratione duplicata numerorum oſcillationum eodem tempore confectarum, ſed reciproce ſumtorum (§. 303).

THEOREMA 58.

396. *Longitudines pendulorum intra cycloides ſuſpenſorum ſunt in ratione duplicata temporum, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam ita tempus deſcenſus per altitudinem cycloidis ſeu dimidiam penduli longitudinem ad tempus unius oſcillationis (§ 387). Sunt igitur tempora deſcenſus per duorum pendulorum dimidias longitudines ut tempora duarum oſcillationum ab iisdem confectarum (§. 167. 173 *Arithm.*). Sed altitudines deſcenſus perpendicularis ſunt in ratione duplicata temporum (§. 86). Ergo etiam altitudines, hoc eſt, pendulorum longitudines dimidiæ, conſequenter & integræ (§. 178 *Arithm.*), ſunt in ratione duplicata temporum, quibus oſcillationes per cycloides abſolvuntur (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oſcillationum eodem tempore confectarum, ſed reciproce ſumtorum (§. 304).

CO-

COROLLARIUM 2.

398. Tempora oſcillationum in cycloidibus diverſis ſunt in ratione ſubduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA 56.

399. *Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oſcillationum in tempore dato confectarum, invenire longitudinem alterius penduli, quod eodem tempore datum oſcillationum numerum conficiat.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad quadratum numeri oſcillationum, quas in tempore dato abſolvere debet pendulum quæſitum, ad quadratum numeri oſcillationum penduli dati & longitudinem penduli dati numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæſita (§. 397).

E. gr. Juxta *Hugenium* (c) longitudo penduli, cujus oſcillationes ſingulæ ſingulis minutis ſecundis abſolvuntur, eſt pedum Pariſinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oſcillationes conficiat. Cum numerus oſcillationum penduli dati ſit intra minutum primum 60 & ejus longitudo 881 linearum dimidiarum (§. 26 *Geom.*); erit longitudo penduli quæſiti $= 3600 . 881 : 40000 = 79\frac{29}{100}$ lin. dim. ſeu $39\frac{79}{100}$ lin.

PROBLEMA 57.

400. *Dato numero oſcillationum, quæ a pendulo datæ longitudinis in dato tempore abſolvuntur, invenire numerum oſcillationum ab alio pendulo datæ itidem longitudinis in dato tempore conficiendarum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverſe ſumtas & quadratum numeri oſcillationum quæſiti (§. 397).
2. Quare ſi inde extrahatur radix, habebitur numerus oſcillationum quæſitus.

E. gr. Quæritur, quot oſcillationes intra minutum primum abſolvat pendulum, cujus longitudo eſt 7929 iſtiusmodi partium, qualium pendulum ſingulis minutis ſecundis oſcillans eſt 88100. Reperietur numerus oſcillationum $= \sqrt{(88100 . 3600 : 7929)} = \sqrt{40000} = 200$.

THEOREMA 40.

401. *Celeritas penduli in puncto infimo* B *eſt ad celeritatem cadendo per duplam longitudinem* AB *acquiſitam ut chorda arcus, quem deſcribit*, EB *ad diametrum circuli* AB. Tab. III. Fig. 36.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum EB acquiſita æquatur celeritati per PB acquiſitæ (§. 255). Eſt ergo ad celeritatem per AB acquiſitam in ratione

(c) In Horolog. Oſcillat. part. 4. prop. 25. f. 152.

tione ſubduplicata BP ad BA (§. 87). Sed BA : BE = BE : BP (§. 330 *Geom.*) adeoque BA ad BE eſt ratio ſubduplicata BA ad BP (§. 216. 159 *Arithm.*). Ergo celeritas per arcum BE eſt ad celeritatem per BA acquiſitam ut chorda BE ad BA (§. 156 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

402. Cum adeo ſit ut celeritas per arcum EB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam ut chorda EB ad AB & ut celeritas per arcum DB acquiſita ad celeritatem per AB acquiſitam, ut chorda DB ad AB (§. 401); celeritates per arcus EB & DB acquiſitæ ſunt ut chordæ cognomines (§. 195 *Arithm.*).

SCHOLION.

403. *Alia adhuc theoremata non inelegantia de pendulis habet* Newtonus(d): *quæ analytice faciliime demonſtrantur ex ſuperioribus. Eum igitur in finem ſequens addimus problema.*

PROBLEMA 60.

404. *Determinare tempus oſcillationis dimidiæ per arcum exiguum in hypotheſi gravitatis uniformis, ſed maſſæ minime proportionalis.*

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 154. Sit in C centrum, circa quod pendulum oſcillatur. Sint NA & MA arcus exigui, per quos oſcillatur, ſeu oſcillationes dimidiæ. Sit BA dupla penduli longitudo & BNA ſemicirculus ex centro C deſcriptus; dicatur

$CA = a$, $AP = x$

$AQ = b$

erit $AB = 2a$

$QP = b - x$

& (§. 330 *Geom.*)

$AB : AN = AN : AQ$

$2a : AN = AN : b$

$AB : AM = AM : AP$

$2a : AM = AM : x$

adeoque

$AM = \sqrt{ax}$ $AN = \sqrt{2ab}$

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter ſubtenſæ cognomines. Quare etiam arcus $AM = \sqrt{2ax}$ & arcus $AN = \sqrt{2ab}$, conſequenter $NM = AN - AM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, cujus differentiale nM reperitur $= \frac{1}{2} x^{-1:2} dx\sqrt{2a} = -dx\sqrt{a} : \sqrt{2x}$.

Sit porro gravitas $= g$, maſſa $= m$. Quoniam gravitas uniformis ſeu conſtans *per hypoth.* erit celeritas in n utpote cadendo per altitudinem $QP = b - x$ acquiſita $= \sqrt{2g(b-x)} : \sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum nM æquabilis, erit

(d) In Princip. Phil. nat. mathem. lib. 2. prop. 24 & ej. coroll. p. m. 294 & ſeqq.

erit tempuſculum dt directe ut ſpatium ſeu arculus nM & reciproce ut celeritas in n acquiſita (§.39), conſequenter

$$dt = \frac{nM}{\text{Cel. per } NM} = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

$$t = \int \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

Eſt vero $-bdx : 2\sqrt{(bx-x^2)}$ elementum arcus QR, radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}$ AQ deſcripti, cujus ſagitta $QP = b-x$, ob valorem negativum (§. 157 *Anal. infin.*). Ergo $-dx : \sqrt{(bx-x^2)}$ = elemento arcus AR per $\frac{1}{2}$AQ diviſo. Fiat itaque

$$\frac{-bdx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = dz$$

erit

$$\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{2dz}{b}$$

adeoque

$$dt = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}} = \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{z\sqrt{am}}{b\sqrt{g}} = \frac{\text{arc. } QR.\sqrt{AB}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$$

Quodſi jam fiat $QP = QA$, arcus QR degenerabit in ſemiperipheriam QRA, eritque t tempus dimidiæ oſcillationis, hoc eſt, deſcenſus per arcum NA abſolvitur tempore

$$t = \frac{QRA.\sqrt{AB}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$$

Patet, QRA : AQ deſignare rationem peripheriæ ad diametrum, & $\sqrt{AB}$ eſſe ut tempus deſcenſus perpendicularis per AB ſeu altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem (§.87). Quare ſi fuerit g ut m, ſeu gravitas maſſæ proportionalis, quemadmodum in hypotheſi *Galilaeana* (§. 114), erunt

Theorema: Oſcillationes pendulorum in arcubus exiguis circularibus ad tempus deſcenſus perpendicularis ponderis appenſi per altitudinem duplæ longitudinis penduli æqualem ſeu circuli diametrum, ut ſemiperipheria circuli ad diametrum, ſeu oſcillationes integræ ſunt ad tempus deſcenſus perpendicularis per diametrum ut peripheria circuli ad diametrum.

THEOREMA 59.

405. *Tempora ſunt in ratione compoſita ex directis ſubduplicatis longitudinum pendulorum & maſſarum atque reciproca ſubduplicata gravitatum uniformium.*

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l, tempora oſcillationum T & t,

& t, maſſæ M & m, gravitates G & g; erit $T = \frac{QNA}{AQ}.\frac{\sqrt{2M.L}}{\sqrt{G}}$ & $t = \frac{QNA}{AQ}.\frac{\sqrt{2m.l}}{\sqrt{g}}$ (§. 404), adeoque

$$T : t = \frac{QNA}{AQ}.\frac{\sqrt{2M.L}}{\sqrt{G}} : \frac{QNA}{AQ}.\frac{\sqrt{2m.l}}{\sqrt{g}}$$

$= \frac{\sqrt{M.L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m.l}}{\sqrt{g}}$ (§. 181 *Arithm.*)

$= \sqrt{M}.\sqrt{L}.\sqrt{g} : \sqrt{m}.\sqrt{l}.\sqrt{G}$ (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 60.

406. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum longitudines æquales ſunt, ſunt in ratione compoſita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in theoremate præcedente, erit

$$T : t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

adeoque $T^2 : t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ (§. 260 *Arithm.*).

Et hinc $T^2G : t^2g = ML : ml$ (§. 184 *Arithm.*).

Quare cum ſit $L = l$ *per hypoth*, erit $T^2G : t^2g = M : m$ (§. 183 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

407. Quodſi fuerit $T = t$; erit $G : g = M : m$, hoc eſt, ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ ſive maſſæ ſunt ut gravitates.

COROLLARIUM 2.

408. Quodſi fuerit $G = g$, erit $T^2 : t^2 = M : m$ (§. 181 *Arithm.*), hoc eſt, ſi gravitates ſunt æquales, maſſæ ſunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 3.

409. Quodſi fuerit $M = m$; erit $T^2G = t^2g$ (§. 151 *Arithm.*), adeoque $G . g = t^2 : T^2$ (§. 299 *Arithm.*), hoc eſt, ſi maſſæ ſunt æquales, gravitates ſunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM 4.

410. Quoniam $T^2G : t^2g = ML : ml$, *vi demonſtr. præſ.* ſi ſit $T = t$ & $M = m$, erit $G : g = L : l$ (§. 151 *Arithm.*), hoc eſt, ſi & tempora, & maſſæ æqualia ſunt, pondera ſunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM 5.

411. Et quia $T^2G : t^2g = ML : ml$; erit etiam $T^2Gl : t^2gL = M : m$ (§. 185 178 *Arithm.*), hoc eſt, maſſæ pendulæ ſunt ut quadrata temporum & gravitates directe, & ut longitudines pendulorum inverſe.

SCHOLION 1.

412. *His principiis uſus eſt* Newto-

nus (e) *in comparandis corporibus inter ſe quoad quantitatem materiæ in ſingulis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis ſe ſemper inveniſſe fatetur, quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diverſis locis ad cognoſcendam variationem gravitatis.*

COROLLARIUM 6.

413. Quodſi fuerit $M=m$, erit $T^2Gl = t^2gL$ (§. 149 *Arithm.*) conſequenter $T^2 : t^2 = gL : Gl$ (§. 299 *Arithm.*), adeoque $T : t = \sqrt{g}.\sqrt{L} : \sqrt{G}.\sqrt{l}$ (§. 260 *Arithm.*), hoc eſt, ſi maſſæ funependulorum fuerint æquales, tempora ſunt in ratione compoſita ex directa longitudinum pendulorum & reciproca gravitatum ſubduplicata.

COROLLARIUM 7.

414. Quodſi fuerit $M=m$ & $T=t$, erit $gL = Gl$ (§. *præc.*); conſequenter $G : g = L : l$, hoc eſt, pendula iſochrona habent gravitates ſeu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM 8.

415. Quodſi fuerit $M=m$ & $L=l$, erit $T^2G = t^2g$ (§. 413), conſequenter $T^2 : t^2 = g : G$ (§. 299 *Arithm.*), adeoque $T : t = \sqrt{g} : \sqrt{G}$ (§. 260 *Arithm.*), hoc eſt, ſi maſſæ & longitudines funependulorum fuerint æquales, tempora ſunt in ratione ſubduplicata reciproca gravitatum.

COROLLARIUM 9.

416. Quodſi fuerit $M=m$ & $G=g$, erit $T^2 l = t^2 L$ (§. 413), conſequenter $T^2 : t^2 = L : l$, adeoque $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, hoc eſt, ſi gravitates acceleratrices & maſſæ funependulorum fuerint æquales, tempora ſunt in ratione ſubduplicata longitudinum.

SCHOLION 2.

417. *Cum in pendulis vis ponderis, qua ſollicitatur, in uno puncto concentrata concipiatur* (§. 225), *neque maſſa per ſe, niſi quatenus a cauſa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat, ſi pondera maſſis proportionalia ſunt, adeoque æquales quantitates materiæ ſeu maſſæ æquales a gravibus eodem modo animentur; nulla habetur maſſarum ratio. Perinde igitur eſt in hoc caſu, ac ſi in omnibus pendulis maſſa eſſent æquales. Unde in hac naturæ conſentanea hypotheſi valent, quæ in caſu maſſarum æqualium demonſtravimus.*

THEOREMA 61.

418. *Numeri oſcillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus abſolutarum ſunt in ratione compoſita ex reciprocis ſubduplicatis maſſarum & longitudinum, atque directa ſubduplicata gravitatum maſſas animantium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oſcillationum N & *n* a duobus pendulis æqualibus temporibus abſolutorum reciproce ut tempora, quibus ſin-

(e) Vid. Princip. lib. 2. prop. 24. Cor. 7. p. m. 275.

ſingulæ oſcillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oſcillationum ſunt in ratione compoſita ex rationibus ſubduplicatis directis maſſarum & longitudinum pendulorum & ſubduplicata reciproca maſſas animantium gravitatum, ſeu ut $\sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$ ad $\sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oſcillationum a duobus pendulis æqualibus temporibus abſolutarum ſunt in ratione compoſita ex reciprocis ſubduplicatis maſſarum & longitudinum & directa ſubduplicata gravitatum maſſas animantium, ſeu $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

419. Quodſi fuerit $m = M$, erit $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{g}$, hoc eſt, ſi maſſæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oſcillationum eodem tempore in arcubus exiguis abſolutarum ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directa ſubduplicata gravitatum maſſas animantium.

COROLLARIUM 2.

420. Quodſi fuerit $M = m$ & $L = l$; erit $N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$, hoc eſt, multitudines vibrationum, eodem tempore a duobus pendulis æqualibus peractarum, ſe habent in ſubduplicata ratione directa virium pendula agitantium.

SCHOLION 1.

421. *Si cui libuerit, is ex analogia* $N : n = \sqrt{G}.\sqrt{l}.\sqrt{m} : \sqrt{g}.\sqrt{L}.\sqrt{M}$ *plura theoremata deducet, quemadmodum ſupra in ſimili caſu factum.*

SCHOLION 2.

422. *Quæ hactenus de pendulorum motu demonſtrata ſunt, plerumque tantum ſuccedunt, ſi filum, ex quo pondus ſuſpenditur, gravitate careat & totius ponderis gravitas in punctum individuum ſit contracta: quæ nempe ſuperius ſuppoſuimus. Quamobrem in praxi filo utendum eſt tenui & globo exiguo ſed ex materia quantumvis gravi conflato. Quodſi vero filum aut virga ſit gravis & pondus magnum; leges modo demonſtratæ valde turbantur: neque enim pendulum amplius ſimplex eſt, ſed compoſitum, perinde nimirum eſt, ac ſi plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diverſis locis applicarentur, quæ ſingula diverſa celeritate moventur. Enimvero non ſufficit, quemadmodum ſupra in æquiponderantibus, invenire centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum ſummam, ut verus penduli motus exploretur; ſed alia ratione determinandum eſt illud punctum, in quo colligenda eſt omnis penduli gravitas, ut eadem præſtet cum compoſito. Eum igitur in finem addimus caput ſequens.*

CAPUT X.
DE
CENTRO OSCILLATIONIS.

DEFINITIO 47.

423. *Centrum oſcillationis* eſt punctum, in quo ſi colligatur penduli compoſiti totius gravitas, oſcillationes ſingulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

COROLLARIUM.

424. Ejus itaque a puncto ſuſpenſionis diſtantia æquatur longitudini penduli ſimplicis, cujus oſcillationes ſunt eum oſcillationibus compoſiti iſochronæ.

DEFINITIO 48.

425. *Pes horarius* eſt longitudo penduli ſimplicis, quod ſingulas oſcillationes conficit ſingulis minutis ſecundis.

THEOREMA 62.

Tab. IV. Fig. 48. 426. *Si plura pondera D, F, H, B, quorum gravitas in punctis D, F, H, B, concipitur collecta, in virga inflexili AB eandem inter ſe & a puncto ſuſpenſionis A diſtantiam conſtanter conſervent & circa A oſcillationes ſuas perficiat pendulum hoc modo compoſitum; prodibit diſtantia centri oſcillationis O a puncto ſuſpenſionis OA, ſi ſingula pondera in quadrata diſtantiarum ducantur & aggregatum per ſummam momentorum eorundem ponderum dividatur.*

DEMONSTRATIO.

Quodſi pendulum celeritate ſemel acquiſita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B conſtanter deſcriberent arcus *d*D, *f*F, *g*H & *b*B diſtantiis a puncto ſuſpenſionis A*d*, A*f*, A*g*, A*b* proportionales. Patet adeo, celeritatem ſemel acquiſitam deſcenſum ponderum non alterare. Sola igitur ſpectanda eſt vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O eſſe centrum oſcillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC; ſumma ponderum in centro oſcillationis O applicata arcum OP deſcribet (§. 423). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera ſingula D, F, H, B, quo in ſummam eorundem O, niſi retinaculum AB obſtaret; ſingula per ſpatiola ipſi OP æqualia transferrentur, quia motus in inſtanti eſt uniformis, adeoque celeritates ſpatiolis propor-

portionales (§. 33). Quare ſi KN per P ipſi DB parallela ducatur, DK, FL, HM, BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant) exponent celeritates a ponderibus D, F, H & B in inſtanti acquirendas, ſi libere deſcenderent. Gravitas vero cum ſolo niſu agat (§. 4), vis mortua eſt (§. 9); conſequenter vires motuum acceleratrices ſunt in ratione compoſita ponderum & celeritatum (§. 278). Deperditur itaque in E vis ut D. EK & in F vis ut F. GL: contra vero in H accreſcit vis ut H. MI & in B vis ut B. NC, ſeu quod perinde eſt; ob decrementum virium in D & F vi in P aliquid accreſcit, ſed incrementum in H accremento in P rurſus aliquid detrahit. Cum autem ſit vis in D ad vim in B uti AB ad AD; vis in F ad vim in B uti AB ad AF; vis denique in H ad vim in B uti AB ad HB (§. 153); reperiuntur accrementa virium in B ut (D.EK. AD): AB & (F.GL. AF): AB, quod vero inde rurſus detrahitur ut (H. MI. AH): AB. Habemus adeo

$$B.NC = [D.EK.AD + F.GL.AF - H.MI.AH] : AB.$$

& hinc

$$B.AB.NC + H.MI.AH = D.EK.AD + F.GL.AF$$

Jam cum GL ipſi EK & MI ipſi NC ſit parallela, ob rectos E, G, I, C (§. 38 *Analyſ. infinit.*) & EG = DF, GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt EK & GL ipſis OD & OF, MI & NC ipſis OH & OB proportionales (§. 268 *Geom.*), conſequenter ſubſtitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB.

$$B.AB.OB + H.OH.AH = D.OD.AD + F.OF.AF.$$

Denique cum ſit

$$H.AH^2 = H.HA.HO + H.HA.AO$$

$$B.AB^2 = B.BA.BO + B.BA.AO$$

$$D.OA.DA = D.AD.AD + D.AD.OD$$

$$F.OA.FA = F.FA.FA + F.OF.FA.$$

Si utrinque addantur in æquatione inventa $D.DA^2 + F.FA^2 + H.HO.HA + B.AO.BA$, prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = (D.DA + F.FA + H.HA + B.BA)\,AO$$

Conſequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}$$

Q. e. d.

co-

SCHOLION 1.

427. *Quodſi non evidens videatur, eſſe* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$ *&* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$, *itemque* $OA.DA = AD.AD + DA.OD$ *&* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$; *idem facile oſtenditur hoc modo. Cum ſit* $HA = HO + OA$ (§. 86 Arithm.), erit $HA^2 = HO^2 + 2\,HO.OA + OA^2$ (§. 261 Arithm.). *Et quoniam* $HA = AO + OH$ (§. 86 Arithm.); erit $HA.HO = (AO + OH)\,HO = HO.OA + HO^2$ *&* $HA.AO = (AO + OH)\,AO = AO^2 + OH.AO$ (§. 93 Arithm.), *conſequenter* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$ (§. 87 Arithm.). *Similiter cum ſit* $AB^2 = AO^2 + 2\,AO.OB + OB^2$ *&* $AB.BO = (AO + OB)\,OB = AO.OB + OB^2$ *&* $AB.AO = (AO + OB)\,AO = AO^2 + AO.OB$; *erit* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$. *Et quia* $OA = AD + OD$ (§. 86 Arithm.), *erit* $OA.DA = (AD + OD)\,DA = AD.AD + AD.OD$ (93 Arithm.). *Similiter quia* $AO = AF + FO$; *erit* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$.

SCHOLION 2.

428. Joannes Bernoulli (f) *ex ſimpliciſſimis principiis mechanicis theoriam de centro oſcillationis* ab Hugenio (g) *inventam & a* Jacobo Bernoulli *fratre* (h) *ex natura vectis demonſtratam; quemadmodum modo uberius expoſuimus, deduxit & ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Operæ igitur pretium nos facturos exiſtimamus, ſi viri ingenioſiſſimi methodum hic dilucidemus.*

PROBLEMA 61.

429. *Determinare centrum oſcillationis in pendulo compoſito.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Sit virga inflexilis AL gravitatis expers, onuſta ponderibus quotcunque C, D &c. in diſtantiis quotcunque AC, AD &c. ab axe oſcillationis A; determinandum eſt centrum oſcillationis Z ſeu longitudo penduli ſimplicis AZ compoſito AL iſochroni. Tab. XVI. Fig. 155.

Sit itaque C maſſa ponderis in C; D vero maſſa ponderis in D: quæ pondera animantur a gravitate naturali G; erit pondus in C = G. C & momentum ejus G. C. AC, quod *vim agitativam penduli* appellat *Bernoullius*. Eodem prorſus modo reperitur vis agitativa penduli in D = G. D. AD & ita porro, ſi plura fuerint pondera (§. 153).

Aſſumatur jam pro arbitrio punctum P & quæratur tum maſſa ponderis, tum gravitas, a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æquale, adeoque ipſi C ſubſtitui poſſit. Ni-

(f) In Actis Erudit. A. 1714. p. 257 & ſeqq.
(g) In Horolog. oſcillat. part. 4 f. 91 & ſeqq.
(h) In Actis Erudit. A. 1691 p. 317.

Nimirum cum gravitates ſeu vires acceleratrices maſſarum ſint ut celeritates, quas producunt in inſtanti, celeritates autem in tempuſculo infinite parvo, quo per angulum infinite parvum ex AL in A(L) movetur pendulum, ſint ut C(C) ad P(P) (§.33), conſequenter ut AC ad AP (§. 138. 412 *Geom.*); erit ut AC ad AP ita gravitas in C ad fictitiam in P, a qua animandum pondus in P in locum ipſius C ſurrogandum, conſequenter gravitas in $P = \frac{AP.G.}{AC}$ Quodſi maſſa hujus ponderis ponatur P; erit pondus $= \frac{G.P.AP}{AC}$ & momentum $= \frac{G.P.AP^2}{AC}$, quod cum ſit æquale momento ponderis in C, erit

$$\frac{G.P.AP^2}{AC} = C.G.AC$$

$$P = \frac{C.AC^2}{AP^2}$$

Eodem prorſus modo reperitur pondus in P ſubſtituendum ponderi in D: nimirum maſſa ejus $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$; gravitas, qua animanda, $= \frac{AP.G}{AD}$

Eſt itaque pondus, quod in P ſubſtitui debet pro pondere, quod eſt in C, $\frac{AP.G.}{AC} \cdot \frac{C.AC^2}{AP^2} = \frac{AC.C.G}{AP}$ & pondus, quod pro D in P ſubſtituendum $= \frac{AP.G.}{AD} \cdot \frac{AD^2.D}{AP^2} = \frac{AD.D.G}{AP}$

Quoniam hæc pondera a gravitatibus particularibus animantur, invenienda eſt porro gravitas communis, quæ animat uniformiter maſſarum ſeu corporum aggregatum.

Sit ea gravitas $= x$: erit

$$\frac{AC^2.Cx}{AP^2} + \frac{AD^2.Dx}{AP^2} \&c. = \frac{AC.C.G}{AP} + \frac{AD.D.G\&c.}{AP}$$

$$AC^2.Cx + AD^2.Dx \ \&c. = (AC.CG + AD.D\&c.)\ AP.G$$

$$x = \frac{(AC.C + AD.D\&c.)\ AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\&c.}$$

hoc eſt, gravitas communis reperitur dividendo ponderum ſummam per ſummam maſſarum.

Cum adeo pendulum AP, quod animatur a gravitate fictitia

$$\frac{AC.\,C + AD.\,D \,\&c.,\, AP.\,G}{AC^2.\,C + AD^2.\,D}$$ fit

compoſito AL iſochronum, pendula vero ſimplicia iſochrona habeant gravitates longitudinibus proportionales (§.414); longitudo penduli ſimplicis AZ fictitio AL iſochroni & a gravitate naturali G animandi reperitur, ſi fiat:

$$\frac{AC.C + AD.D \&c.\ AP.\,G}{AC^2.C + AD^2.D \&c.} : G = AP : AZ$$

Erit enim (§.181. 183 *Arithm.*)

$$AC.\,C + AD.\,D \,\&c. : AC^2.\,C + AD^2.D \,\&c. = 1 : AZ$$

conſequenter

$$AZ = \frac{AC^2.\,C + AD^2.\,D \,\&c.}{AC.\,C + AD.\,D}$$

quæ eſt regula *Hugeniana* (i) in propoſitione præcedente demonſtrata; ſed in eo caſu, ubi pondera quæ pendulum componunt, ſunt in eadem recta, aut ſaltem, in eodẽ plano, in quo eſt axis oſcillationis.

Tab. XVI. Fig. 156. Ponamus jam pondera C, D &c. non eſſe in eadem recta ſeu in plano, in quo eſt axis oſcillationis, ſed quomodocunque in plano quodam verticali circa axem A oſcillante diſpoſita, ita tamen ut ſitum non mutent. Sit AH linea verticalis plani & per centrum ſuſpenſionis A ducatur AH ad verticalem AM normalis, adeoque horizontalis (§. 210), radio AC deſcribatur arcus *c*C & ex C demittatur perpendicularis CK ad AH; erit gravitas abſoluta in C ad gravitatem reſpectivam, qua impellitur radius AC in ratione AC ad AK (§. 272) ſive RC, adeoque

$$AC : RC = G : \frac{G.RC}{AC}$$

Eſt ergo vis agitativa in $C = \frac{G.RC}{AC}$

Eodem modo reperitur gravitas reſpectiva in $D = \frac{G.DS}{AD}$. Et, ſi gravitas abſoluta in $P = M$, reſpectiva ibidem $\frac{M.\,PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio aſſumtum, in quo ſubſtituendum eſt pondus aliquod pro C idem cum ipſo momentum habens. Conſtat primum ex antecedentibus, ſi radio AP deſcribatur arcus P*p*, fore

$$AC : AP = \frac{G.RC}{AC} : \frac{M.QP}{AP}$$

adeoque $AC^2 : AP^2 = G.RC : M.QP$ (§. 185 *Arithm.*).

AP².

(i) Prop. 5. part. 4. de Horolog. oſcillat. f. 58.

$$AP^2.\,G.\,RC = AC^2.\,M.\,QP$$

$$\frac{AP^2.\,G.\,RC}{AC^2.\,QP} = M$$

Quodſi N denotet gravitatem abſolutam, qua animatur pondus pro D ſubſtituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2.\,G.\,DS}{AD^2.\,QP}$$

Sit jam maſſa ponderis gravitate M animandi = T. Quoniam ejus momentum æquale eſt momento ponderis C, in cujus locum *ſurrogatur*; erit

$$RC.\,C.\,G = \frac{T.\,AP^2.\,G.\,RC.\,QP}{AC^2.\,QP}$$

$$C = \frac{T.\,AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C.\,AC}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur maſſa V corporis in P pro altero D ſubſtituendi & gravitate N animandi $= \frac{AD^2.\,D}{AP^2}$

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, eſt $\frac{T.\,M + V.\,N + \&c.}{T + V}$

Vi antecedentium cum ſit

$$T.\,M = \frac{C.\,AC^2.\,AP^2.\,G.\,RC}{AP^2.\,AC^2.\,QP} = \frac{C.\,G.\,RC}{QP}$$

$$\& \; V.\,N = \frac{D.\,AD^2.\,AP^2.\,G.\,DS}{AP^2.\,AD^2.\,QP} = \frac{D.\,G.\,DS}{QP}$$

$$T + V = \frac{AC^2.\,C + AD^2.\,D}{AP^2}$$

erit $\frac{T.\,M + V.\,N}{T + V}$

$$= \frac{AP^2.\,C.\,G.\,RC + AP^2.\,D.\,G.\,DS}{QP.\,AC^2.\,C + QP.\,AD^2.\,D}$$

$$= \frac{C.\,RC + D.\,DS}{C.\,AC^2 + D.\,AD^2}\,.\,\frac{AP^2.\,G}{QP}$$

Habemus adeo gravitatem fictitiam, qua animandum eſt pendulum AP, ut ſit compoſito iſochronum in inſtanti, quia RC, SD &c. variabiles in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur:

$$\frac{C.\,RC + D.\,SD}{C.\,AC^2 + D.\,AD^2}\,.\,\frac{AP^2.\,G}{PQ} : G = AP : AZ$$

$$(C.\,RC + D.\,SD)\,AP : C.\,AC^2 + D.\,AD^2 = 1 : AZ$$ (§. 185 *Arithm.*)

Quamobrem

$$AZ = \frac{C.\,AC^2 + D.\,AD^2}{C.\,RC + D.\,SD}\,.\,\frac{QP}{AP}$$

Quæ eſt longitudo penduli fictitii in inſtanti compoſito iſochroni ob RC, SD, QP variabiles.

Sit jam in F centrum gravitatis, erit ob parellelas FE & QP (§. 268 *Geom.*)

$$QP : AP = FE : AF$$

adeoque $AF = \frac{AP.FE}{QP}$ = quantitati conſtanti.

Erit etiam ob centrum gravitatis in F (*§.* 153)

$$(C+D)\,EF = RC.C + SD.D$$

adeoque ſi AP tranſit per centrum gravitatis F, hoc eſt, ſi ſit *linea centri* phraſi *Hugeniana*; erit

$$AZ = \frac{C.AC^2 + D.DA^2 \text{ \&c.}}{(C+D \text{ \&c.})\,AF}$$

Atque hæc eſt regula *Hugeniana* pro inveniendo centro oſcillationis in pendulo quocunque compoſito, quam ipſius verbis enunciat ſequens.

Theorema. Si pondera ſingula penduli compoſiti ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe oſcillationis & ſumma productorum dividatur per id, quod fit ducendo ponderum ſummam in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti.

COROLLARIUM 1.

430. Si pondera omnia fuerint æqualia, nempe $D = F = H = B$ &c. $= P$ & numerus ponderum n; erit

$$AO = \frac{P.AD^2 + P.FA^2 + P.HA^2 + P.BA^2 \text{ \&c.}}{nP.AR}$$ Tab. IV. Fig. 48.

hoc eſt, $AO = \frac{AD^2 + FA^2 + HA^2 + BA^2 \text{ \&c.}}{nAR}$

COROLLARIUM 2.

431. Quoniam D. AD eſt momentum ponderis D (*§.* 153); ſi momenta conſiderentur ut pondera ad rectam AB applicata; centrum oſcillationis coincidet cum centro gravitatis communi horum ponderum (§. 429) adeoque momentis in ponderum locum ſurrogatis eodem modo determinatur centrum oſcillationis, quo ſupra centrum gravitatis commune inveſtigavimus (§. 157).

COROLLARIUM 3.

432. Si figura plana circa axem RI ita oſcilletur, ut is ſemper maneat in plano oſcillante ſeu (quod perinde eſt) ordinatis figuræ MN conſtanter ſit parallelus; ſingulæ ponduſculi cujuscunque MNnm partes ab axe oſcillationis RI æqualiter diſtant (*§.* 216 *Geom.*), nec aliter oſcillatur e.gr. particula G ac ſi in puncto L ſuſpenderetur. Eſt adeo momentum integri ponduſculi MNnm (ſi fuerit $AP = LG = x$, $MN = 2y$, $Pp = dx$,) $= 2yxdx$, conſequenter diſtantia centri oſcillationis ab axe $= 2\int yx^2dx : 2\int yxdx$ (§. 157) $= \int yx^2dx : \int yxdx$. Quodſi adeo ex æquatione ſpeciali ad figuram aliquam datam valor ipſius y ſubſtituatur & elementa debita ratione integrentur; prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe in terminis ordinariis. Tab. I. Fig. 9.

PRO-

PROBLEMA 62.

Tab. I. Fig. 2. 433. *Determinare centrum oſcillationis in linea recta AB.*

RESOLUTIO.

Sit AB $= a$, AD $= x$, erit particula infinite parva DP $= dx$, momentum hujus ponduſculi xdx, conſequenter diſtantia centri oſcillationis in parte AD a puncto ſuſpenſionis A $= \int x^2 dx : \int xdx = \frac{1}{3} x^3 : \frac{1}{2} x^2 = \frac{2}{3} x$. Quodſi pro x ſubſtituatur a, prodibit diſtantia centri oſcillationis in recta integra AB $= \frac{2}{3} a$.

SCHOLION.

434. *Hac ratione definitur centrum oſcillationis fili ferrei circa alterum extremum oſcillantis.*

PROBLEMA 63.

Tab. I. Fig. 9. 435. *Determinare centrum oſcillationis rectanguli RIHS in puncto medio A lateris RI ſuſpenſi & circa axem RI oſcillantis.*

RESOLUTIO.

Si fuerit RI $=$ SH $= a$, AP $= x$, erit P$p = dx$ & elementum areæ, conſequenter unum ponduſculum $= adx$ & momentum ejus $axdx$ (§. 153). Quare (§. 433) $\int ax^2 dx : \int axdx = \frac{1}{3} ax^3 : \frac{1}{2} ax^2 = \frac{2}{3} x$ indefinite exprimit diſtantiam centri oſcillationis ab axe oſcillationis in ſegmento RCDI. Quodſi igitur pro x ſubſtituatur integri rectanguli altitudo RS $= b$; prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{2}{3} b$.

PROBLEMA 64.

436. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri SAH circa axem RI baſi SH parallelum oſcillantis.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE $= a$, AP $= x$, EH $= \frac{1}{2} b$, PV $= y$, erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PV = AE : EH$$
$$x : y = a : \tfrac{1}{2} b$$
$$ay = \tfrac{1}{2} bx$$
$$y = bx : 2a$$

Hinc $\int yx^2 dx = \frac{\int bx^3 dx}{2a} = \frac{bx^4}{8a}$

$$\int yxdx = \frac{\int bx^2 dx}{2a} = \frac{bx^3}{6a}$$

& $\frac{\int yx^2 dx}{\int yxdx} = \frac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8} x = \frac{3}{4} x.$

Quodſi pro x ſubſtituatur altitudo integra AE $= a$, prodibit diſtantia centri oſcillationis in triangulo æquicruro ASH a vertice A $= \frac{3}{4} a = \frac{3}{4}$ AE.

PROBLEMA 65.

437. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri SAH circa baſin SH oſcillantis.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Sint omnia, ut in problemate præcedente, erit PE $= a - x$. Unde

$$\int yx^2dx = \int \frac{bxdx}{2a}(a-x)^2 = \int\left(\tfrac{1}{2}abxdx - bx^2dx + \frac{bx^3dx}{2a}\right) = \tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$$

$$\int yxdx = \int \frac{bxdx}{2a}(a-x) = \int\left(\tfrac{1}{2}bxdx - \frac{bx^2dx}{2a}\right) = \tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$$

&

$$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \left(\tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}\right) : \left(\tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}\right) = \frac{24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4}{96a} : \frac{6abx^2 - 4bx^3}{24a}$$

$$= \frac{6a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8abx^3} = \frac{6a - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}.$$

Habemus adeo diſtantiam centri oſcillationis ab axe in ſegmento SZVH.

Quodſi pro x ſubſtituatur a, prodibit diſtantia centri oſcillationis in integro triangulo SAH $= (6a^2 - 8a^2 + 3a^2):(6a - 4a) = \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}$AE.

PROBLEMA 66.

438. *Determinare centrum oſcillationis in triangulo æquicruro* Tab.
SAH, quod filo inflexili & gravita- I.
tis experte Ah *ſuſpenſum circa* Fig.
axem ri *baſi SH parallelum oſcil-* 9.
latur.

RESOLUTIO.

Sit $Ah = c$, reliqua ſint ut ſupra (§. 437): erit $Ph = c + x$. Unde

$$\int yx^2dx = \int (c+x)^2 \frac{bxdx}{2a} = \int\left(\frac{bc^2xdx}{2a} + \frac{bcx^2dx}{a} + \frac{bx^3dx}{2a}\right) = \frac{bc^2x^2}{4a} + \frac{bcx^3}{3a} + \frac{bx^4}{8a} = \frac{24bc^2x^2 + 32bcx^3 + 12bx^4}{96a}$$

$$= \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a}$$

$$\int yxdx = \int (c+x)\frac{bxdx}{2a} = \int\left(\frac{bcxdx}{2a} + \frac{bx^2dx}{2a}\right) = \frac{bcx^2}{4a} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6bcx^2 + 4bx^3}{24a}$$

$$= \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a}.$$

$$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a} : \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a} = \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{6bcx^2 + 4bx^3}$$

$$= \frac{6c^2 + 8cx + 3x^2}{6c + 4x},$$ qui eſt valor diſtan-

ſtantiæ centri oſcillationis ab axe *ri* in ſegmento trianguli AZV.

Quodſi pro x ſubſtituatur trianguli altitudo AE $= a$, prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe oſcillationis *ri* in triangulo integro SAH $(6c^2 + 8ac + 3a^2) : (6c + 4a)$.

SCHOLION.

439. *Ex unico hoc exemplo intelligitur, quid in caſu ſimili aliarum figurarum facto opus ſit.*

PROBLEMA 67.

Tab. I. Fig. 9. 440. *Determinare centrum oſcillationis in infinitis parabolis & curvis agnatis circa axem RI baſi SH parallelum oſcillantibus.*

Quoniam (§. 163) $\int xydx = \int x^{(r+n):n}dx = \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$

erit $\int x^{(r+2n):n}dx = \frac{n}{r+3n} x^{(r+3n):n}$

& $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx} = \frac{(r+2n)\, x^{(r+3n):n}}{(r+3n)\, x^{(r+2n):n}}$
$= \frac{r+2n}{r+3n} x$.

E. gr. In parabola Apolloniana $r = 1$, $n = 2$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{5}{7}$ AE.

In paraboloide cubicali $r = 1$, $n = 3$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{7}{10}$ AE.

In paraboloide biquadratico $r = 1$, $n = 4$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{9}{13}$ AE.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $r = 2$, $n = 3$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{8}{11}$ AE.

In curva, ad quam $a^2x^3 = y^5$, $r = 3$, $n = 5$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{13}{18}$ AE.

PROBLEMA 68.

441. *Invenire centrum oſcillationis in parabola SAH circa baſin SH agitata.*

RESOLUTIO.

Sit AE $= b$, AP $= x$, MP $= y$; erit $ydx = x^{1:2}dx$, EP $= b - x$ & diſtantia centri oſcillationis $= \int x^{1:2}dx\,(b-x)^2 : \int x^{1:2}dx\,(b-x)$. Quoniam itaque $\int x^{1:2}dx\,(b-x)^2 = \int b^2x^{1:2}dx - \int 2bx^{3:2}dx + \int x^{5:2}dx = \frac{2}{3}b^2x^{3:2} - \frac{4}{5}bx^{5:2} + \frac{2}{7}x^{7:2} = \frac{70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2}}{105}$, & Tab. I. Fig. 9.

$\int x^{1:2}dx\,(b-x) = \int bx^{1:2}dx - \int x^{3:2}dx = \frac{2}{3}bx^{3:2} - \frac{2}{5}x^{5:2} = \frac{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}}{15}$;

erit diſtantia centri oſcillationis

$$= \frac{15(70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2})}{105(10bx^{3:2} - 6x^{5:2})}$$

$$= \frac{35b^2 - 42bx + 15x^2)}{35b - 21x}$$

Quodſi fiat $x = b$, erit diſtantia cen-

centri oſcillationis totius parabolæ SAH a baſi SH

$$= \frac{35b^2 - 42b^2 + 15b^2}{35b - 21b}$$

$$= \frac{8b^2}{14b}$$

$$= \tfrac{4}{7}b = \tfrac{4}{7}\,AE.$$

PROBLEMA 69.

442. *Invenire centrum oſcillationis in infinitis parabolis SAH circa baſin SH agitatis.*

RESOLUTIO.

Quoniam pro infinitis parabolis $y^m = x$ (§. 519 *Analyſ.*);

$$y = x^{1:m}$$

$$ydx = x^{1:m}dx$$

$$x^2 ydx = x^{1:m}dx\,(b-x)^2$$
$$= x^{1:m}dx\,(b^2 - 2bx + x^2)$$
$$= b^2 x^{1:m}dx - 2bx^{1+1:m}dx + x^{2+1:m}dx$$

$$\int x^2 ydx = \frac{m}{m+1} b^2 x^{1+1:m} - \frac{2}{2m+1} bx^{2+1:m} + \frac{m}{3m+1} x^{3+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)(3m+1)b^2 x^{1+1:m} - 2m(m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)(2m+1)x^{3+1:m}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)}$$

$$\int xydx = \int bx^{1:m}dx - \int x^{1+1:m}dx$$

$$= \frac{m}{m+1} bx^{1+1:m} - \frac{m}{2m+1} x^{2+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)bx^{1+1:m} - (m+1)x^{2+1:m}}{(m+1)(2m+1)}$$

$$\frac{\int x^2 ydx}{\int xydx} = \frac{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)b^2x^{1+1:m} - 2m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)^2(2m+1)^2x^{3+1:m}}{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)x^{2+1:m}}$$

$$= \frac{(2m+1)(3m+1)b^2 - (2m+2)(3m+1)bx + (m+1)(2m+1)x^2}{(2m+1)(3m+1)b - (m+1)(3m+1)x}$$

Quodſi fiat $x = b$, cum ſit

$$(2m+1)(3m+1) = 6m^2 + 5m + 1$$

$(2m+$

$(2m+2)(3m+1) = 6m^2+8m+2$
$(m+1)(2m+1) = 2m^2+3m+1$
$(m+1)(3m+1) = 3m^2+4m+1$
reperietur diſtantia centri oſcillationis in infinitis parabolis a baſi SH =

$$\frac{2m^2b^2}{(3m^2+m)b} = \frac{2mb}{3m+1} = \frac{2m}{3m+1}AE.$$

Sit jam $m=2$, prodibit eadnm diſtantia $= \frac{4}{7}$ AE, ut ante (§. 441).

LEMMA 2.

Tab. XVI. Fig. 157. 443. *Si in triangulo quocunque MAN ducitur ut cunque recta AP; erit* $AM^2 . PN + AN^2 . PM = AP^2 . MN + PM . PN . MN$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $o = P$ (§. 156 *Geom.*) & ang. MAD = MND (§. 315 *Geom.*), erit AM : AP = ND : NP (§. 267 *Geom.*).
adeoque AM. NP = AP. ND (§. 297 *Arithm.*).

Similiter $u = y$ (§. 156 *Geom.*) & ang. ANM = ADM (§. 315 *Geom.*), conſequenter (§. 267 *Geom.*)

AN : AP = MD : MP

adeoque AN. MP. = AP. MD (§. 297 *Arithm.*):

Eſt vero MN. AD = AM. ND + AN. MD (§. 324 *Analyſ.*). Quare cum ſit AD = AP + PD (§. 86 *Arithm.*); erit etiam MN. AP + MN. PD = AM. ND + AN. MD, conſequenter $MN. AP^2 + MN. PD. AP = AM. ND. AP + AN. MD. AP$ (§. 93 *Arithm.*). Quare cum ſit *per demonſtrata*

ND. AP = AM. NP

MD. AP = AN. MP

atq; AP. PD = MP. PN (§. 381 *Geom.*); erit $MN. AP^2 + MN. MP. PN = AM^2 . NP + AN^2 . MP$. *Q. e. d.*

SCHOLION.

444. *Utimur hoc lemmate in determinando centro oſcillationis in figuris, quæ* in latus agitantur, *hoc eſt, circa axem ad planum figuræ normalem. Ejus enim determinatio difficilior eſt in hoc caſu, quam in præcedente, ubi agitatio fit in planum: quemadmodum videre eſt apud* Hugenium (k). *Calculum differentialem ad hoc negotium applicavit* Jacobus Bernoulli (l). *Nos primum regulam generalem demonſtrabimus eamque deinde ad problemata ſpecialia applicabimus, quemadmodum in caſu præcedẽnte factum.*

PROBLEMA 70.

445. *Determinare centrum gravitatis in figuris in latus agitatis.* Tab. XVI. Fig. 158.

RESOLUTIO.

Ponamus Figuram AMN agitari

S in

(k) in Horolog. oſcillat, part. 4. f. 91. & ſeqq.
(l) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1703. p. m. 96 327.

in latus, hoc eſt, ita ut planum figuræ AP ſi ad axem oſcillationis normale. Conſideremus primum duo puncta M & N tanquam pondera æqualia, aut ſumantur pro punctis potius rectarum MP & PN portiones infinite parvæ; erit eorum centrum gravitatis commune ob MP = PN in P (§. 154), atque adeo pondus in P = M + N (§. 125), conſequenter diſtantia centri oſcillationis penduli hujus compoſiti $= \frac{M.AM^2 + N.AN^2}{(M+N)\,AP}$ (§. 429). Eſt vero M=N & MP = PN *per hypoth.* Ergo diſtantia centri oſcillationis $= \frac{PN.AM^2 + PM.AN^2}{(M+N)\,AP}$. Eſt vero $PN.AM^2 + PM.AN^2 = MN.AP^2 + MN.MP.PN$ (§. 443), conſequenter $M.AM^2 + N.AN^2 = MN.AP^2 + MN.MP.PN$, hoc eſt, ob M=N, & PM = PN adeoque MN = PM + PN, $\frac{M.AM^2 + N.AN^2}{P.AP} = \frac{P.AP^2 + P.MP.MP}{P.AP}$. Jam cum recta MN in innumera iſtiusmodi ponduſcula reſolvi poſſit, qualia ſunt M & N = dp; ſi PM ſumatur variabilis & dicatur y, AP vero x, ſumma ponduſculorum duorum M & N = dp; erit pro duobus ponduſculis diſtantia centri oſcillationis $\frac{x^2dp + y^2dp}{xdp}$, conſequenter pro omnibus ponduſculis ſecundum rectam MN conſtitutis diſtantia centri oſcillationis $= \frac{2\int x^2dp + 2\int y^2dp}{2\int xdp} = \frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp}$. Enimvero cum ponduſcula dp ſint parallelogrammula, quorum latitudo eſt differentiale dy, altitudo differentiale abſciſſæ, adeoque $dp = dxdy$ & dx reſpectu dy conſtans eſt; erit $\int dp = dx \int dy$. Similiter quia y variabilis eſt reſpectu x, quod ejus intuitu pro conſtante habetur; erit $\int x^2dy = x^2y$ & $\int y^2dy = \frac{1}{3}y^3$ & $\int xdy = xy$, conſequenter ſi jam y ſumatur pro integra ſemiordinata PM; erit diſtantia centri oſcillationis in integra figura plana oſcillante MAN $= \frac{\int x^2ydx + \int \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$. Non alia igitur re opus eſt, quam ut pro y ex æquatione ad curvam ſpeciali ſubſtituatur valor ipſius y & y^3.

COROLLARIUM I.

446. $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx}$ exprimit diſtantiam centri oſcillationis in figura in planum agitata (§. 432). Quare ſi diſtantia centri oſcil-

oſcillationis in figura in latus agitata deſideretur; ad illam nonniſi adjicienda $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xydx}$, ubi data vel jam inventa præſupponitur.

COROLLARIUM 2.

447. Liquet etiam hinc, diſtantiam centri oſcillationis in figura in planum agitata & in eadem in latus agitata, ſiquidem ita viſum fuerit, una reperiri poſſe.

PROBLEMA 71.

Tab. I. Fig. 9. 448. *Determinare centrum oſcillationis rectanguli RIHS ex puncto medio A lateris RI ſuſpenſi & in latus agitati.*

RESOLUTIO.

Si fuerit RI $=$ SH $= a$. AP $= x$. erit diſtantia centri oſcillationis ab axe ſive a puncto A pro agitatione in planum $= \frac{2}{3} x$ ſeu pro integro rectangulo $= \frac{2}{3} b$ &, ob $y = a$, $\int xydx = \int axdx = \frac{1}{2} ax^2$ (§.435) & $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{1}{3} a^3 dx = \frac{1}{3} a^3 x$. Quare $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xydx}$ ſeu particula adjicienda, ut prodeat diſtantia centri oſcillationis rectanguli in latus agitati (§.446), $= \frac{2a^3x}{3ax^2} = \frac{2a^2}{3x}$, ſeu ſi porro fiat $x = b$, $= \frac{2a^2}{3b}$. Eſt igitur diſtantia quæſita $= \frac{2}{3} b + \frac{2a^2}{3b}$.

PROBLEMA 72.

449. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri SAH ex vertice ſuſpenſi & in latus agitati.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE $= a$, AP $= x$, EH $= \frac{1}{2} b$, PV $= y$; erit diſtantia centri oſcillationis in planum agitati trianguli $= \frac{3}{4} x$, aut totius trianguli $= \frac{3}{4} a$; $\int yxdx = \frac{bx^3}{6a}$ & $y = \frac{bx}{2a}$ (§.436). Quare $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{b^3 x^3 dx}{24a} = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$, conſequenter particula adjicienda $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xydx} = \frac{b^3 x^4}{96a^3} : \frac{bx^3}{6a} = \frac{6ab^3x^4}{96a^3bx^3} = \frac{b^2 x}{16a^2}$

Eſt igitur diſtantia centri oſcillationis trianguli æquicruri ex vertice ſuſpenſi & in latus agitati $= \frac{3}{4} x + b^2 x : 16a^2$. Quodſi fiat $x = a$; erit diſtantia centri oſcillationis trianguli æquicruri $= \frac{3}{4} a + \frac{b^2}{16a}$.

PROBLEMA 73.

Tab. I. Fig. 9. 450. *Determinare centrum oſcil-*

cillationis trianguli æquicruri SAH in medio baſis SH ſuſpenſi & in latus agitati.

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, erit PE = $a - x$, $\int yxdx = \frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$ & diſtantia centri oſcillationis trianguli in planum agitati = $\frac{6a^2-8ax+3x^2}{6a-4x}$, aut integri trianguli = $\frac{1}{2}a$. Sed $\int \frac{1}{3}y^3dx = \frac{b^3x^4}{96a^3}$ (§.494). Ergo pars addenda = $\frac{24ab^3x^4}{96a^3(abx^2-4bx^2)} = \frac{3b^2x^2}{72a^3-48a^2x}$ conſequenter, ſi fiat $x = a$, pro triangulo integro $\frac{3a^2b^2}{72a^3-48a^3} = \frac{3b^2}{24a} = \frac{b^2}{8a}$. Eſt igitur diſtantia centri oſcillationis trianguli æquicruri in medio baſis ſuſpenſi & in latus agitati = $\frac{1}{2}a + \frac{b^2}{8a}$

PROBLEMA 74.

451. *Determinare centrum oſcillationis parabolæ ex vertice ſuſpenſæ & in latus agitatæ.*

RESOLUTIO.

In Parabola in planum agitata diſtantia centri oſcillationis a vertice eſt $\frac{5}{7}x$ &, ſi parameter = 1, $y^2 = x$ adeoque $y^3 = x^{1+1:2}$ & $\int yxdx = \frac{2}{5}x^{5:2}$ (§.440). Quare cum porro ſit $\int \frac{1}{3}y^3dx = \int \frac{1}{3}x^{3:2}dx = \frac{2}{15}x^{5:2}$; erit pars adjicienda = $\frac{2}{15}x^{5:2} : \frac{2}{5}x^{5:2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Eſt nempe parameter unitas, adeoque $\frac{1}{3}$ pars tertia parametri: quæ ſi dicatur b, erit pars adjicienda = $\frac{1}{3}b$. Habemus adeo diſtantiam centri oſcillationis a vertice parabolæ in latus agitatæ = $\frac{5}{7}x + \frac{1}{3}b$.

PROBLEMA 75.

452. *Determinare centrum oſcillationis in infinitis parabolis in latus agitatis, & ex vertice ſuſpenſis.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis in planum agitatis diſtantia centri oſcillationis a vertice eſt $\frac{r+2n}{r+3n}x$, $\int xydx = \frac{n}{r+2n}x^{(r+2n):n}$ &, quia $y = x^{r:n}$, $y^3 = x^{3r:n}$ (§. 439). Quoniam itaque $\int \frac{1}{3}y^3dx = \frac{n}{3(3r+n)}x^{(3r+n):n} = \frac{n}{(9r+3n)}x^{(3r+n):n}$; erit pars adjicienda = $\frac{n}{9r+3n}x^{(3r+n):n} : \frac{n}{r+2n}x^{(2+n):n} = \frac{r+2n}{9r+3n}x^{(2r-n):n}$. Eſt itaque diſtan-

ſtantia centri oſcillationis in infinitis parabolis aliisque curvis in latus agitatis $\frac{r+2n}{r+3n}x + \frac{r+2n}{9r+3n}x^{(2r-n):n}$.

Quoniam in parabola Apolloniana $r=1$, $n=2$, erit $\frac{r+2n}{r+3n} = \frac{1+4}{1+6} = \frac{5}{7}$, $\frac{r+2n}{9r+3n} = \frac{1+4}{9+6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{2r-n}{n} = \frac{2-2}{2} = 0$, adeoque $x^{(2r-n):n} = x^0 = 1$. Eſt adeo in parabola Apolloniana diſtantia centri oſcillationis a vertice $\frac{5}{7}x + \frac{1}{3}b$, ſi nempe parameter $=b$, prorſus ut in problemate præcedente (451).

PROBLEMA 76.

453. *Determinare centrum oſcillationis parabolæ ex dimidia baſi ſuſpenſæ & in latus agitatæ.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 9. In parabola SAH circa baſin SH in planum agitata diſtantia centri oſcillationis a baſi eſt $\frac{4}{7}b$, ſeu $\frac{4}{7}$ AE &c, ſi parameter $=1$, $y^3 = x^{3:2}$ & $\int xydx = 10bx^{3:2} - 6x^{5:2}$ (§. 441). Quare cum porro ſit $\int \frac{1}{3}y^3dx = \frac{2}{15}x^{5:2}$; erit $\int \frac{1}{3}y^3dx : \int xydx$, ſeu pars addenda $\frac{2x^{5:2}}{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}} = \frac{x}{5b-3x}$ $=$ (ſi parameter 1 fiat $=a$) $\frac{ax}{5b-3x}$, conſequenter ſi fiat $x=b$, prodibit pars adjicienda $= \frac{ab}{5b-3b} = \frac{1}{2}a$.

Eſt igitur diſtantia centri oſcillationis parabolæ ex dimidia baſi ſuſpenſæ & in latus agitatæ $= \frac{4}{7}b + \frac{1}{2}a$.

PROBLEMA 77.

454. *Invenire centrum oſcillationis in figuris ſolidis rotatione genitis.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus eſt, quam ut Tab. XVI. Fig. 158. in formula ſuperiori $\frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp}$ figuris ſolidis convenienter explicetur valor ponduſculi dp. Deſignat autem dp elementum Solidi, quod habetur ducendo in ſe invicem differentialia abſciſſæ PQ & ſemiordinatæ QK atque ſemiordinatam QK. Sit $PQ=y$, $AP=x$, $QK=v$, erit elementum $vdydx$, conſequenter cum $\int vdy$ exprimat ſegmentum PQLN, quod concipitur inſtar ponduſculi in QP collectum, ſi PM ſit $=y$, $\int vdy$ exprimit integrum ſemicirculum in lineam rectam MN collectum inſtar ponderis. Sit adeo ratio radii ad ſemiperipheriam $= r:p$; erit ſemiperipheria radio $PM=y$ deſcripta $= \frac{py}{r}$, conſequenter area ſemicirculi $= \frac{py^2}{r}$, adeoque ponduſculum dp in valore $\int x^2dp$ ſubſtituen-

tuendum $= \frac{py^2dx}{r}$; unde $\int x^2dp = \int \frac{px^2y^2dx}{r} = \frac{p}{r}\int x^2y^2dx$. Quodſi idem valor ſubſtituatur in $\int xdp$; reperietur idem $\frac{p}{r}\int xy^2dx$. Subſtituatur valor ipſius dp etiam in formula y^2dp; erit ponduſculum puncto Q reſpondens y^2vdydx, conſequenter ponduſcula reſpondentia lineæ $QP = dx\int vy^2dy$. Dicatut radius circuli $PN = t$: erit $v = V.(t^2-y^2)$, adeoque $\int vy^2dy = \int y^2dyV(t^2-y^2)$. Eſt vero $\int y^2dyV(t^2-y^2) = \frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$ (§. 455). Ergo omnia ponduſcula reſpondentia lineæ QP ſunt $\frac{1}{4}t^2dx\int vdy - \frac{1}{4}yv^3dx$. Jam $\int vdy$ exprimit ſegmentum circuli PQKL, adeoque degenerat in ſemicirculum radio PM deſcriptum, quando PQ efficitur ipſi PM æqualis, adeoque $t = y$. In eo igitur caſu cum area ſemicirculi ſit $\frac{py^2}{r}$, eſt $\int\frac{1}{4}t^2dx\int vdy = \frac{py^4dx}{4r}$. Et quoniam in M ſemiordinata QN evaneſcit, erit $v = o$, adeoque etiam $\frac{1}{4}yv^3 = o$. Prodit adeo tandem

$$\frac{\int x^2dp+\int y^2dp}{\int xdp} = \frac{pr\int x^2y^2dx+\frac{1}{4}pry^4dx}{pr\int xy^2dx} = \frac{\int x^2y^2dx+\int\frac{1}{4}y^4dx}{\int xy^2dx},$$

ut adeo in caſu ſpeciali non alia re opus ſit, quam ut pro y ſubſtituatur valor ex æquatione curvæ, vel figuræ, cujus rotatione ſolidum generatur, quemadmodum problemata ſequentia docent.

SCHOLION 1.

455. *Diximus, ſi t ſit conſtans quantitas & $v = V(t^2-y^2)$, eſſe $\int vy^2dy = \frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$. Id vero facile probatur, differentiando utrumque integralis membrum: quo facto reſtituitur differentiale ad integrandum propoſitum (§. 92. Analyſ. infin.). Quodſi ergo $\frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$ differentietur, cum t conſtans ſit, prodit $\frac{1}{4}t^2vdy - \frac{1}{4}v^3dy - \frac{3}{4}yv^2dv$. Jam quia $v = V(t^2-y^2)$ per hypoth. $vdv = -ydy$ & $v^2 = t^2-y^2$. Quare his valoribus in $\frac{3}{4}yv^2dv$ & $\frac{1}{4}v^3dy$ ſubſtitutis; differentiale emergit $\frac{1}{4}t^2vdy - \frac{1}{4}t^2vdy + \frac{1}{4}vy^2dy + \frac{3}{4}vy^2dy = \frac{4}{4}vy^2dy = vy^2dy$, quod erat elementum ad integrandum propoſitum.*

SCHOLION 2.

456. *Quoniam ſolida rotatione figurarum circa axen fixum genita eodem modo agitantur, in quamcunque partem fiat agitatio; non hic attendenda venit differentia, qua-*

qualem in figuris planis inter agitationem in planum & in latus conſideravimus, adeoque in omni caſu eadem formula ſatisfacit.

PROBLEMA 78.

457. *Determinare centrum oſcillationis in cylindro ex centro baſis ſupenſo.*

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 159. Sit altitudo cylindri $AB = a$, $CB = b$, $AP = x$. Quoniam omnes circuli baſi paralleli æquales ſunt, erit in cylindro $PM = CB$, hoc eſt, $y = b$. Unde habemus (§. 454):

$$x^2y^2dx = b^2x^2dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4dx$$
$$xy^2dx = b^2xdx,$$

adeoque
$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{3}b^2x^2$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}b^2x^2$$

Quare diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $= \frac{\frac{1}{3}b^2x^2 + \frac{1}{4}b^4x}{\frac{1}{2}b^2x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{b^2}{2x}$. Quodſi fiat $x = a$, prodit diſtantia centri oſcillationis pro integro cylindro $\frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

SCHOLION.

458. *Equidem* Dechales (m) *centri oſcillationis diſtantiam in Cylindro ex centro baſis ſuſpenſi tantummodo facit* $\frac{2}{3}a$; *ſed ipſe non diffitetur ſuo tempore theoriam centri oſcillationis nondum fuiſſe excultam: immo vix fando quid audiverat de regula* Hugeniana, *qua in Horologio Oſcillatorio demonſtratur* (n).

PROBLEMA 79.

459. *Determinare centrum oſcillationis in Cono ex vertice ſuſpenſi.*

RESOLUTIO.

Si altitudo Coni $AC = a$, radius baſis $BC = b$, $AP = x$ $PM = y$; erit $y = bx : a$ (§. 268. *Geom.*). Quare (§. 454). Tab. II. Fig. 15.

$$x^2y^2dx = b^2x^4dx : a^2$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x^4dx : a^4$$
$$xy^2dx = b^2x^3dx : a^2$$

adeoque
$$\int x^2y^2dx = b^2x^5 : 5a^2$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = b^4x^5 : 20a^4$$
$$\int xy^2dx = b^2x^4 : 4a^2$$

Diſtantia igitur centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $= \left(\frac{b^2x^5}{5a^2} + \frac{b^4x^5}{20a^4}\right) : \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{4}{5}x + \frac{b^2x}{5a^2}$. Quodſi jam porro fiat $x = a$; prodit diſtantia centri oſcillationis pro cono integro $= \frac{4}{5}a + \frac{b^2}{5a}$.

PROBLEMA 80.

460. *Determinare centrum oſcillationis Sphæræ.*

RESO-

(m) in Mundo Mathem. Tom. 2. Stad. lib. 3. prop. 65. f. m. 322.
(n) vide prop. præc. 64.

RESOLUTIO.

Si diameter ſphæræ = $2r$, erit $y^2 = 2rx - x^2$ (§. 377. *Analyſ.*), adeoque $y^4 = 4r^2x^2 - 4rx^3 + x^4$. Habemus adeo (§. 453).

$$x^2y^2dx = 2rx^3dx - x^4dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = r^2x^2dx - rx^3dx + \tfrac{1}{4}x^4dx$$
$$xy^2dx = 2rx^2dx - x^3dx$$

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{2}rx^4 - \tfrac{1}{5}x^5$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{3}r^2x^3 - \tfrac{1}{4}rx^4 + \tfrac{1}{20}x^5$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4$$

Eſt itaque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $= \frac{\frac{1}{4}rx^4 + \frac{1}{3}r^2x^3 - \frac{3}{20}x^5}{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4}$ = (multiplicando per 12 & dividendo per x^3) $\frac{3rx + 4r^2 - \frac{9}{5}x^2}{8r - 3x} = \frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$. Quodſi fiat $x = 2r$, prodit diſtantia centri oſcillationis pro Sphæra integra $\frac{30r^2 + 20r^2 - 36r^2}{40r - 30r} = \frac{14}{10}r = \frac{7}{5}r$.

Si pro r ponatur diameter d, quia $d = 2r$, adeoque $\frac{1}{2}d = r$, erit eadem diſtantia $= \frac{7}{10}d$.

COROLLARIUM.

461. Si in formula $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$ fiat $x = r$; prodit diſtantia centri oſcillationis in hemiſphærio $\frac{15r^2 + 20r^2 - 9r^2}{40r - 15r} = \frac{26r}{35}$, ubi nempe ex vertice fuerit ſuſpenſum.

PROPBLEMA 81.

462. *Determinare centrum oſcillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato.*

RESOLUTIO.

Si parameter parabolæ genetricis a; erit $y^2 = ax$ (§. 388 *Analyſ.*), adeoque $y^4 = a^2x^2$. Habemus adeo (§. 454).

$$x^2y^2dx = ax^3dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}a^2x^2dx$$
$$xy^2dx = ax^2dx$$

adeoque
$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{4}ax^4$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{12}a^2x^3$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{3}ax^3$$

Quamobrem diſtantia centri oſcillationis a vertice $= \frac{\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3}{\frac{1}{3}ax^3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a$.

Si diameter baſis fuerit b, & altitudo Conoidis $= c$; erit parameter $= b^2 : c$ (§. 391 *Analyſ.*). Quodſi ergo x degenerat in c; prodit diſtantia centri oſcillationis a vertice in Conoide integro $= \frac{3}{4}c + bb : 4c$.

PROBLEMA 82.

460. *Determinare centrum oſcillationis in omnibus Conoidibus para-*

parabolicis in infinitum circa verticem agitatis.

RESOLUTIO.

Si parameter fuerit 1, pro omnibus parabolis in infinitum erit $y = x^{1:m}$ (*§.519. Analyſ.*), adeoque $y^2 = x^{2:m}$ & $y^4 = x^{4:m}$. Habemus itaque (*§. 454*).

$$x^2y^2dx = x^{2+2:m}dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}x^{4:m}dx$$
$$xy^2dx = x^{1+2:m}dx$$

$$\int x^2y^2dx = \frac{m}{3m+2}x^{2+2:m}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \frac{m}{4m+16}x^{1+4:m}$$
$$\int xy^2dx = \frac{m}{2m+2}x^{2+2:m}$$

Eſt igitur diſtantia centri oſcillationis in infinitis Conoidibus parabolicis circa verticem agitatis $\frac{2m+2}{3m+2}x + \frac{2m+2}{4m+16}x^{-1+2:m}$ $= \frac{2m+2x}{3m+2} + \frac{m+1}{2m+8}x^{-1+2:m}$

Ponatur $m=2$, prodit $\frac{6}{8}x + \frac{3}{12}x^{-0}$, hoc eſt, ob $x^0 = 1$ (§. 55. *Analyſ.*), $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Si parameter, quam poſuimus $= 1$, fiat a; erit diſtantia centri oſcillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a$, prorſus ut ante (§. 462).

PROPLEMA 83.

464. *Determinare centrum oſcillationis in Conoide hyperbolico circa verticem agitato.*

RESOLUTIO.

Quoniam planum deſcribens eſt hyperbola, ſi axis transverſus dicitur a, parameter, b, erit $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ (459. *Analyſ.*), adeoque $y^4 = b^2x^2 + \frac{2b^2x^3}{a} + \frac{b^2x^4}{a^2}$. Habemus igitur (§. 454).

$$x^2y^2dx = bx^3dx + \frac{bx^4dx}{a}$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^2x^2dx + \frac{b^2x^3dx}{2a} + \frac{b^2x^4dx}{4a^2}$$
$$xy^2dx = bx^2dx + \frac{bx^3dx}{a}$$

adeoq; $\int x^2y^2dx = \frac{1}{4}bx^4 + \frac{bx^5}{5a}$
$$= \frac{5abx^4 + 4bx^5}{20a}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{12}b^2x^3 + \frac{b^2x^4}{8a} + \frac{b^2x^5}{20a^2}$$
$$= \frac{160a^2b^2x^3 + 240abx^4 + 96b^2x^5}{12a \cdot 160a^2}$$

$$= \frac{10a^2b^2x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a \,.\, 10a}$$

$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{4a}$$

$$= \frac{4abx^3 + 3bx^4}{12a}$$

Prodit itaque

$$\frac{\int x^2y^2dx}{\int xy^2dx} = \frac{3.5abx^4 + 3.4bx^5}{5.4abx^3 + 5.3bx^4}$$

$$= \frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x}$$

$$\frac{\int \frac{1}{2}y^4dx}{\int xy^2dx} = \frac{10a^2b^2x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{10a.4abx^3 + 10a.3bx^4}$$

$$= \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Eſt adeo diſtantia centri oſcillationis a vertice in Conoide hyperbolico $\frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x} + \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$

Quodſi fiat $x = a$, prodibit diſtantia Centri oſcillationis a vertice in Conoide hyperbolico, cujus altitudo axi transverſo æqualis, $\frac{15a^2 + 12a^2}{20a + 15a} + \frac{10a^2b + 15a^2b + 6a^2b}{40a^2 + 30a^2} = \frac{27}{35}a + \frac{31}{70}b.$

PROBLEMA 84.

465. *Determinare centrum oſcillationis in ſphæroide elliptico ex vertice, ſeu altero axis majoris extremo ſuſpenſo.*

RESOLUTIO.

Si axis transverſus fuerit a, parameter b; erit $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (420. *Analyſ.*), adeoque $y^4 = b^2x^2 - \frac{2bx^3}{a} + \frac{b^2x^4}{a^2}$. Reperitur adeo, uti in problemate præcedente (§. 464),

$$\int x^2y^2dx = \frac{5abx^4 - 4bx^5}{20a}$$

$$\int \tfrac{1}{2}y^4dx = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a \,.\, 10a}$$

$$\int xy^2dx = \frac{4abx^3 - 3bx^4}{12a}$$

adeoq; $\frac{\int x^2y^2dx}{\int xy^2dx} = \frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x}$

$$\frac{\int \frac{1}{2}y^4dx}{\int xy^2dx} = \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}$$

Eſt igitur diſtantia centri oſcillationis a vertice $\frac{15ax - 12x^2}{20ax - 15x} + \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}.$

Quodſi

Quodſi fiat $x=a$, prodit diſtantia centri oſcillationis a vertice pro integro ſphæroide circa axem majorem agitato $\frac{15a^2 - 12a^2}{20a - 15a} + \frac{16a^2b - 15a^2b}{40a^2 - 30a^2} = \frac{3}{5}a + \frac{1}{10}b$.

Si fiat axis minor $=c$, erit $b = c^2 : a$ (423. *Analyſ.*), adeoque diſtantia centri oſcillationis in Sphæroide $= \frac{3a}{5} + \frac{c^2}{10a}$.

PROBLEMA 85.

466. *Determinare centrum oſcillationis in Cono ex Centro baſis ſuſpenſo.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 15. Sit Semediameter baſis BC $=b$, CP $=x$, AC $=a$, erit AP $= a-x$, conſequenter ob AC : BC = AP : PM (§.327. *Geom.*), PM $= y = (ab - bx) : a = b - bx : a$, $y^2 = b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$ & $y^4 = b^4 - \frac{4b^4x}{a} + \frac{6b^4x^2}{a^2} - \frac{4b^4x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4}$. Habemus adeo (§.454):

$$x^2y^2dx = b^2x^2dx - \frac{2b^2x^3dx}{a} + \frac{b^2x^4dx}{a^2}$$

$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4dx - \frac{b^4xdx}{a} + \frac{6b^4x^2dx}{4a^3} - \frac{b^4x^3dx}{a^3} + \frac{b^4x^4dx}{4a^4}$$

$$xy^2dx = b^2xdx - \frac{2b^2x^2dx}{a} + \frac{b^2x^3dx}{a^2}$$

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{3}b^2x^3 - \frac{b^2x^4}{2a} + \frac{b^2x^5}{5a^2} = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{30a^2}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x - \frac{b^4x^2}{2a} + \frac{5b^4x^3}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{4a^3} + \frac{b^4x^5}{20a^4} = \frac{5a^4b^4x - 10a^3b^4x + 10a^2b^4x^3 - 5ab^4x^4 + b^4x^5}{20a^4}$$

$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}b^2x^2 - \frac{2b^2x^2}{3a} + \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{6a^2b^2x^2 - 8ab^2x^3 + 3b^2x^4}{12a^2}$$

Eſt itaque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $\frac{20a^2x - 30ax^2 + 12x^3}{30a^2 - 40ax + 15x^2} + \frac{15a^4b^2 - 30a^2b^2x + 30a^2b^2x^2 - 15ab^2x^3 + 3b^2x^4}{30a^4x - 40a^3x^2 + 15a^2x^3}$

 Quodſi

Quodſi fiat $x = a$, erit diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis in cono integro =

$$\frac{20a^3 - 30a^3 + 12a^3}{30a^2 - 40a^2 + 15a^2} + \frac{15a^4b^2 - 30a^4b^2 + 30a^4b^2 - 15a^4b^2 + 3a^4b^2}{30a^5 - 40a^5 + 15a^5} = \frac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}.$$

Si altitudo coni fuerit ſemidiametro baſis æqualis, erit $a = b$, adeoque $b^2 : a = a$. Unde diſtantia centri oſcillationis in Cono rectangulo a puncto ſuſpenſionis $\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a = a$.

PROBLEMA 86.

467. *Determinare centrum oſcillationis in hemiſphærio ex centro baſis ſuſpenſo.*

RESOLUTIO.

Quoniam abſciſſæ hic computantur a centro, ſi radius circuli ſit r, erit $y^2 = r^2 - x^2$ (377 *Analyſ.*) & $y^4 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$. Habemus itaque (§. 454).

$$x^2y^2dx = r^2x^2dx - x^4dx$$
$$\frac{1}{4}y^4dx = \frac{1}{4}r^4dx - \frac{1}{2}r^2x^2dx + \frac{1}{4}x^4dx$$
$$xy^2dx = r^2xdx - x^3dx$$
$$\int x^2y^2dx = \frac{1}{3}r^2x^3 - \frac{1}{5}x^5 = \frac{5r^2x^3 - 3x^5}{15}$$
$$\int \frac{1}{4}y^4dx = \frac{1}{4}r^4x - \frac{1}{6}r^2x^3 + \frac{1}{20}x^5 = \frac{15r^4x - 10r^2x^3 + 3x^5}{60}$$
$$\int xy^2dx = \frac{1}{2}r^2x^2 - \frac{1}{4}x^4 = \frac{2r^2x^2 - x^4}{4}$$

Eſt itaque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $\frac{20r^2x - 12x^3}{30r^2 - 15x^2} + \frac{15r^4 - 10r^2x^2 + 3x^4}{30r^2x - 15x^3}$, aut, reductione ad eandem denominationem facta, multiplicando primum membrum per x, $\frac{10r^2x^2 - 9x^4 + 15r^4}{30r^2x - 15x^3}$.

Quodſi fiat $x = r$, prodibit diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis in hemiſphærio integro $= \frac{10r^4 - 9r^4 + 15r^4}{30r^3 - 15r^3} = \frac{16}{15}r$.

SCHOLION.

468. *Non abſimili modo inveniri poteſt centrum oſcillationis Conoidis & ſphæroidis dimidii ex centro baſis ſuſpenſi. Poteſt etiam punctum ſuſpenſionis* h *extra figuram aſſumi, ut diſtantia penduſculi* P *ab axe oſcillationis ſit* li *atque ab abſciſſa figura* AP *differat quantitate* Ah, *veluti ſi figura oſcillans ex filo ſuſpendatur: quo in caſu* Hugenius *reperit in ſphæra ex filo tenui ſuſpenſa diſtantiam centri oſcillationis eſſe longitudinem fili & radium atque duas quintas tertiæ proportionalis ad compoſitam ex ſemidiametro ſphæræ ac longitu-* Tab. I. Fig. 9.

gitudine fili & ſemidiametrum ipſum (o). *hoc eſt, ſi filum* $=l$, *radius* $=r$, $l+r+\frac{2r^2}{5(l+r)}$

PROBLEMA 87.

469. *Determinare quantitatem pedis horarii.*

RESOLUTIO.

1. Horologium pendulo inter duas ſemicycloides ſuſpenſo & ſingulas oſcillationes ſingulis minutis ſecundis aut eorum ſemisſibus abſolvente (§. 382) inſtructum & ſecunda temporis ſcrupula indice peculiari monſtrans ad motum ſtellarum ea ratione componatur, quæ inferius in Aſtronomia exponitur.
2. Globus plumbeus ex filo tenui ſuſpenſus (§. 377) leniter impellatur, ut nonniſi exiguos arcus deſcribat, quo ſingulæ oſcillationes ſint iſochronæ (383) & tamdiu augeatur, vel minuatur fili longitudo, donec oſcillationes ſingulis minutis ſecundis abſolvantur.
3. Quoniam longitudo fili cum radio & duæ quintæ tertiæ proportionalis ad compoſitam ex ſemidiametro & longitudine fili atque ſemidiametrum ipſam definiunt diſtantiam centri oſcillationis ab axe (§. 468); earundem pars tertia quantitatem pedis horarii conſtituit. (§. 425).

SCHOLION 1.

470. Hugenius (p) *hoc modo invenit, pedem horarium eſſe ad Pariſienſem ut* 881 *ad* 864 *hoc eſt, longitudo penduli ſimplicis oſcillationes ſingulas ſingulis minutis ſecundis abſolventis eſſe trium pedum Pariſienſium cum octo lineis & dimidia. Monet autem pedem Pariſienſem ad Rhenanum eſſe ut* 144 *ad* 139, *hoc eſt, quinque ſuis lineis diminui debere, ut alterum relinquat.*

SCHOLION 2.

471. *Quodſi gravitas omnibus in locis eadem eſſet; pes horarius menſura foret univerſalis & perpetua, quemadmodum* Hugenius *contendit: ſed cum eandem variari nunc conſtet pro diverſa ab æquatore diſtantia* (§. 390); *nonniſi iis in locis eadem penduli ſimplicis minuta ſecunda metientis longitudo, quorum latitudines non nimis diſcrepant. Quo itaque menſura vere univerſalis haberetur, opus præterea eſſet, ut ratio longitudinum penduli prædicti in diverſis latitudinibus una determinaretur. Nec hoc forte attentione omni prorſus indignum cenſeri debet, hactenus nec per experimenta conſtare, nec demonſtratum eſſe, quod eodem in loco intra amplum temporis intervallum, veluti aliquot ſeculorum decurſum, gravitas non mutetur.*

(o) in Horol. Oſcill. part. 4. prop. 22. f. 142.
(p) Horol. Oſcillat. part. 4. prop. 25. f. 152 & 153.

THEOREMA 63.

472. *Spatium deſcenſus perpendicularis gravium intra minutum ſecundum temporis eſt ad ſemiſſem longitudinis penduli ſimplicis, cujus oſcillationes minutis ſecundis reſpondent, in ratione duplicata peripheriæ ad diametrum circuli.*

DEMONSTRATIO.

Sit pes horarius ter ſumtus ſeu longitudo penduli ſimplicis, cujus oſcillationes minutis ſecundis horariis reſpondent (§. 425) $= a$, tempus deſcenſus per dimidiam illam longitudinem $= t$, altitudo quæſita $= x$, ratio diametri ad peripheriam $= d : p$; erit $t = d:p$ (§. 387). Eſt vero $t^2 : 1 = \frac{1}{2} a : x$ (87) adeoque $t^2 x = \frac{1}{2} a$, hoc eſt, ſi valor ipſius t modo inventus ſubſtituatur, $d^2 x : p^2 = \frac{1}{2} a$ ſeu $d^2 x = \frac{1}{2} ap^2$. Ergo $x : \frac{1}{2} a = p^2 : d^2$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

473. Quoniam $d : p = 113 : 355$ (§. 431 *Geom.*) & $a = 3' 8\frac{1}{2}'''$ ſeu 737 linearum dimidiarum pedis Pariſienſis (§. 470); erit $x = ap^2 : 2d^2 = 737 . 126025 : 25538 = 1818''' = 15' 1'' 8'''$ ſeu $15' 1''$ quam proxime.

SCHOLION.

474. *Hæc cum experimentis accuratiſſimis prorſus convenire obſervavit* Hugenius (q).

CAPUT X.
DE
MOTU RROJECTORUM.

DEFINITIO 49.

475. *Grave perpendiculariter projici* dicitur, ſi impellitur ſecundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis.

DEFINITIO 50.

476. *Grave horizontaliter projici* dicitur, ſi impellitur ſecundum lineam directionis horizontali apparenti parallelam.

DEFINITIO 51.

477. *Grave oblique projici dicitur*, ſi impellitur ſecundum lineam directionis, quæ cum horizontali apparente angulum efficit obliquum.

DEFINITIO 52.

478. *Angulus elevationis* RAB eſt, quem efficit linea directionis corporis Tab. IV. Fig. 50.

(q) in Horolog. Oſcillat. part. 4. prop. 25. f. 155.

poris projecti AR cum linea horizontali AB.

THEOREMA 64.

479. *Si corpus grave perpendiculariter projicitur, perpendiculariter aſcendit.*

DEMONSTRATIO.

Grave impellitur ſecundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis (§. 475). Quare cum gravitas ſecundum eandem directionem vi impresſæ reſiſtat (§. 215); directionem mutare nequit, ſed motum tantum retardat (§. 77). Grave igitur perpendiculariter projectum perpendiculariter aſcendit (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA 65.

Tab. IV. Fig. 49. 480. *Si corpus grave horizontaliter projicitur, motu ſuo parabolam deſcribit in medio non reſiſtente.*

DEMONSTRATIO.

Corpus enim projectum vi impreſſa uniformiter urgetur ſecundum rectam AR (§. 71); ſed vi gravitatis ſecundum rectam AC, quæ ad rectam AR lineæ horizontali *ex hypotheſi* parallelam perpendicularis (§. 215). Jam ſi vi impresſa corpus pervenisſet in Q, vi gravitatis deſcendit interea per QM adeoque in M reperitur. Quoniam vero motus ſecundum directionem AR ſemper eſt uniformis, *per demonſtr.* ſpatia QA & qA ſunt ut tempora (§. 32). Sed ſpatia QM & qm ſunt ut temporum quadrata (§. 80). Eſt ergo $AQ^2 : Aq^2 = QM : qm$, hoc eſt, $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$ (257 *Geom.*) Via igitur, quam grave horizontaliter projectum decurrit, AMm eſt parabola (§. 402. *Analyſ. fin.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

481. *Equidem cum gravia verſus centrum telluris tendant* (§. 213), *rectæ* QM & qm *in eodem concurrere debent, adeoque parallela non ſunt* (§. 82 Geom.). *Enimvero ſi tota altitudo* AC, *per quam decidit grave ſecundum directionem* AR *projectum ſit exigua admodum pars diſtantia a centro telluris* (§. 216); *pro parallelis citra errorem experimento ullo definiendum haberi posſunt.*

THEOREMA 66.

482. *Si corpus grave oblique ſive ſurſum, ſive deorſum projicitur in medio non reſiſtente, motu ſuo parabolam deſcribit.* Tab. IV. Fig. 50.

DEMONSTRATIO.

I. Sit linea directionis corporis ſurſum projecti AR. Cum corpus projectum, ſi gravitatis actio cesſaret, eandem uniformiter deſcriberet (§. 71); poſitis AQ, Qq,

qh & *hR* æqualibus erunt AQ & A*q* ut tempora (§. 32). Quodſi AB ſit linea horizontalis, & QM, *qm* &c. ita ducantur, ut continuatæ in T, *t* &c. ſint ad AB perpendiculares; erunt QM, *qm* &c. altitudines, per quas vi gravitatis deſcendit interea corpus projectum, dum ex A in Q, *q* &c. perveniſſet (§. 215). Quare ſi AS ducatur ad AB perpendicularis; erit rectis QM, *qm* &c. parallela (§. 256 *Geom.*). Ductis porro PM, *pm* &c. ipſi AR parallelis; erit PM = AQ, *pm* = A*q* &c. AP = QM, A*p* = *qm* &c. (§. 257. *Geom.*), adeoque AP : A*p* = $PM^2 : pm^2$, (§. 86). Eſt igitur AMB parabola, cujus diameter AS (§. 416. *Analyſ. finit.*). *Quod erat unum.*

II. Sit ſimiliter linea directionis corporis deorſum projecti AR in partes æquales AQ, Q*q* &c. diviſa & RS linea horizontalis. Ducta AS ad RS perpendiculari & QM, *qm* &c. eidem AS, PM vero, *pm* &c. ipſi AR parallelis: eodem, quo ante, modo demonſtratur, eſſe AP : A*p* = $PM^2 : pm^2$. Quare AM*m* denuo eſt parabola, cujus diameter AS (§. *cit. Analyſ. finit.*). *Quod erat alterum.*

Tab. IV. Fig. 51.

COROLLARIUM 1.

483. Eſt ergo parameter diametri parabolæ AS tertia proportionalis ad AP & PM, ſive QM & AQ. (§. *cit. Analyſ. finit.*), hoc eſt, ad ſpatium, per quod grave dato tempore deſcendit, & ad celeritatem ſpatio, quod vi impreſſa eodem tempore deſcribit, definiendam (§. 14).

COROLLARIUM 2.

484. Cum ſpatium uno minuto ſecundo a gravi quocunque perpendiculariter cadendo confectum notum ſit, nempe $15\frac{1}{12}$ pedum Pariſienſium (§. 472); parameter diametri parabolæ deſcribendæ invenitur, ſi ſpatii, quod uno minuto ſecundo projectile vi impreſſa percurrit, quadratum per $15\frac{1}{12}$ pedum Pariſienſium dividatur (§. 302. *Arithm.*)

COROLLARIUM 3.

485. Si ergo velocitas projectorum eadem, ſpatia eodem tempore vi impreſſa deſcripta æqualia ſunt (§. 33), conſequenter eadem parabolarum, quas motu compoſito percurrunt, parameter invenitur (§. 177. *Arithm.*)

COROLLARIUM 4.

486. Si a parametro diametri ſubtrahatur ipſius altitudinis AP quadruplum, parameter axis relinquitur (§. 416. *Analyſ. finit.*), cujus quarta pars eſt diſtantia verticis axis a foco parabolæ (§. 396. *Analyſ. finit.*). Parabola igitur deſcribi poteſt, data celeritate projectorum (§. 400. *Analyſ. finit.*) & §. 484. *Mech.*)

COROLLARIUM 5.

487. Linea directionis projectilis AR para-

parabolam in A tangit (§. 414. 415. *Analyſ. finit.*)

DEFINITIO 53.

488. *Semita* eſt parabola, quam corpus horizontaliter vel oblique projectum deſcribit.

DEFINITIO 54.

Tab. IV. Fig. 50. 489. *Amplitudo* (ſcilicet ſemitæ) eſt recta horizontalis AB ſemitam AMB ſubtendens.

THEOREMA 67.

490. *Projectile temporibus æqualibus per æqualia ſpatia horizontalia defertur.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMB ſemita, AB amplitudo ejus, AR linea directionis projectilis in partes æquales AQ, Qq &c. diviſa. Demittantur perpendiculares QT, qt, &c. erunt AT, Tt &c. ſpatia horizontalia, per quæ projectile defertur, dum partes ſemitæ AM, Mm, &c. percurrit. Quoniam projectile vi ſola impreſſa uniformiter deſcriberet rectas AQ, Qq &c. (§. 71); AQ, Qq &c. ſunt ut tempora (§. 31). Eſt vero AQ:Qq=AT:Tt (§. 268. *Geom.*). Ergo AT & Tt ſunt ut tempora, conſequenter temporibus æqualibus etiam AT & Tt æquantur. *Q. e. d.*

PROBLEMA 88.

491. *Dato angulo elevationis* RAB *una cum amplitudine* AB, *invenire parametrum diametri* AS *ſemitæ* AMS.

RESOLUTIO.

Sit ſinus anguli elevationis $= a$, coſinus $= b$, ſinus totus $= t$, amplitudo AB $= c$, parameter $= x$. Si AR ſumatur pro ſinu toto, erit BR ſinus, AB coſinus anguli elevationis RAB (§. 3. 11. *Trigon.*) adeoque

$$b:a = AB:BR$$
$$b:a = c : \frac{ac}{b}$$

Eſt itaque BR $=$ AS (§. 257. *Geom.*) $= ac:b$.

Porro
$$b:t = AB:AR$$
$$b:t = c : \frac{tc}{b}$$

Eſt itaque AR $=$ SB (§. cit.) $= tc:b$.

Quare ob x. AS $= SB^2$ (§. 416. *Analyſ. finit.*)

$$acx:b = c^2t^2:b^2$$
$$ax = ct^2:b$$
$$x = ct^2:ab$$

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam $a : \frac{t^2}{b} = c:x$. Eſt

 vero

vero $\frac{t^2}{b}$ ſecans anguli elevationis RAB (§. 26. *Trigon.*). Habemus itaque ſequens

Theorema, Amplitudo ſemitæ AB eſt ad parametrum diametri AS ut ſinus anguli elevationis RAB, ad ejus ſecantem.

COROLLARIUM 1.

492. Quoniam $ax = ct^2 : b$ (§. 491), adeoque $2ax = 2ct^2 : b$ (§. 93. *Arithm.*) erit etiam $2abx : 2t^2 = c$, conſequenter $t : \frac{2ab}{t} = \frac{1}{2} x : c$. Eſt vero $2ab : t$ ſinus dupli anguli elevationis BAR (§. 325. *Analyſ. finit.*). Ergo ſemiparameter eſt ad amplitudinem AB ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis.

COROLLARIUM 2.

493. Si eadem projectorum celeritas, parameter eadem eſt (§. 485). Quare cum ſit ſemiparameter ſemitæ in uno caſu ad amplitudinem ut ſinus totus ad ſinum dnpli anguli elevationis, & ſemiparameter ſemitæ in altero caſu ad amplitudinem ut ſinus totus ad ſinum dupli anguli elevationis (§. 492.); amplitudines ſunt ut ſinus angulorum duplorum elevationis, celeritate projectorum exiſtente eadem, (§. 196. *Arithm.*) & ratio ſinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem in hoc caſu conſtans eſt (§. 173. *Arithm.*).

THEOREMA 26.

494. *Si eadem maneat projectilis celeritas, amplitudo* AB *maxima eſt ſub angulo elevationis* 45°: *æquales vero ſunt amplitudines ſub angulis elevationis a ſemirecto æqualiter differentibus.*

DEMONSTRATIO.

Cum ratio ſinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem conſtans ſit, celeritate projectilis exiſtente eadem (§. 493.); creſcente ſinu anguli dupli elevationis creſcit amplitudo. Quare cum ſinus anguli elevationis 45° dupli ſit radius, quo major ſinus non datur; maxima ſit neceſſe eſt amplitudo ſub ſinu anguli elevationis 45°. *Quod erat unum.*

Jam cum idem ſit ſinus angulorum a recto æqualiter differentium, e. gr. 80° & 100° (§. 5. *Trig.*), anguli autem dupli a recto æqualiter differant, ſi ſimpli a ſemirecto differant æqualiter; amplitudines eo in caſu æquales ſint neceſſe eſt (§. 493). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

495. Quoniam ut ſinus totus ad ſinum anguli elevationis dupli ita ſemiparameter ad amplitudinem (§. 492) & ſinus totus ſinui anguli elevationis dupli æqualis, ſi is 45°; ſub angulo elevationis 45° amplitudo ſemiparametro æquatur.

PRO-

PROBLEMA 89.

496. *Data amplitudine maxima, determinare amplitudinem ſub angulo elevationis alterius cujuscunque, celeritate manente eadem.*

RESOLUTIO.

Quoniam ſinus totus eſt ſinus dupli anguli elevationis, quando amplitudo maxima (§. 494); fiat ut ſinus totus ad ſinum anguli dupli elevationis cujuscuuque alterius; ita amplitudo maxima ad quæſitam (§. 493).

E. g. Sit jactus maximus, ſeu ſemirectus alicujus tormenti 6000 paſſuum & quæratur longitudo jactus graduum 30. Reperietur is 5196 paſſuum.

Log. ſin. tot.	100000000
Log. ſin. 60	99375306
Log. 6000	37781512
Log. quæſ.	437156818, cu

in tabulis reſpondent 5196.

PROBLEMA 90.

497. *Data celeritate projectilis invenire amplitudinem maximam.*

RESOLUTIO.

Cum celeritas projectilis detur per ſpatium, quod vi impreſſa dato tempore, e. gr. uno ſecundo minuto, percurrere valet; non alia re opus eſt, quam ut parameter ſemitæ inveniatur (§. 484). Hujus enim ſemiſſis eſt amplitudo quæſita (§. 495).

E. gr. Sit ea projectilis celeritas, qua intra unum minutum ſecundum 1000 pedes Pariſienſes ſeu 12000″ conficere valeat. Quodſi itaque 144000000 per 181 dividas, prodibit parameter ſemitæ maximæ 795580″ ſeu 66298 pedum. Ergo amplitudo maxima 33149. Quæ adeo intra hunc terminum conſtituta ſunt, projectile attingere poteſt.

PROPBLEMA 91.

498. *Data amplitudine maxima invenire celeritatem projectilis ſeu ſpatium horizontale intra minutum ſecundum conficiendum.*

RESOLUTIO.

Cum duplum amplitudinis maximæ ſit parameter ſemitæ (§. 495); inter duplum amplitudinis maximæ & ſpatium, quod intra minutum ſecundum conficit grave perpendiculariter cadendo, nempe 181 digitorum, qualium 12 eſt pes Pariſienſis, quæratur numerus medius continue proportionalis (§. 302) *Arithm.* Is enim erit ſpatium a projectili intra unum minutum ſecundum conficiendum (§. 495)

Si amplitudo maxima 500 pedum Pariſienſium; erit parameter maxima 1000 pedum ſeu 12000 digitorum & hinc ſpatium quæſitum $= \sqrt{(12000.181)}$ $= 120$ pedum Pariſienſium cum 9 unciis ſeu digitis.

PROBLEMA 92.

Tab. IV. Fig. 50. 499. *Determinare altitudinem maximam* tm, *ad quam grave oblique projectum aſcendit.*

RESOLUTIO.

Sit AB $= a$, BR $= b$, AT $= x$; erit $AR^2 = SB^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Porro (§. 268 *Geom.*)

$$AB : BR = AT : TQ :$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Et (§. 416 *Analyſ. finit.*)

$$SB^2 : AQ^2 = BR : QM.$$
$$a^2 + b^2 : \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2} = b : \frac{bx^2}{a^2}$$

Quare $TM = bx : a - bx^2 : a^2$. Cum vero *tm* ſit maximum aliquod, *per hypoth.* erit (§. 63 *Analyſ. infinit.*)

$$bdx : a - 2bxdx : a^2 = 0$$
$$ab - 2bx = 0$$
$$ab = 2bx$$
$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Theorema. Si amplitudo AB bifariam dividatur in *t* & ex puncto *t* erigatur perpendicularis *tm*; erit *tm* altitudo maxima, ad quam grave juxta directionem AR projectum aſcendit.

THEOREMA 69.

500. *Si altitudo maxima* tm, *ad quam grave juxta directionem* AR *projectum aſcendit, continuetur uſque ad lineam directionis* AR; *erit recta* qm *inter ſemitam* AmB *& lineam directionis* AR *intercepta eidem æqualis: &, ſi in extremitate ſemitæ erigatur perpendicularis* BR, *erit* $tm = \frac{1}{4}$ BR.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB : At = AR : Aq$ (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2} AB$ (§. 498); erit etiam $Aq = \frac{1}{2} AR$. Eſt vero $AR^2 : Aq^2 = BR : qm$ (§. 416 *Analyſ. fin.*). Quare cum $Aq^2 = \frac{1}{4} AR^2$, *per demonſtrat.* erit quoque $qm = \frac{1}{4}$ BR. *Quod erat unum.*

Sed, ob $AB : At = BR : tq$ (§. 268 *Geom.*) & $At = \frac{1}{2} AB$ (§. 498) $tq = \frac{1}{2}$ BR, hinc $\frac{1}{2} tq = \frac{1}{4}$ BR. Eſt vero $qm = \frac{1}{4}$ BR *per demonſtr.* Ergo $qm = \frac{1}{2} tq$ (§. 87. *Arithm.*). $= tm$. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 93.

501. *Data amplitutdine* AB *& angulo elevationis* BAR, *determinare altitudinem jactus maximam* tm.

RESOLUTIO.

Si AR ſumatur pro ſinu toto, erit BR ſinus, AB coſinus anguli elevationis BAR (§. 3. 11. *Trigon.*) Quare ſi fiat ut coſinus anguli elevationis ad ſinum ejuſdem ita ampli-

plitudo AB ad quartum; reperietur BR, cujus quarta pars eſt altitudo jactus maxima tm (§. 499).

COROLLARIUM.

502. Quoniam data celeritate projectilis amplitudo maxima (§. 497) & inde porro amplitudo ſub angulo elevationis quocunque invenitur (§ 496); data celeritate, maxima quoque jactus altitudo inveniri poteſt (§. 501).

THEOREMA 70.

Tab. IV. Fig. 50. 503. *Altitudo jactus* tm *eſt ad octavam parametri partem ut ſinus verſus anguli dupli elevationis ad ſinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Sit ſinus anguli elevationis BAR $= a$, coſinus $= b$, ſinus totus $= t$ parameter $= x$; erit amplitudo AB $= abx : t^2$ (§. 496) & (§. 501).

$$b : a = AB : BR$$
$$b : a = \frac{abx}{t^2} : \frac{a^2x}{t^2}$$

Ergo $tm = \frac{1}{4}BR$ (§. 500) $= a^2x : 4t^2 = 2a^2x : 8t^2$. Eſt vero $(b^2 - a^2) : t$ coſinus anguli dupli elevationis (§. 325. *Analyſ. finit.*) & hinc ſinus verſus ejusdem anguli dupli $t - (b^2 + a^2) : t$ (§. 2. *Trigon.*) $= (t^2 - b^2 + a^2) : t$ conſequenter ob $t^2 - b^2 = a^2$ (§. 16 *Trig.*), idem ſinus verſus $= 2a^2 : t$. Eſt adeo ut t ſinus totus ad $2a^2 : t$ ſinum verſum anguli dupli elevationis, ita $\frac{1}{8}x$ octava parametri pars ad altitudinem tm. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

504. Quoniam ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli dupli elevationis in uno caſu, ita octava parametri pars ad altitudinem jactus & ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli dupli elevationis in altero quocunque caſu, ita octava parametri pars ad altitudinem (§. 503), velocitate autem exiſtente eadem parameter quoque in diverſis angulis elevationis eadem eſt (§. 484); erunt altitudines jactuum ſub diverſis angulis elevationum ut ſinus verſi eorundem angulorum duplorum (*§. 196. Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

505. Si ſinus anguli elevationis in uno caſu a, in altero c, velocitate exiſtente eadem, altitudines jactuum ſunt ut $a^2x : 4t^2$ ad $c^2x : 4t^2$ (*§. 503*), hoc eſt, ut a^2 ad c^2 (§. 181 *Arithm.*), adeoque in ratione duplicata ſinuum angulorum elevationum.

PROBLEMA 94.

506. *Data celeritate projectilis, altitudine feriendi* In *& ejus diſtantia horizontali* AI, *invenire jactus angulum elevationis.*

RESOLUTIO.

Cum data celeritate projectilis parameter diametri AS detur (*§.* 483); ſit ea $= a$. Sit præterea $Iu = b$, $AI = c$, ſinus totus $= t$, tangens anguli quæſiti $= x$. Quodſi

AI ſumatur pro ſinu toto, erit hI tangens anguli hAI (§. 7 *Trigon.*). Eſt itaque

$$t:x = AI:Ih$$
$$t:x = c : \frac{cx}{t}$$

Ergo $hn = Ar = cx : t - b$ & $rn^2 = acx : t - ab$ (§. 416 *Anal. fin.*). Eſt vero etiam $rn^2 = Ah^2 + Ih^2$ (§. 417 *Geom.*) $= c^2 + c^2x^2 : t^2$. Quare

$$c^2 + c^2x^2 : t^2 = acx : t - ab$$
$$c^2x^2 : t^2 - acx : t = -ab - c^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \qquad \tfrac{1}{4}a^2$$
$$c^2x^2 : t^2 - acx : t + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2$$
$$cx : t - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$
$$cx : t = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$
$$x = [\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}]t : c$$

Eſt igitur ut c ad $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$ ita ſinus totus t ad tangentem anguli elevationis quæſitum RAB.

COROLARIUM 1.

507. Si $ab + c^2 = \tfrac{1}{4}a^2$ ſeu $\tfrac{1}{4}a = b + c^2 : a$ erit $x = at : 2c$, adeoque in hoc caſu eſt $2c : a = t : x$, hoc eſt, ut dupla diſtantia objecti feriendi AI ad parametrum, ita ſinus totus ad tangentem anguli elevationis.

COROLLARIUM 2.

508. Si $ab + c^2 > \tfrac{1}{4}a^2$; $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$ radix imaginaria evadit (§. 71 *Anal. finit.*), adeoque valor ipſius x eſt impoſſibilis (§. *cit.*) Quare in hoc caſu data celeritate objectum attingi nequit.

THEOREMA 71.

509. *Tempora jactuum ſub diverſis elevationis angulis, velocitate exiſtente eadem, ſunt ut ſinus angulorum elevationis.*

DEMONSTRATIO.

Si ſinus totus $= t$, ſinus anguli Tab.
elevationis BAR $= a$, coſinus $= b$, IV.
parameter ſemitæ $= x$; erit ſecans Fig.
anguli elevationis $= t^2 : b$, adeoque 50.
$\frac{t^2}{b} : a = x :$ AB (§. 491), conſequenter AB $= abx : t^2$. Quare cum ſit (§. 33 *Trigon.*)

$$b:t = AB:AR$$
$$b:t = \frac{abx}{t^2} : \frac{ax}{t}$$

adeoque AR $= ax : t$; erit ut ſinus totus t ad ſinum anguli elevationis in caſu uno ita parameter ad AR & ut ſinus totus ad ſinum anguli elevationis in caſu alio ita parameter ad AR in caſu alio. Quoniam vero celeritas in utroque caſu eadem, *per hypoth.* parameter quoque eadem eſt (§. 485). Ergo ut ſinus angulorum ele-

elevationis ita ſunt rectæ AR in diverſis elevationum angulis (§. 196 *Arithm.*. Enimvero rectæ AR ſunt ſpatia, quæ projectilia eadem celeritate uniformiter deſcribunt, ceſſante gravitatis actione (§. 71) Tempora igitur jactuum ſunt ut iſta ſpatia (§. 32), conſequenter ut ſinus angulorum elevationis. *Q. e. d.*

PROBLEMA 95.

510. *Data celeritate projectilis una cum angulo elevationis* RAB, *invenire amplitudinem* AB, *altitudinem jactus* tm *& ſemitam* AmB *deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Ad rectam horizontalem AB erigatur perpendicularis AD, quæ ſit altitudo, unde projectile cadendo celeritatem datam acquirere valet (§. 92).
2. Super AD deſcribatur ſemicirculus AQD, lineam directionis AR ſecaturus in Q.
3. Per Q ducatur ipſi AB parallela C*m* fiatque CQ=Q*m*.
4. Ex puncto *m* demittatur ad AB perpendicularis *mt*.
5. Denique per verticem *m* deſcribatur parabola A*m*B parametro 4CD. (§. 393. *Analyſ. fin.*)

Dico hanc eſſe ſemitam quæſitam, 4CQ ejus amplitudinem & *tm* jactus altitudinem.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad C & *m* ſint recti *per conſtr.* & verticales ad Q æquales (156. *Geom.*), ſit etiam CQ = Q*m per conſtr.* erit *qm* = AC (§. 251. *Geom.*). Eſt vero *tm* = AC (§. 257 *Geom.*). Ergo *qm* = *mt* (87. *Arithm.*) conſequenter *tm* eſt altitudo jactus (§. 500) & projectile parabolam A*m*B deſcribit, cujus adeo amplitudo AB = 2 A*t* (§. 499) = 2 C*m* = 4 CQ, ob CQ = Q*m per conſtr. Quod erat primum, ſecundum & tertium.*

Denique quia A*t* = C*m* (§ 257 *Geom.*) = 2 CQ: $At^2 = 4CQ^2$. = 4 DC. AC (§, 327. 377. *Geom.*) = 4 DC. *tm per demonſtr.* Ergo 4 DC eſt parameter parabolæ in vertice *m* (§. 388. *Analyſ. finit.*). *Quod erat ultimum.*

COROLLARIUM 1.

511. Data igitur projectilis celeritate, dantur amplitudines & altitudines omnium jactuum, qui fieri poſſunt, eadem opera. Ducta enim EA, erit ſub angulo elevationis EAB altitudo AI, amplitudo 4IE; ſub angulo elevationis FAB altitudo AH, amplitudo 4HF (§. 510).

CORLLARIUM 2.

512. Cum AB ſit ad AD perpendicularis, *per hypoth.* circulum in A tangit (§. 304.

(§. 304. *Geom.*). & hinc angulus ADQ angulo elevationis RAB æqualis (§. 323. *Geom.*). conſequenter AIQ eſt duplus anguli elevationis (§. 313. *Geom.*). Eſt itaque CQ quarta pars amplitudinis (§. 510) ſinus rectus; AC altitudo jactus (§. *cit.*) ſinus verſus anguli dupli elevationis (§. 2. *Trigon.*).

SCHOLION.

513. *Hinc facili opera deducuntur, quæ ſupra per analyſin invenire docuimus, ut ejus in hiſce uſum oſtenderemus.*

PROBLEMA 96.

Tab. IV. Fig. 50. 514. *Data altitudine jactus* tm *aut amplitudine* AB, *una cum angulo elevationis* RAB *invenire projectilis celeritatem, qua ab initio fertur, hoc eſt, altitudinem* AD, *unde cadendo iſtiusmodi celeritatem acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Cum AC = *tm* ſit ſinus verſus, CQ = ¼ AB (§. 512) ſinus rectus anguli AIQ (§. 2. *Trig.*), quem eſſe anguli elevationis RAB duplum ex demonſtratione problematis 95 (§. 510) conſtat: quæratur ad ſinum verſum anguli dupli elevationis, ſinum totum & altitudinem jactus: vel ad ſinum rectum anguli dupli elevationis, ſinum totum & quartam amplitudinis partem numerus quartus proportionalis: erit is radius IQ ſive IA, cujus duplum AD eſt altitudo quæſita (§. *cit.*).

SCHOLION.

515. *Potuiſſet quoque curva projectionis analytice inveſtigari & quidem in omni gravitatis hypotheſi poſſibili: quod ut appareat, ſequens ſubjungere lubet problema.*

PROBLEMA 97.

516. *Invenire curvam projectionis, directionibus gravium ſuppoſitis parallelis, in medio non reſiſtente.*

RESOLUTIO.

I. Ponamus corpus grave horizontaliter projici ſecundum directionem AR, AMm eſſe curvam projectionis, AQ abſciſſam, Qm ſemiordinatam, aut, ſi mavis AP abſciſſam, PM ſemiordinatam. Sit AP = QM = x, AQ = PM = y. Intelligatur ſemiordinata pm alteri PM infinite propinqua: erit arculus curvæ infinite parvus $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, adeoque $Mm^2 = dx^2 + dy^2$ (§. 144. *Analyſ. infin.*) Quoniam projectile in medio non reſiſtente movetur *per hypoth.* motus, quo vi impreſſa movetur, æquabilis (§. 71). Porro cum grave, dum motu compoſito per *Mm* fertur (§. 241), per ſpatiolum infinite pavum MO = Pp deſcendens iſto tempuſculo etiam æqualiter movea- Tab. IV. Fig. 49.

veatur; erit tam MO, quam Om in ratione compoſita celeritatis & temporis (§. 34). Quodſi ergo ponamus AQ ſive PM exponere tempus (§. 31); erit tempuſculum, quo projectile per arculum Mm defertur, $=dy$. Fiat celeritas projectili impreſſa, quæ conſtans eſt, 1: erit Om ut dy. Sit porro celeritas a gravi cadendo in M acquiſita $=v$; erit MO ut vdy. Habemus itaque Mm^2 ut $dy^2+v^2dy^2$, conſequenter

$$dy^2+v^2dy^2=dy^2+dx^2$$

adeoque $v^2dy^2=dx^2$

$$vdy=dx$$

$$dy=dx:v$$

$$y=\int v^{-1}\,dx$$

Data igitur celeritate v a gravi in M acquiſita per x; reperietur æquatio ad curvam projectionis.

Jam in hypotheſi *Galilæi* $v=\sqrt{x}=x^{1:2}$ (§. 87).

Ergo $dy=x^{-1:2}\,dx$

hoc eſt, $y=\frac{1}{2}x^{1:2}=2\sqrt{x}$

$$y^2=4x$$

Eſt ergo in hypotheſi *Galilæana* Curva projectionis parabola, cujus parameter 4. (§. 388 *Anal. fin.*): quemadmodum ſuperius demonſtratum (§. 480). Quoniam $x:y=y:4$, hoc eſt, AP : PM = PM : 4, ſive QM : AQ = AQ : 4; parameter curvæ projectionis eſt tertia proportionalis ad ſpatium, quod in tempore quocunque grave cadendo conficit, & ſpatium, quod vi impreſſa deſcribit: quemadmodum ſupra reperimus (§. 480).

Sit in hypotheſi *Baliana* v ut x; erit

$$dy=x^{-1}\,dx=\frac{dx}{x}$$

$$y=\int\frac{dx}{x}$$

$$=lx \text{ (§. 243. Analyſ. infin.)}$$

Sunt igitur abſciſſæ AQ, Aa &c. ut logarithmi ſemiordinatarum QM, qm &c. conſequenter curva projectionis eſt Logarithmica, cujus ſubtangens = 1 (§. 553. *Analyſ. finit.*)

II. Quodſi directio AR fuerit ad horizontem AB obliqua, ſeu ſi grave oblique projiciatur (§. 477), eodem modo ſolutio procedit. Ducatur pm ipſi AR parallela & intelligatur alia eidem infinite propinqua. Fiat Tab. IV. Fig. 10.

$Aq = pm = y$, $qm = Ap = x$; erit arculus infinite parvus curvæ projectionis ſemiordinatis iſtis interceptus $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, adeoque quadratum ejusdem $= dx^2 + dy^2$ ut ante. Sit celeritas conſtans, qua mobile fertur $= 1$. celeritas vero per $qm = Ap$ acquiſita $= v$; tempuſculo per arculum infinite parvum conſumto in ſpatiolis dy & dx erit $dy : dx = 1 : v$ (§. 38), adeoque in hypotheſi *Galilæi* $dy : dx = 1 : x^{1:2}$. Prodit igitur ut ante

$$\frac{dx}{x^{1:2}} = x^{-1:2} dx = dy$$

$$2x^{1:2} = 2\sqrt{x} = y$$

$$4x = y^2$$

Unde patet in hoc quoque caſu curvam projectionis eſſe parabolam, quemadmodum ſupra oſtendimus (§. 482).

SCHOLION.

517. *Suppoſuimus directiones parallelas, propterea quod lineæ in centro Telluris concurrentes pro parallelis haberi poſſunt citra errorem aſſignabilem in iis diſtantiis, in quibus experimenta capere licet. Quod ſi tamen deſideraveris problema ſolvi in hypotheſi linearum directionis convergentium; ſolutionem dudum dedit Vir ſummus* NEVTONUS (r): *dederunt deinde Geometræ celeberrimus* HERMANNUS (s) *aliique ab eodem laudati* (t). *Nos ſequentem ſubjungimus, ne quid in hoc argumento deſiderari poſſit.*

PROBLEMA 98.

518. *Invenire curvam projectionis in hypotheſi gravitatis cujuscunque directionibus in centro Telluris convergentibus.*

RESOLUTIO.

Sit curva projectionis AMR & linea directionis ex centro Telluris C ducta CN. Intelligatur C*n* radius ipſi CN infinite propinquus, radio CA = CN = C*n* deſcripto arcu AB. Ducantur porro radiis CM & C*m* arcus concentrici PM & *pm*. Sit denique AH altitudo, per quam grave cadendo acquirit eam celeritatem, qua vi impreſſa movetur, ac deinde per curvam AMR deſcendat vi impreſſa & velocitate vi gravitatis quomodocunque accelerata. Dicatur jam AH $= a$, AP $= x$, AC $= b$, arcus AN $= y$; erit P*p* = RM $= dx$, N*n* $= dy$, PC = MC = *m*C (§. 4. *Analyſ. infin.*) $= b - x$. Porro propter ſectores Tab. XVI. Fig. 160.

(r) in Princip. Philoſ. natur. Mathem. prop. 41. lib. 1.
(s) in Phoronamia lib. 1. prop. 23. §. 162.
(t) loc. cit. §. 164.

res ſimiles CNn & CRm, erit (§.131.412. *Geom.*).

$$CN : Cm = Nn : Rm$$
$$b : b-x = dy :$$

adeoque $Rm = (b-x)\, dy : b$
$$mR^2 = (b-x)^2\, dy^2 : b^2$$
$$MR^2 = dx^2$$

$$Mm^2 = \frac{b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2}{b^2}$$

Sit jam celeritas, qua projectile urgetur per MR vi gravitatis, ſeu quæ cadendo per altitudinem AP acquiritur $= z$; altera vero, qua per arculum mM motu compoſito fertur, ſeu quæ cadendo per HP acquiritur $= v$. Quoniam in ſpatiolis infinite parvis Mm & RM motus æquabilis; MR : Mm $= z : v$ (§. 33), conſequenter

$$MR^2 : Mm^2 = z^2 : v^2$$ (§. 260 *Arithm.*)

hoc eſt, $dx^2 : \frac{b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2}{b^2} = z^2 : v^2$

$$b^2 dx^2 : b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2 = z^2 : v^2$$

$$v^2 b^2 dx^2 = b^2 z^2 dx^2 + (b-x)^2 z^2 dy^2$$

$$v^2 b^2 dx^2 - b^2 z^2 dx^2 = (b-x)^2 z^2 dy^2$$

bdx

$$bdx\sqrt{(v^2-z^2)} = zdy\,(b-x)$$

$$dy = \frac{bdx\sqrt{(v^2-z^2)}}{z(b-x)}$$

$$y = \int \frac{bdx\sqrt{(v^2-z^2)}}{z(b-x)}$$

Quodſi jam valor ipſius v atque z exprimatur per x ex hypotheſi gravitatis; prodibit æquatio ad curvam projectionis ſpecialem.

In hypotheſi *Galileana* $v = \sqrt{}$ HP $= \sqrt{(a+x)}$ & $z = \sqrt{}$ AP $= \sqrt{x}$ (§. 87). Subſtitutis itaque hiſce valoribus in æquatione differentiali generali; prodit ſpecialis

$$dy = \frac{bdx\sqrt{(a+x-x)}}{(b-x)\sqrt{x}}$$
$$= \frac{bdx\sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}}$$

Pendet adeo *conſtructio* hujus curvæ a Quadratura alterius curvæ, cujus abſciſſa x, ſemiordinata vero $ab\sqrt{a} : (b-x)\sqrt{x} = a^2 b : (b-x)\sqrt{ax}$. Nimirum ſi Areæ hujus curvæ dividantur per a, ſeu rectam AH, unde projectile acquirit celeritatem, qua a vi impreſſa movetur; prodeunt arcus reſpondentes HN eo modo, quem jam expoſuimus, cum de curva iſochrona in hypotheſi directionum in centro Telluris convergentium ageremus (§. 336).

336). Conſtruitur autem Curva, a cujus quadratura pendet conſtructio Curvæ projectionis, ope parabolæ circa axem AC parametro AH deſcripta, ut ſemiordinata abſciſſæ AP reſpondens ſit $\sqrt{ax} = PS$. Eſt enim ut PS ad AH ita AH ad tertiam proportionalem & ut CP ad CA ita tertia hæc proportionalis ad ſemiordinatam Curvæ quadrandæ.

Fiat $b = \infty$: quo in caſu directiones gravium evadunt parallelæ; erit x reſpectu $b = o$, adeoque $b - x = b$, conſequenter

$$dy = \frac{bdx\sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}} = \frac{bdx\sqrt{a}}{b\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{1:2}x^{-1:2}dx$$

$$y = 2a^{1:2}x^{1:2} = 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = 4ax$$

Eſt igitur curva projectionis in hoc caſu parabola (§. 388. *Analyſ. fin.*), quemadmodum ante reperimus (§. 516) & parameter $4a$ eſt quadrupla altitudinis AH, unde cadendo projectile eam acquirit celeritatem, qua projicitur, prouti ſupra demonſtratum fuit (§. 510).

SCHOLION.

519. *Curva projectionis* Trajectoria *appellari ſolet, qua denominatione quoque utitur* Nevvtonus.

CAPUT XII.

DE

MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE.

DEFINITIO 55.

520. *Corpus perfecte durum* eſt, quod ab ictu figuram non mutat.

DEFINITIO 56.

521. *Corpus molle* eſt, quod ab ictu figuram priſtinam amittit, ut argilla, ſebum, cera.

DEFINITIO 57.

522. *Corpus elaſticum* eſt, quod ab ictu figuram quidem mutat, ſed vi propria in eandem rurſus reſtituitur

tuitur. Talis eſt enſis, qui ad ictum incurvatur, ſed ſtatim reſilit in figuram priſtinam.

DEFINITIO 58.

523. *Corpus unum in alterum directe impingere* dicitur, ſi impingit ſecundum rectam ad contactum perpendicularem.

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 53. 524. Sphæra igitur A directe in alteram B impingit, ſi linea directionis centra B utriusque jungit (§. 58. *Analyſ. infinit.*)

DEFINITIO 59.

526. *Corpus unum in alterum indirecte* vel *oblique impingere* dicitur, ſi impingit ſecundum rectam ad contactum obliquam.

DEFINITIO 60.

527. *Centrum percusſionis* eſt punctum, in quo ictus eſt maximus.

AXIOMA 8.

528. *Actioni æqualis, ſed contraria eſt reactio.*

SCHOLION.

529. *Hoc legum motus principium ab experientia petitur & a celeberrimo* Nevvtono (u) *his exemplis illuſtratur.* „ Si quis, inquit, lapidem digito premit, „ premitur & hujus digitus a lapide. Si „ equus lapidem funi allegatum trahit, „ retrahetur etiam & equus æqualiter „ in lapidem: nam funis utrinque di- „ ſtentus eodem relaxandi ſe conatu „ urgebit equum verſus lapidem ac la- „ pidem verſus equum, tantumque im- „ pediet progreſſum unius, quantum „ promovet progreſſum alterius. Si „ corpus aliquod in corpus aliud im- „ pingens, motum ejus vi ſua quo- „ modocunque mutaverit, idem quoque „ viciſſim in motu proprio eandem „ mutationem in partem contrariam vi „ alterius (ob æqualitatem preſſionis „ mutuæ) ſubibit.

THEOREMA 72.

530. *Effectus pleni ſunt viribus cauſarum ſuarum proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam nihil eſt ſine ratione ſufficiente, cur potius ſit, quam non ſit (§. 25) vis determinata indifferens non eſt, adeoque ipſi determinata effectus quantitas ex neceſſitate reſpondet. Quare ſi vis V ut V, ſeclusa omni vi alia ſive adjuvante, ſive impediente, effectum E ut E producit; etiam alia V ut V effectum E ut E producet, conſequenter mV ut mV (ubi m notat multiplum aut ſubmultiplum ipſius V) producet effectum

(u) Princip. Mathem. Philoſ. Natural. pag. 13. conf. Coſmologia noſtra generalis, §. 316. 346.

ctum mE ut mE. Eſt igitur $V : mV = E : mE$ (*§.149. Arithm.*) hoc eſt, effectus plerui ſunt viribus ſuarum cauſarum proportionales. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

531. Vires igitur motum producentes ſi fuerint æquales, eandem motus quantitatem producunt (§.530) addendum mobili ſecundum eandem directionem progredienti (§. 76), ſubtrahendum vero, ſi ſecundum contrariam progredi nitatur (§.77).

THEOREMA 73.

Tab. IV. Fig. 53. 532. *Si corpus unum* A *in alterum* B *vel quieſcens vel tardius motum ſecundum eandem directionem, vel etiam ſecundum contrariam ipſi obvium factum impingat; ſumma motuum in corporibus ſecundum eandem directionem motis, differentia eorundem in motis juxta contrarias eadem erit ante & poſt ictum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus A & B moveri juxta eandem directionem, ſitque quantitas motus ipſius $A = a$, ipſius $B = b$, erit ſumma motuum ante ictum $= a + b$. Si A acceleret motum ipſius B juxta ejusdem directionem in conflictu, incrementum quoddam motus efficit (*§. 22*). Quare cum B eadem vi reagat in A, qua A agit in B (*§. 528*), ob contrarias virium æqualium directiones tantum motus ſubtrahitur ex A, quantum additur ipſi B (*§.531*). Unde ſi quantitas motus ipſius B fuerit poſt ictum $= b + c$; erit quantitas motus ipſius A poſt ictum $= a - c$. Summa igitur motuum $b + c + a - c = b + a$ eadem poſt ictum, quæ ante ictum. Si B quieſcit, erit motus quantitas ante ictum $= 0$, adeoque motuum ſumma $= a$. Sed ſi poſt ictum quantitas motus ipſius $B = c$, *per demonſtrata* quantitas motus ipſius $A = a - c$. Unde denuo ſumma motuum eadem ante & poſt ictum, hoc eſt, $= a$.

Si fuerit $c > a$: reactione ipſius B, qua efficitur motus $a + c$ deſtruitur quantitas motus a & efficitur motus ſecundum directionem contrariam impulſi corporis $A = c$, *per demonſtrata*. Differentia igitur motuum poſt ictum in corporibus B & A ſecundum contrarias directiones motis $= b + a + c - c$ eadem eſt quæ ſumma ante ictum $a + b$.

Si $c = a$, reactione ipſius *B* deſtruitur motus in A, adeoque corpus A quieſcit & B verſus eandem plagam ſolum progreditur. Unde denuo ſumma motuum poſt

ictum

ictum $a + b + o$ æquatur ſummæ ante ictum $a + b$.

Si corpora A & B ſibi mutuo occurrant, erit differentia motuum $a - b$. Sit poſt conflictum quantitas motus ipſius B $= c$: deſtruitur ergo per actionem A motus b & efficitur c. Reactione igitur ipſius B in A deſtruitur motus $b + c$, adeoque poſt conflictum remanet motus $a - b - c$. Quodſi $a > b + c$, progrediuntur A & B poſt conflictum juxta eandem directionem eſtque ſumma motuum $a - b - c + c$ eadem quæ differentia $a - b$ ante ictum.

Quodſi $c + b > a$, deſtruitur reactione ipſius B $= c + b$ motus a & efficitur ſecundum contrariam directionem motus $c + b - a$, adeoque B & A reſiliunt ſecundum directiones contrarias. Differentia igitur motuum poſt ictum $c - c - b + a$ eadem eſt, quæ fuerat ante ictum $a - b$.

Denique ſi $b + c = a$, reactione ipſius B deſtruitur motus totus in A, qui adeo poſt ictum $= o$. Unde ſumma motuum $c = a - b$ eadem quæ differentia eorundem ante ictum.

Tab. IV. Fig. 50.

THEOREMA 73.

533. *Si duo corpora* A & B *pondere æqualia & non elaſtica, æqualibus celeritatibus lata, ſibi mutuo occurrunt, poſt ictum ambo quieſcunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim corporum A & B maſsæ atque celeritates æquales ſint *per hypoth.* motuum quantitates æquales ſunt (§. 22). Eorum itaque differentia ante ictum nulla eſt. Quodſi poſt ictum ſecundum eandem directionem progrederentur, ſumma motuum deberet eſſe nulla (§. 512), ſecundum eandem igitur progredi nequeunt. Sed cum ſecundum contrarias ſe mutuo urgeant eadem vi, nec ulla ſit ratio, cur a ſe invicem reſiliant, *per hypoth.* ſecundum directiones contrarias moveri nequeunt. Poſt ictum ergo ambo quieſcunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 74.

534. *Si corpus elateris expers* A *in aliud itidem non elaſticum* B *directe incurrat, nec per conflictum motus extinguatur; poſt ictum ambo eadem celeritate moventur] ſecundum eandem directionem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim A incurrat in B ſive quieſcens, ſive ſegnius motum, urgebit ipſum ſecundum directionem ſuam; adeoque cum nulla adſit

ſit ratio, cur a ſe invicem reſiliant; *per hypoth.* ſi A vincat, B neceſſario movebitur ſecundum directionem ipſius. *Quod erat unum.*

Quodſi jam A & B ſecundum eandem directionem progrediuntur, B tardius moveri nequit quam inſequens A. Cum vero eandem celeritatem adipiſcitur, quam habet ipſum A, motui ejus non amplius reſiſtit adeoque fugit, conſequenter ambo eadem celeritate progrediuntur. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 75.

Tab. IV. Fig. 53.

535. *Si corpus elateris expers* A *in aliud non elaſticum* B *quieſcens directe incurrat, celeritas poſt ictum eſt ad celeritatem ante ictum ut pondus ipſius* A *ad ponderum* A *&* B *ſummam.*

DEMONSTRATIO.

Sit maſſa ipſius A = M, alterius B = *m*, celeritas prioris = C: erit quantitas motus ipſius A = MC (§. 22), ipſius B vero nullus, adeoque motuum ſumma poſt ictum = MC (§. 532), conſequenter celeritas = MC : (M + *m*) (§. 515. 22). Eſt adeo ut M + *m* ponderum ſumma ad M pondus moti, ita C celeritas ante ictum, ad celeritatem poſt ictum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

536. Quodſi corpora A & B fuerint ejuſdem ponderis; erit M = *m*, adeoque celeritas poſt ictum = MC : 2M = ½ C. Moventur itaque celeritate dimidia ejus, qua A ferebatur ante conflictum.

THEOREMA 76.

537. *Si corpus elateris expers* A *in aliud non elaſticum* B *tardius motum ſecundum eandem directionem directe impingat; erit celeritas poſt ictum æqualis motuum ſummæ per ponderum ſummam diviſæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B maſſæ M & *m*, celeritates C & *c*; erit motus quantitas ante conflictum MC & *mc* (§. 22), adeoque ſumma eorundem MC + *mc*: quæ cum eadem ſit poſt conflictum (§. 532), erit celeritas communis corporum A & B poſt eundem (MC + *mc*) : (M + *m*) (§. 22). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

536. Si pondera corporum A & B fuerint æqualia, erit M = *m*, adeoque celeritas poſt ictum M (C + *c*) : 2 M = (C + *c*) : 2, ſeu ſemiſumma celeritatum ante ictum.

THEOREMA 77.

537. *Si duo corpora non elaſtica, pondere æqualia, diverſis celeritatibus lata, ſibi mutuo directe occurrant, poſt conflictum feruntur celerita-*

ritatum ſemidifferentiæ, qua movebantur ante ictum.

DEMONSTRATIO.

Sit maſſa communis = M, celeritates ſint ut C & *c*; erit differentia motuum M (C−*c*): cui cum æqualis ſit poſt conflictum ſumma eorundem (§. 532), erit celeritas communis = M (C−*c*) : 2M = (C −*c*) : 2. hoc eſt, æqualis velocitatum ante impactum ſemidifferentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 78.

Tab. IV. Fig. 53. 538. *Si duo corpora non elaſtica A & B iis celeritatibus ſibi mutuo directe occurrant, quæ ſunt reciproce ut pondera corundem; ambo poſt ictum quieſcunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim maſſæ M & *m*, celeritates C & *c*; quoniam M : *m* = *c* : C, *per hypoth.* erit *mc* = MC, adeoque motuum differentia ante conflictum nulla (§. 22). Ergo ſumma motuum poſt ictum cum nihilo æqualis ſit (§. 532); nullus quoque poſt ictum erit motus, hoc eſt, ambo quieſcunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 79.

539. *Si duo corpora non elaſtica A & B eadem celeritate ſibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas poſt impactum ad celeritatem ante eundem ut ponderum differentia ad ſummam corundem.*

DEMONSTRATIO.

Sit communis celeritas = C, maſſæ corporum A & B ut M & *m*; erit differentia motuum ante impactum (M−*m*) C (§. 22). Huic cum æqualis ſit ſumma motuum poſt impactum (§. 532); erit velocitas communis poſt eundem = (M−*m*) C : (M+*m*) (§. 22), hoc eſt, ut ponderum ſumma ad differentiam eorundem ita celeritas ante ictum ad celeritatem poſt ictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 80.

540. *Si duo corpora non elaſtica A & B quacunque celeritate ſibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas poſt ictum æqualis ſemidifferentiæ motuum per ſummam ponderum diviſæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B maſſæ M & *m*, celeritates C & *c*; erit differentia motuum ante ictum MC−*mc* (§. 22). Huic cum æqualis ſit ſumma motuum poſt impactum (§. 532); erit velocitas communis poſt eundem (MC−*mc*) : (M+*m*) (§. 22). *Q. e. d.*

PROBLEMA 99.

541. *Determinare partem mo-*

tus in conflictu amiſſum a fortiori.

RESOLUTIO.

1. Celeritas, qua movetur corpus ante conflictum, ducatur in maſſam ejus, ita habebitur quantitas motus ante conflictum (§. 22).

2. Similiter celeritas, qua idem fertur poſt conflictum, ducatur in maſſam ejus, ita habebitur quantitas motus poſt conflictum (§. cit.)

3. Quodſi motuum quantitatem poſteriorem a priori auferas, relinquetur pars amiſſa.

E. gr. Si duo corpora æqualis ponderis ſibi mutuo occurrant celeritatibus C & c, erit celeritas poſt conflictum $= \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} c$. Ergo motus quantitas poſt conflictum eſt $\frac{1}{2} MC + \frac{1}{2} Mc$. Sed ante conflictum erat in fortiori $= MC$. Motus ergo amiſſus eſt $\frac{1}{2} MC - \frac{1}{2} Mc$. Quare motus integer ad partem amiſſam ut MC ad $\frac{1}{2} MC - \frac{1}{2} Mc$, hoc eſt, ut 2 C ad $C - c$, ſeu ut dupla celeritas fortioris ad differentiam celeritatum ante conflictum.

SCHOLION.

541. *Hac ergo methodo inveniri poſſunt theoremata de quantitate motus in conflictu amiſſo & inde magnitudinem illius æſtimare licet.*

DEFINITIO 61.

543. *Impetum* cum *Leibnitio* (x) appello quantitatem motus, ſeu id quod efficitur ducendo maſſam in celeritatem (§. 22), quodque adeo vi mortuæ æquipollet (§. 278).

AXIOMA 9.

544. *Si corpus aliquod non elaſticum in obicem, qui cedere nequit, impingit, motus omnis ceſſat.*

COROLLARIUM.

545. Si ergo corpus quoddam non elaſticum in obicem cedere neſcium impingit; impetum omnem amittit (§. 543).

SCHOLION.

546. *Propoſitio per experientiam ſatis manifeſta, ut adeo eam inſtar axiomatis ſumere licuerit, nec opus ſit ex notione elateris deficientis eam demum deduci.*

THEOREMA 81.

547. *Centrum percuſſionis idem eſt cum centro oſcillationis, ſi corpus percutiens circa punctum fixum rotatur.*

DEMONSTRATIO.

Centrum enim percuſſionis eſt punctum, in quo colligitur impetus omnis, ſeu circa quod impetus partium utrinque æquilibrantur (§. 527). Invenitur adeo ſi impetus partium conſiderentur inſtar ponderum ad lineam inflexilem ac gra-

(x) in Actis Erudit. A. 1695. p. 174.

gravitatis expertem applicatorum, hoc eſt, dividendo ſummam factorum ex impetibus partium in diſtantias a puncto ſuſpenſionis per ſummam impetum (§. 156). Sed eodem modo invenitur centrum oſcillationis (§. 431.). Ergo centrum oſcillationis idem eſt cum centro percuſſionis, ſi corpus percutiens circa punctum fixum rotatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

548. *Quæ igitur ſupra de centro oſcillationis dicta ſunt, eadem quoque de centro percuſſionis valent, ſi grave percutiens circa punctum fixum rotetur.*

THEOREMA 82.

549. *Centrum percuſſionis idem eſt cum centro gravitatis, ſi corporis percutientis partes omnes motu parallelo feruntur ſeu eadem celeritate moventur.*

DEMONSTRATIO.

Impetus enim ſunt facta ex ponderibus in celeritates (§. 543) Quare ſi æquiponderantia per eandem celeritatem multiplices, perinde eſt ac ſi eorum æque multiplicia ſumas. Sed æquiponderantium æquemultiplicia quoq; æquiponderant (nam ſi A æquiponderet ipſi B, etiam 2A ipſis 2B & in genere *m*A ipſis *m*B æquiponderare intelliguntur). Ergo circa centrum gravitatis impetus æquivalentes diſponuntur, conſequenter centrum gravitatis cum centro percuſſionis in hoc caſu coincidit.

DEFINITIO 62.

550. *Angulus incidentiæ* DCA eſt, quem linea directionis corporis impingentis DC efficit ad punctum contactus C. Tab. IV. Fig. 52.

DEFINITIO 63.

551. Quodſi poſt ictum reflectitur, *Angulus reflexionis* ECF vocatur, quem linea directionis corporis reflexi EC efficit ad punctum contactus, unde reſilit.

THEOREMA 83.

552. *Ictus perpendicularis eſt ad obliquum ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ* DCA.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ad AB perpendicularis DG, nempe in ipſum obicem, ſi ſuperficies plana, aut in rectam, quæ eundem in contactu C tangit, ſi ſuperficies curva, & compleatur rectangulum DGCH. Vis, qua urgetur corpus per DC, æquivalet viribus juxta directiones DH & DG agentibus (241. 245). Quare cum obex AB non opponatur directioni DH, ſed tantum alteri DG; perinde eſt ac ſi corpus D

tantum percuteret obicem vi ſecundum DG agente. Æſtimatur vero magnitudo ictus ex impetu in conflictu amiſſo (§. 541) impetus vero ex quantitate motus (§. 543) adeoque cum corpus idem ſit, ex celeritate (§.49), conſequenter ex longitudine linearum DG, DH, DC (§. 247). Eſt adeo impetus corporis D per DC ad impetum per DG ut DC ad DG. Jam dum corpus oblique impingit, deſtruitur tantum ab obice impetus per DG, *per demonſtrat.* ſi vero perpendiculariter ſeu directe impingeret, deſtrueretur impetus totus per DG & DH (§. 545), hoc eſt, per DC (§. 241). Eſt ergo ictus perpendicularis ad obliquum ut DC ad DG. Sed ſi DC ſumatur pro ſinu toto, erit DG ſinus anguli incidentiæ DCG (§. 21 *Trig.*). Ictus itaque perpendicularis, ad obliquum ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 84.

553. *Elater eſt æqualis vi comprimentis aut tendentis, quamdiu corpus adhuc comprimi poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Corpus elaſticum adhuc ulterius comprimi aut tendi poteſt, nec tamen comprimitur aut tenditur *per hypoth.* Ergo tanta vi reſiſtit quanta comprimitur vel tenditur (§. 75). Reſiſtit autem vi elateris (§. 522): adeoque elater æqualis eſt vi comprimentis aut tendentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

554. Æquatur itaque etiam vi percutientis, quæ ad corpus elaſticum tendendum aut comprimendum requiritur.

THEOREMA 85.

555. *Si corpus* H *in obicem* AB, *qui cedere neſcit, directe impingat, ſitque vel utrumque, vel alterutrum elaſticum, eadem celeritate reflectitur per eandem rectam* CH, *qua advenerat.* Tab. IV. Fig. 52.

DEMONSTRATIO.

Si elater abeſſet, tota vis corporis B in reſiſtentiam obicis frangendam inſumeretur, motusque ceſſaret (§.544). Ergo vis omnis impenditur in compreſſionem corporis elaſtici, atque adeo hoc acquirit vim elaſticam iſti æqualem (§. 553). Cum igitur elater, abſumta vi comprimente, corpus reducat in ſtatum priſtinum, eadem vi illud repellit, qua impegerat, conſequenter hoc eadem celeritate reſilit. Et quoniam corpus elaſticum ſe reſtituit ſecundum directionem

nem, ſecundum quam compreſſum fuerat (nulla enim adeſt ratio, quæ directionem immutet) corpus reſilit per eandem rectam CH, per quam advenerat (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA 86.

Tab. IV. Fig. 53. 556. *Si corpus elaſticum D oblique impingit in obicem AB, qui cedere neſcit, ita poſt ictum reſilit, ut angulus reflexionis ſit æqualis angulo incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonſtratione theorematis 83. (§. 552) vim per DC æquipollere viribus per DG & DH & in ictu tantum impendi vim per DG. Cum adeo poſt ictum remaneat vis per DH ſive CF & per vim elaſticam recuperetur vis per DG ſive CH (§. 556); corpus poſt ictum iisdem viribus urgetur per CF & CH, quibus urgebatur ante conflictum, adeoque motu compoſito deſcribet rectam CE dato tempore ipſi DC æqualem, eruntque eodem tempore HE & DH æquales utpote ab eadem vi deſcriptæ (§. 241). Sunt igitur ΔΔ DCH & CHE æqualia angulique cognomines æquales (§. 204. *Geom.*), conſequenter, cum HCA = HCF (§. 154.) DCA = ECF (91. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 100.

557. *Determinare angulum* EC F, *ſub quo reſilire debet corpus in* C *oblique impingens, ut ex* D *in* E *via breviſſima perveniat, ſuppoſita nempe reflexione in C.* Tab. IV. Fig. 52.

RESOLUTIO.

Demiſſis ex D & E perpendicularibus DG & EF, fiat DG = a, EF = b, FG = c, CG = x, erit CF = $c - x$, DC^2 = $aa + xx$, CE^2 = $bb + cc - 2cx + xx$. Quoniam DC + CE eſt minimum aliquod *per hypoth.* fiat (§. 65. *Analyſ. infinit.*)

$$\sqrt{(aa+xx)} + \sqrt{(bb+cc-2cx+xx)} = y$$

erit

$$\frac{xdx}{\sqrt{(aa+xx)}} + \frac{xdx-cdx}{\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}} = dy = 0$$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} + (x-c)\sqrt{(a^2+x^2)} = 0$$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} = (c-x)\sqrt{(a^2+x^2)}$$

hoc eſt, CG. CE = CF. CD

Eſt itaque CG : CD = CF : CE (§. 299. *Arithm.*). Jam ſi punctum E ſupponatur in recta ipſi AB parallela:

lela; erit EF = DG (§.226.*Geom.*) adeoque ſi DC ſumatur pro ſinu toto, erit GC ſinus anguli GDC, & ſi CE ſumatur pro ſinu toto, erit CF ſinus anguli CEF (§.2.*Trigon.*). Sunt ergo GC & CF arcuum ſimilium ſinus (§.12.*Trigon.*), adeoque anguli GDC & CEF (.141.*Geom.*), conſequenter & eorum complementa ad rectos DCG & ECF (§.246.*Geom.*) æquantur.

COROLLARIUM.

558. Quoniam corpus D poſt impactum in C ita reſilit, ut angulus reflexionis ECF ſit æqualis angulo incidentiæ DCG (§.557), ex D in E, ſuppoſita reflexione in C, via breviſſima pervenit.

PROBLEMA 101.

Tab. IV. Fig. 52. 559. *Determinare punctum* C, *in quod impingere debet corpus* D, *ut reſiliens incurrat in corpus L.*

RESOLUTIO.

Dato puncto D, datur DG perpendiculum $= a$. Dato puncto L, datur LI $= b$, conſequenter GI $= c$. Fiat GC $= x$, erit CI $= c - x$. Et quia angulus LCI = DCG (§.557), G vero & F recti, *per conſtr.* erit (§.267.*Geom.*).

$$DG : LI = GC : CI$$
$$a : b = x : c - x$$

Ergo $a + b : a = c : x$ (§.190.*Arith.*) hoc eſt, DG + LI : DG = GI : GC.

THEOREMA 87.

560. *Si corpus elaſticum* A *in aliud quieſcens* B *eidem æquale directe incurrat, poſt ictum quieſcet* A, *&* B *movebitur ea celeritate, qua ante ictum ferebatur* A.

DEMONSTRATIO.

Si corpora non eſſent elaſtica, utrumque poſt ictum moveretur ſecundum eandem directionem celeritate dimidia (§.536). Sed cum vis elaſtica ſecundum eam directionem agat, ſecundum quam facta eſt compreſſio, ſitque vi comprimenti æqualis (§.553); dimidia celeritate repellit A adeoque motum ejus ſiſtit; B vero dimidia celeritate ulterius impellit adeoque motum ejus accelerat (§.76). Fertur itaque poſt ictum celeritate integra, qua ante ictum ferebatur A, & A quieſcit. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

561. Cum adeo A omnem ſuam vim transferat in B, B eodem modo eandem in C, C rurſus in D & D tandem in E transferre debet. Quare ſi fuerint plura corpora elaſtica pondere æqualia & ſe mutuo tangentia; atque A impingat in B, quieſcentibus omnibus intermedi- Tab. IV. Fig. 54.

mediis, movetur ultimum E ea celeritate, qua impegerat A.

THEOREMA 88.

Tab. IV. Fig. 53. 562. *Si duo corpora elaſtica* A *&* B *pondere æqualia celeritate æquali ſibi muto directe occurrant, utrumque reſiliet ea celeritate & ſecundum eam directionem, qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abeſſet, ambo quieſcerent (§. 556). Omnis ergo vis in compreſſione conſumitur. Huic adeo cum æqualis ſit elaſtica, qua reſiliunt ſecundum directionem, qua advenerant (§. 553); eadem vis æqualiter agens in corpus A & B eandem in utroque celeritatem & quidem priſtinæ æqualem producit. Reſiliunt itaque eadem celeritate, qua advenerant. *Q. e. d.*

THEOREMA 89.

Tab. IV. Fig. 53. 563. *Si duo corpora elaſtica* A *&* B *pondere æqualia celeritate inæquali ſibi mutuo directe occurrant; poſt ictum celeritatibus permutatis feruntur.*

DEMONSTRATIO.

Concurrant corpora A & B celeritatibus C + *c* & C. Quodſi eadem celeritate C concurrerent, A & B poſt ictum movereretur celeritate C (§. 562). Si B quieſceret & A celeritate *c* in ipſum incurreret, poſt ictum quieſceret A, & B moveretur celeritate *c* (§. 460). Ergo exceſſus celeritatis *c*, quo fertur A, totus transfunditur per conflictum in B, adeoque ipſo peracto A movetur celeritate C, B vero celeritate C + *c*. *Q. e. d.*

COROLLARIUM

564. Poſt ictum itaque eadem celeritate a ſe invicem diſcedunt, qua ante ictum ad ſe invicem accedebant.

THEOREMA 90.

565. *Si corpus elaſticum* A *in aliud æquale* B *ſegnius motum incurrat, poſt ictum ambo permutatis celeritatibus feruntur ſecundum eandem, nempe priſtinam, directionem.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Incurrat A celeritate C + *c* in B celeritate C motum. Quoniam ob celeritates C & C æquales nullus ſit impulſus, perinde eſt ac ſi A ſola celeritate *c* in B quieſcens impingeret. Tum vero quieſceret A, & B moveretur celeritate *c* (§. 560). Ergo poſt ictum A movebitur ſola celeritate C, B vero celeritate C + *c*, & utrumque quidem ſecundum priſtinam directionem, quia nihil directionem immutat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

566. Poſt ictum itaque eadem celeritate a ſe invicem diſcedunt, qua ante ictum ad ſe mutuo accedebant.

THEOREMA 91.

Tab. IV. Fig. 53. 567. *Si corpus A in alterum B incurrit, ictus idem eſt, qui fieret a corpore A in B quieſcens cum differentia velocitatum incurrente.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim maſſæ M & *m*, celeritates C & *c*, erit celeritas communis poſt impactum $= (MC + mc) : (M + m)$ (§. 537), adeoque impetus ipſius A $= (M^2C + Mmc) : (M + m)$ (§. 543) conſequenter impetus per ictum amiſſus $= MC - (M^2C + Mmc) : (M + m) = (M^2C + MmC - M^2C - Mmc) : (M + m) = Mm(C - c) : (M + m)$. Sed ſi A incurrat in B quieſcens celeritate $C - c$; erit celeritas poſt ictum $= (MC - Mc) : (M + m)$ (§. 535) adeoque impetus $(M^2C - Mc) : (M + m)$ (§. 543), conſequenter per ictum amiſſus $MC - Mc - (M^2C + M^2c) : (M + m) = (M^2C - M^2c + MmC - Mmc - M^2C + M^2c) : (M + m) = Mm(C - c) : (M + m)$. In utroque igitur caſu idem impetus amittitur, conſequenter ictus idem eſt (§. 541).

COROLLARIUM.

568. Cum vis elaſtica ictui æqualis ſit (§. 553); cum differentia velocitatum, quam habebant ante conflictum, in corpora A & B agit.

THEOREMA 92.

569. *Si duo corpora A & B ſibi mutuo occurrunt, ictus idem contingit, qui fieret a corpore A in B quieſcens cum ſumma velocitatum impingente.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut ante, erit celeritas communis poſt impactum $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 540), adeoque impetus ipſius A ſeu fortioris $(M^2C - Mmc) : (M + m)$, conſequenter impetus per ictum amiſſus $= MC - (M^2C + Mmc) : (M + m) = (M^2C + MmC - M^2C + Mmc) : (M + m) = (MmC + Mmc) : (M + m) = Mm(C + c) : (M + m)$. Sed ſi A incurrat in B quieſcens celeritate $C + c$, erit celeritas poſt ictum $= (MC + Mc) : (M + m)$ (§. 535) adeoque impetus $(M^2C + M^2c) : (M + m)$ (§. 543), conſequenter per ictum amiſſus $MC + Mc - (M^2C - M^2c) : (M + m) = (M^2C + M^2c + MmC + Mmc - M^2C - M^2c) : (M + m) = (MmC + Mmc) : (M + m) = Mm(C + c) : (M + m)$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

570. Cum vis elaſtica ictui æqualis ſit

ſit (§. 553), in corpora A & B cum ſumma velocitatum agit, quas ante conflictum habebant.

PROBLEMA 102.

571. *Determinare celeritatem corporum elaſticorum quorumcunque A & B celeritatibus quibuscunque directe concurrentibus.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 53. I. Si corpora A & B in easdem plagas tendant, poſt ictum vi ſola impulſus ſecundum eandem moventur celeritate communi $(MC + mc):(M+m)$ (§. 533). Accedat jam vis elaſtica, quæ agit in eadem corpora cum celeritate $C-c$ (§. 568) adeoque cum in momento ictus A & B corpus unum conſtituant, eandem ita diſtribuit, ut celeritates, poſt ictum a vi elaſtica acquiſitæ ſint in ratione maſſarum reciproca. Sit ergo celeritas ipſi B acquiſita $= x$, erit

$$M : m = x : C - c - x$$

$$MC - Mc - Mx = mx$$

$$MC - Mc = Mx + mx$$

$$(MC - Mc):(M+m) = x$$

Hinc celeritas ipſi A acquiſita $= C - c - (MC + Mc):(M+m) = (MC - Mc + mC - mc - MC + Mc):(M+m) = (mC - mc):(M+m)$. Jam cum elater corpus A repellat, directioni ejus contrarius, celeritas hæc ſubtrahenda eſt ab ea, quæ per ſolum impulſum acquiritur: cum vero idem corpus B ad eandem plagam propellat, celeritas hæc addenda eſt priori per impulſum ſolum acquiſitæ (§. 76). Unde tandem prodit celeritas ipſius A $= (MC + mc - mC + mc):(M+m) = (MC - mC + 2mc):(M+m)$ & ipſius B $= (MC + mc + MC - Mc):(M+m) = (2MC + mc - Mc):(M+m)$.

E. gr. Sit $M = 6$ librarum, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$, erit poſt conflictum celeritas ipſius A $= (18 - 12 + 16):(6+4) = \frac{22}{10} = 2\frac{1}{5}$ & ipſius B $= (36 + 8 - 12):10 = \frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}$. Progrediuntur itaque A & B verſus eandem plagam celeritatibus $2\frac{1}{5}$ & $3\frac{1}{5}$.

Sit $M = 2$, $m = 6$, $C = 4$, $c = 1$, erit poſt conflictum celeritas ipſius A $= (8 - 24 + 12):(2+6) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$; celeritas ipſius B $= (16 + 6 - 2):(2+6) = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$. Cum celeritas ipſius A negativa prodeat, id indicio eſt, celeritatem per actionem elateris acquiſitam eſſe majorem celeritate per impulſum acquiſita adeoque corpus A reſilire poſt ictum. Poſt conflictum itaque A cum dimidio celeritatis gradu recedit, B vero cum $2\frac{1}{2}$ progreditur.

II. Si corpora A & B ad contrarias plagas tendentia ſibi mutuo occur-

occurrant, in conflictu per impulſum ſolum utrique acquiritur celeritas $(MC-mc):(M+m)$ (§.540). Cum vis elaſtica in corpora, quæ inter ſe colliduntur, agat cum celeritate $C+c$ (§.570), ſi celeritas ipſi B inde acquiſita ſit x, erit vi ſuperiorum.

$$M:m=x:C+c-x$$

$$MC+Mc-Mx=mx$$

$$MC+Mc=Mx+mx$$

$$(MC+Mc):(M+m)=x$$

Hinc celeritas, quæ ipſi A acquiritur, $C+c\,(-MC-Mc):(M+m)=(MC+Mc+mC+mc-MC-Mc):(M+m)=(mC+mc):(M+m)$. Unde tandem ut ante prodit celeritas ipſius A $=(MC-mc-mC-mc):(M+m)$ $(MC-mC-2mc):(M+m)$; celeritas vero ipſius B $=(MC-mc+MC+Mc):(M+m)=(2MC+Mc-mc):(M+m)$. Quodſi $mC+2mc>MC$; celeritas ipſius A eſt negativa, quod oſtendit, vim elaſticam eſſe impulſu ſuperiorem, adeoque corpus A reſilire, nec progredi cum reſiliente B.

E. gr. Sit ut ante $M=6$, $m=4$, $C=3$, $c=2$, erit poſt conflictum celeritas ipſius A $=(18-12-16):10=-1$ & ipſius B $=(36+12-8):10=\frac{40}{10}=4$. Regreditur adeo corpus B cum quatuor gradibus celeritatum & A cum uno.

COROLLARIUM 1.

572. Quoniam $\frac{MC-mC+2mc}{M+m}=\frac{MC+mC-2mC+2mc}{M+m}=C-\frac{2mC+2mc}{M+m}$ & $\frac{2MC+mc-Mc}{M+m}=\frac{Mc+mc+2MC-2Mc}{M+m}=c+\frac{2MC-2Mc}{M+m}$, atque $(2MC-2Mc):(M+m)$ & $(2mC-2mc):(M+m)$ ſunt celeritates, quæ ſe habent ad celeritatum differentiam ante impactum, quæ *celeritas reſpectiva* dicitur, ut alterutrius ponderis duplum ad ponderum ſummam; ſi corpus elaſticum A in aliud B ſive quieſcens, ſive tardius motum incurrat, invenitur celeritas poſt impactum corporis A, ubi fiat: *ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius B, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quæ ex celeritate ipſius A ante impactum ſubducta relinquit celeritatem ejuſdem poſt impactum.* Celeritas vero ipſius B reperitur, ſi fiat; *Ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius A, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, qua addita celeritati ipſius B prodit celeritas hujus poſt impactum.*

COROL-

COROLLARIUM 2.

573. Similiter quia $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC - 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC - 2mc}{M + m}$ & $\frac{2MC + Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc - Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc}{M + m} - c$, atque $(2mC + 2mc):(M + m)$ & $(2MC + 2Mc):(M + m)$ ſunt celeritates, quæ ſe habent ad celeritatum ante impactum ſummam (quæ *celeritas reſpectiva* dicitur) ut duplum ponderis alterutrius ad eorundem ſummam; ſi duo corpora elaſtica A & B ſibi mutuo occurrant, invenitur poſt impactum corporis A celeritatem, ubi fiat: *ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius* B, *ita celeritatum ante impactum ſumma ad celeritatem, qua ex celeritate ipſius* A *ante impactum ſubducta relinquit celeritatem ejusdem poſt impactum.* Celeritas vero ipſius B invenitur, ſi fiat: *ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius* A *ita ſumma celeritatum ante impactum ad celeritatem, ex qua ſubducta celeritas ante impactum relinquit eam, qua ineſt poſt eundem.*

THEOREMA 93.

Tab. IV. Fig. 53. 574. *Si corpus elaſticum* A *directe impingit in aliud quieſcens* B; *erit celeritas ejus poſt conflictum ad celeritatem ante eundem, ut differentia ponderum ad ſummam eorundem, quam vero communicat cum* B, *ea ad eandem eſt ut duplum pondus ipſius* A *ad ponderum ſummam.*

DEMONSTRATIO.

Si B non quieſcit, celeritas ipſius A poſt ictum eſt $(MC - mC + 2mc):(M + m)$, (§. 571). Si vero quieſcit, celeritas ejus ante conflictum nulla eſt, adeoque $c = o$. Quare cum in hoc caſu fiat $2mc = o$; erit celeritas ipſius A poſt impactum $= (MC - mC):(M + m)$. Eſt itaque ad C celeritatem ante conflictum ut $M - m$ differentia ponderum ad $M + m$ eorundem ſummam. *Quod erat unum.*

Similiter ſi B non quieſcit, celeritatem ex conflictu acquirit $(2MC + mc - Mc):(M + m)$, (§. 571). Jam ſi quieſcit, celeritas ejus nulla eſt adeoque $c = o$, conſequenter $mc = o$ & $Mc = o$. Quare celeritas ipſius B poſt conflictum $= 2MC:(M + m)$. Eſt igitur ad celeritatem ipſius A ante conflictum ut duplum ponderis A ad ſummam ponderum. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

575. Erit ergo ex æquo poſt conflictum velocitas ipſius A ad velocitatem ipſius

ipſius B ut differentia ponderum ad duplum ipſius A (§. 196. *Arithm.*)

THEOREMA 94.

576. *Si duo corpora elaſtica* A *&* B *ſibi mutuo directe occurrunt cum celeritatibus, quæ ipſorum ponderibus reciproce proportionales ſunt, poſt conflictum eadem celeritate a ſe invicem reſiliunt, qua advenerant.*

DEMONSTRATIO.

Poſt conflictum celeritas ipſius A eſt $(MC - mC - 2mc) : (M + m)$ & celeritas ipſius B eſt $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$ (§. 571). Eſt vero $M : m = c : C$, *per hypoth.* adeoque $mc = MC$ (§. 297. *Arithm.*) Quod ſi ergo in expreſſione celeritatis ipſius pro $2mc$ ſubſtitutas $2MC$, prodibit $(-mC - MC) : (M + m) = -C$. Reſilit ergo A celeritate C, qua advenerat. *Quod erat unum.*

Quodſi ſimiliter in expreſſione celeritatis ipſius B pro $2MC$ ſubſtituas $2mc$; prodibit $(mc + Mc) : (M + m) = c$. Abit ergo B eadem celeritate, qua advenerat. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 95.

577. *Si duo corpora elaſtica ante & poſt conflictum in eandem plagam moventur; differentia celeritatum tam ante, quam poſt impulſum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c; erit eorum differentia $= C - c$, & corpus M, quod ſequitur, in alterum m incurrit. Celeritas igitur ipſius M poſt conflictum $= \frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$; ipſius autem $m = \frac{mc + 2MC - Mc}{M + m}$, & quoniam poſt conflictum adhuc in eandem plagam moventur, celeritas corporis M celeritate alterius m minor eſt, conſequenter celeritatum differentia poſt conflictum

$$\frac{mc + 2MC - Mc - MC - 2mc + mC}{M + m}$$

$$= \frac{MC - Mc - mc + mC}{M + m}$$

$= C - c$. Eſt adeo celeritatum differentia poſt conflictum eadem, quæ fuerat ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 96.

578. *Si duo corpora elaſtica ante conflictum in eandem plagam moventur, poſt conflictum in contrarias; differentia celeritatum ante conflictum æqualis eſt ſummæ celeritatum poſt eundem.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & *m* ante conflictum C & *c*: erit differentia eorundem $C - c$. Quoniam corpus M, quod ante conflictum celerius movetur *per hypoth*, in alterum *m* incurrit, & poſt conflictum M & *m* moventur in plagas contrarias *per hypoth.* celeritas vi elaſtica producta in M major eſt celeritate ex ictu, utpote qua M cum *m* in eandem plagam progrediebatur (§. 534). Celeritas igitur in corpore M negativa eſt, adeoque $\frac{mC - 2mc - MC}{M + m}$ & in corpore $m = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (§. 571), conſequenter ſumma celeritatum poſt conflictum $= \frac{MC + mC - Mc - mc}{M + m} = C - c$. Eſt ergo ſumma celeritatum poſt conflictum eadem cum differentia earundem ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 97.

579. *Si duo corpora elaſtica ante conflictum in partes contrarias, poſt eundem in eandem moventur; ſumma celeritatum ante conflictum æqualis eſt differentiæ earum poſt eundem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & *m* ante conflictum C & *c*: erit ſumma earundem $C + c$. Quoniam corpora ſibi mutuo occurrunt & poſt conflictum in eandem partem moventur *per hypoth.* erit poſt conflictum celeritas corporis $M = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ & corporis $m = \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$ (§. 571). Eſt vero differentia harum celeritatum $= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c$, quæ eadem cum ſumma celeritatum ante conflictum. *Q. e. d.*

THOREMA 98.

580. *Si duo corpora elaſtica ante & poſt conflictum in partes contrarias moventur; ſumma celeritatum ante & poſt conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum M & *m* celeritates ante conflictum C & *c*; erit earum ſumma $C + c$. Quoniam corpora hæc ante conflictum in partes contrarias moventur, adeoque ſibi mutuo occurrunt *per hypoth.* erit celeritas corporis $m = \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$ (§. 571). Enimvero corpus M poſt conflictum in partem ei contrariam movetur, in quam

quam ante eundem tendebat *per hypoth.* adeoque $mC + 2mc > MC$, ſeu celeritas poſt conflictum negativa, conſequenter $= \frac{mC + 2mc - Mc}{M + m}$ (*§.cit.*) Eſt igitur ſumma celeritatum poſt conflictum $= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c$, adeoque eadem quæ ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 99.

581. *Si duo corpora elaſtica ante & poſt conflictum in eandem plagam moventur: quantitas motus ante & poſt conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in corpus m celeritate c motum: erit celeritas illius poſt conflictum $\frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$ & hujus celeritas $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (*§. 571*), conſequenter quantitas motus corporis M poſt conflictum $= \frac{M^2C + 2Mmc - MmC}{M + m}$ & corporis $m = \frac{2MmC + Mm^2c - Mmc}{M + m}$ (*§. 22*). Eſt itaque ſumma motuum poſt conflictum $= \frac{M^2C + MmC + Mmc + m^2c}{M + m} = MC + mc$ (*§. 22*). Enimvero quantitas motus utriusque corporis ante conflictum in unam ſummam collecta erat itidem $MC + mc$ (*§. cit.*). Quamobrem patet quantitatem motus ante & poſt conflictum eſſe eandem. *Q. e. d.*

THEOREMA 100.

582. *Si duo corpora elaſtica ante & poſt conflictum in partes contrarias moventur; differentia quantitatum motus ante & poſt conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quia corpora ante conflictum in partes contrarias moventur *per hypoth.* ſibi mutuo occurrunt. Occurrat itaque corpus M celeritate C corpori m celeritate c moto; erit celeritas corporis m poſt conflictum $= \frac{2MC - mc + Mc}{M + m}$ & cum corpus M poſt conflictum in partem ei contrariam movetur, qua advenerat, erit celeritas corporis M poſt conflictum $= \frac{mC + 2mc}{M + m} - MC$

— MC. Quare quantitates motuum in corporibus M & *m* ſunt $\frac{MmC + 2Mmc - MC}{M+m}$ & $\frac{2MmC - m^2c + Mmc}{M+m}$, conſequenter eorum differentia $= \frac{MmC - Mmc + M^2C - m^2c}{M+m} = MC - mc$. Eſt vero $MC - mc$ differentia quantitatum motus ante conflictum. Ergo differentia quantitatum motus ante & poſt conflictum eadem. *Q. e. d.*

THEOREMA 101.

583. *Si duo corpora elaſtica ante conflictum in eandem partem, poſt conflictum vero in contrarias moventur; differentia quantitatum motus poſt conflictum eſt æqualis ſummæ earundum ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem partem moventur, corpus unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in alterum *m* celeritate *c* motum; erit celeritas corporis $m = \frac{2MC + mc - Mc}{M+m}$. Quoniam vero corpus M movetur poſt conflictum in partem contrariam ei, in quam ante tendebat; celeritas erit negativa, adeoque celeritas poſitiva evadet $\frac{mC - 2mc - MC}{M+m}$ (§. 571). Sunt igitur quantitates motus poſt conflictum $= \frac{MmC - 2Mmc - M^2C}{M+m}$ & $\frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M+m}$, adeoque differentia $\frac{MmC + Mmc + M^2C + m^2c}{M+m} = MC + mc$. Quare cum ſit $MC + mc$ ſumma quantitatum motus ante conflictum (§. 22); differentia motuum poſt conflictum æqualis eſt ſummæ ante eundem.

THEOREMA 102.

584. *Si duo corpora elaſtica ante conflictum in partes contrarias, poſt eundem in eaſdem moventur; ſumma motuum poſt eundem æqualis eſt differentiæ earundem ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in partes contrarias contendunt, ſibi mutuo occurrunt. Occurrat igitur corpus M celeritate C alteri *m* celeritate *c* moto; erit celerias corporis *m* poſt conflictum $= \frac{2MC + Mc - mc}{M+m}$ & corporis

M =

$M_1 = \frac{MC - mC - 2mc}{M+m}$ (§. 571).

Sunt adeo quantitates motus poſt conflictum = $\frac{2MmC + Mmc - m^2c}{M+m}$ & $\frac{M^2C - MmC - 2Mmc}{M+m}$, conſequenter ſumma motuum poſt conflictum = $\frac{M^2C + MmC - Mmc - m^2c}{M+m} = MC - mc$. Quoniam differentia motuum ante conflictum eſt $MC - mc$, ſumma motuum poſt eundem eſt æqualis differentiæ motuum ante eundem.

THEOREMA 103.

585. *In conflictu corporum elaſticorum hoc ſolo in caſu eadem conſervatur motus quantitas, quando corpora ante & poſt conflictum in eandem plagam moventur.*

DEMONSTRATIO.

Corpora enim aut ante & poſt conflictum in eandem plagam moventur aut in contrarias; aut ante conflictum in eandem, poſt eundem in contrarias; aut denique ante conflictum in contrarias partes poſt eundem in eandem tendunt. Jam in hoc ſolo caſu, quando corpora ante & poſt conflictum in eandem plagam tendunt, ſumma motuum ante & poſt conflictum eadem (§. 581. & ſeqq.). In hoc igitur caſu ſolo eadem conſervatur motus quantitas.

COROLLARIUM.

586. A vero igitur aberravit *Carteſius*, dum hanc ſtatuit naturæ legem, quod in omni corporum conflictu eadem ſemper conſervetur motus quantitas.

SCHOLION.

587. *Ut idem evidentius appareat, oſtendendum porro erit, quonam in caſu quantitas motus augeatur, in quonam minuatur. Eo igitur fine addimus theoremata proxime ſequentia.*

THEOREMA 104.

588. *In conflictu corporum elaſticorum quantitas motus augetur, quando ante conflictum in partem eandem, poſt conflictum in contrarias moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum partem eandem, poſt conflictum in contrarias partes feruntur; differentia motuum poſt conflictum eſt æqulis ſummæ eorundem ante conflictum (§. 583). Enimvero ſumma motuum poſt conflictum eſt major differentia motuum poſt eundem: id quod ex terminis manifeſtum eſt (§. 61. 64. *Arithm.*). Quamobrem etiam

iam ſumma motuum poſt conflictum major eſt ſumma eorundem ante conflictum (89. *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu augetu. *Q. e. d.*

THEOREMA 105.

589. *In conflictu corporum elaſticorum quantitas motus minuitur, quando ante conflictum in partes contrarias, poſt eundem in eandem moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum in partes contrarias, poſt eundem in eandem feruntur; Summa motuum poſt conflictum æqualis eſt differentiæ eorundem ante conflictum (§. 584). Enimvero ſumma motuum ante conflictum major eſt differentia eorundem ante conflictum: id quod ex terminis manifeſtum (§. 61. 64. *Arithm.*). Ergo ſumma motuum ante conflictum major eſt ſumma motuum poſt eundem (§. 89. *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu imminuitur. *Q. e. d.*

THEOREMA 106.

590. *Corpora elaſtica poſt conflictum eadem celeritate a ſe invicem recedunt, qua ante eundem ad ſe invicem accedebant,*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur & tardius motum præcedit, celerius motum ſequitur, quemadmodum in conflictu ſupponi debet; differentia celeritatum ad ſe invicem accedunt. Quodſi vero poſt conflictum itidem in eandem plagam feruntur, differentia celeritatum poſt conflictum eſt æqualis differentiæ celeritatum ante eundem (§. 577). Quoniam itaque tardius motum ſequitur, celerius motum præcedit, quemadmodum ex actione elateris intelligitur, qua corpora vi ictus eadem celeritate ſecundum eandem directionem progreſſura (§. 534) a ſe invicem ſeparantur (§. 571), adeoque differentia celeritatum a ſe invicem diſcedunt; poſt conflictum ea celeritate a ſe invicem recedunt, qua ante eundem ad ſe invicem accedebant. *Quod erat unum.*

II. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur & tardius motum præcedit, celerius motum ſequitur, differentia celeritatum ad ſe invicem accedunt. Quodſi poſt conflictum in diverſas plagas tendunt, ſumma

ma celeritatum a ſe invicem recedunt. Quare cum in hoc caſu ſumma celeritatum poſt conflictum ſit æqualis differentiæ ante eundem (§.578); eadem celeritate etiam in hoc caſu poſt conflictum a ſe invicem diſcedunt, qua ante eundem ad ſe invicem accedebant. *Quod erat ſecundum.*

III. Quodſi duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur ſibi mutuo occurſura, ſumma celeritatum ad ſe invicem accedunt. Quodſi poſt conflictum tendant in eandem, cum celerius motum præcedat, tardius motum ſequatur vi eorum, quæ *n. I.* dicta ſunt; differentia celeritatum a ſe invicem recedunt. Eſt vero differentia celeritatum poſt conflictum æqualis ſummæ ante eundem (§.579). Ergo corpora poſt conflictum eadem celeritate ad ſe invicem accedunt, qua poſt eundem a ſe invicem recedunt. *Quod erat tertium.*

IV. Denique ſi duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur ſibi mutuo occurſura & poſt conflictum in contrarias a ſe invicem diſcedunt; ſumma celeritatum ante conflictum ad ſe invicem accedunt, poſt conflictum a ſe invicem recedunt. Eſt vero in hoc caſu ſumma celeritatum ante & poſt conflictum eadem (§.580). Ergo eadem celeritate poſt conflictum a ſe invicem recedunt, quo ante eundem ad ſe invicem accedunt. *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

591. *Hoc theorema breviter ita enunciatur:* In conflictu corporum elaſticorum eadem ſemper conſervatur celeritas reſpectiva. *Hanc propoſitionem alii inter leges motus referunt ac inde regulas motus demonſtrant.*

COROLLARIUM.

592. Æqualibus igitur temporibus ante & poſt conflictum æquales ſunt corporum a ſe invicem diſtantiæ, veluti quo intervallo uno minuto ante conflictum corpora a ſe invicem diſtant, eadem uno minuto poſt eundem a ſe invicem diſtant.

THEOREMA 107.

593. *Si duo corpora elaſtica* A B *directe concurrant vel ſibi mutuo occurrant, ſumma factorum ex maſſis in quadrata celeritatum ante & poſt conflictum eadem.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

In concurſu directo celeritates poſt conflictum ſunt (MC — mC + 2

$+2mc):(M+m)$ vel $(mC-2mc-MC):(M+m)$ & $(2MC-Mc+mc):(M+m)$ (§. 571). Hinc quadrata eorundem $(M^2C^2+4MmCc-4m^2Cc+4m^2c^2+m^2C^2-2mMC^2):(M^2+2mM+m^2)$ & $(4M^2C^2+4MmCc-2Mmc^2+m^2c^2-4M^2Cc+M^2c^2):(M^2+2mM+m^2)$, conſequenter priore per M, poſteriore per m multiplicato, prodit ſumma factorum ex maſſis in quadrata celeritatum $(M^3C^2+2Mm^2c^2+2M^2C^2m+M^2c^2m+Mm^2c^2+m^3c^2):(M^2+2mM+m^2)=MC^2+mc^2$, quæ eadem eſt ſumma ex factis maſſarum in quadrata celeritatum ante conflictū. Idem cum eodem modo in occurſu corporum directo oſtendatur, quo celeritas corporis m eſt $(2MC+Mc-mc):(M+m)$, corporis vero M eſt $\frac{MC-mc-2mc}{M+m}$, vel $\frac{mC+mc-MC}{M+m}$ (§. 571): patet propoſitum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

594. Eadem itaque in conflictu conſervatur virium vivarum quantitas (§. 325).

THEOREMA 108.

595. *Si duo corpora elaſtica celeritatibus per conflictum acquiſitis denuo in ſe invicem incurrere, vel ſibi mutuo occurrere ſupponantur; per novum hunc conflictum recuperabunt celeritates, quas ante eundem habebant.*

DEMONSTRATIO.

Sint maſſæ corporum M & m, celeritates ante primum conflictum C & c, ac corpus M incurrat in alterum m: erunt poſt conflictum celeritates eorundem corporum $\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ & $\frac{2MC+mC-Mc}{M+m}$ (§. 571). Quoniam celeritas corporis m major eſt celeritate atlerius M poſt conflictum (§. *cit.*); mutatis directionibus corpus m in alterum M incurret. Ne calculus fiat intricatus, fiat $A=m$, $B=M$, celeritas ipſius $A=V=\frac{2MC+mc-Mc}{M+m}$ & celeritas corporis $B=v=\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$. Erit igitur poſt alterum conflictum celeritas corporis incurrentis $A=\frac{AV-BV+2Bv}{A+B}$, & celeritas alterius $B=\frac{2AV+Bv-Av}{A+B}$. Jam

$$AV = 2MmC + m^2c - Mmc$$
$$-BV = -M^2C - Mmc + M^2c$$
$$+Bv = 2M^2C - 2MmC + 4Mmc$$

$$\frac{AV - BV + 2Bv}{A+B} = \frac{M^2c + 2Mmc + m^2c}{M^2 + 2Mm + m^2} = c$$

Recuperat igitur corpus *m* poſt conflictum alterum celeritatem *c*, quam ante primum habebat. *Quod erat unum.* Porro

$$2AV = 4MmC + 2m^2c - 2Mmc$$
$$+Bv = +M^2C - MmC + 2Mmc$$
$$-Av = -MmC + m^2C - 2m^2c$$

$$\frac{2AV + Bv - Av}{A+B} = \frac{M^2C + 2MmC + m^2C}{M^2 + 2Mm + m^2} = C$$

Recuperat itaque etiam corpus M per conflictum alterum celeritatem C, quam ante primum habebat. *Quod erat ſecundum.*

Utrumque eodem modo oſtenditur, ſi corpora duo ſibi mutuo directe occurrant & mutatis directionibus poſt conflictum primum denuo ſibi occurrere ſupponantur. *Quod erat tertium & quartum.*

DEFINITIO 64.

Tab. I. Fig. 4. 596. Si linea recta AB jungit centra gravitatis A & B duorum corporum & punctum C ita eandem dividat, ut ſit pondus corporis A ad pondus corporis B uti reciproce BC ad CA; dicetur punctum C *Centrum gravitatis corporum* A & B.

SCHOLION.

597. Ratio denominandi patet ex iis, quæ ſuperius (§. 144) demonſtrata ſunt.

THEOREMA 109.

598. *Centrum gravitatis corporum elaſticorum ante & poſt conflictum vel quieſcit, vel uniformiter ſeu eadem velocitate in eandem plagam movetur & temporibus æqualibus eodem intervallo ab eodem diſtant mobilia ante & poſt conflictum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſumtis temporibus ante & poſt conflictum æqualibus eadem eſt corporum A & B diſtantia, adeoque recta jungens eorum centra gravitatis AB eadem (§. 192. *Geom.*). Quare cum centrum gravitatis C in eadem recta fixum ſit; mobilia ab eodem æquali intervallo diſtare debent ſumtis ante & poſt conflictum temporibus æqualibus. *Quod erat primum.* Tab. I. Fig. 4.

Fieri autem non poteſt ut eadem ante & poſt conflictum temporibus æqualibus ſit corporum

porum A & B a centro gravitatis diſtantia, niſi aut centrum iſtud quieſcat, aut ante & poſt conflictum eodem modo moveatur: quod per ſe patet. Ergo centrum gravitatis ante & poſt conflictum vel moveri eodem modo, vel quieſcere debet. *Quod erat ſecundum.*

Quoniam vero centrum gravitatis corpori majori continuo propius eſt (§. 144); cum corpore majore ſeu graviore in eandem plagam, adeoque continuo juxta eandem directionem movetur. *Quod erat tertium.*

Denique cum corporum motus ſit æquabilis (§. 71), duplo tempore dupla, triplo tripla, quadruplo quadrupla efficitur in corporibus a ſe invicem recedentibus diſtantia, in accedentibus vero ad ſe invicem ſubdupla, ſubtripla, ſubquadrupla (§. 31), conſequenter cum diſtantiæ a centro ſint in conſtante ratione, nimirum ratione maſſarum reciproca (§. 596), eædem quoque duplo tempore duplæ, triplo triplæ, quadruplo quadruplæ in caſu priori, aſt ſubduplæ, ſubtriplæ, ſubquadruplæ in poſteriori evadere debent (§. 178. 181. *Arithm.*). Quamobrem ſi centrum gravitatis movetur, ſpatia ab eodem deſcripta temporum rationem habere, adeoque ipſum motu æquabili ferri (§. 31), conſequenter continuo eadem velocitate progredi debet (§. 24). *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

599. *Quod centrum gravitatis ſubinde quieſcat, ſubinde moveri debeat, & quandonam quieſcat, quandonam moveatur, patet ex propoſitione ſequente.*

THEOREMA 110.

600. *Si duo corpora elaſtica moventur celeritatibus, quæ ſunt maſſis ſeu ponderibus ipſorum reciproce proportionales, ſibique mutuo occurrunt; centrum gravitatis ante & poſt conflictum quieſcit: in alio autem caſu quocunque non quieſcit, ſed movetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim corpora motu æquabili feruntur *per hypoth.* ſpatia deſcripta eodem tempore continuo ſunt ut celeritates quibus feruntur (§. 35), adeoque in ratione maſſarum reciproca (§. 167. *Arithm.*). Enimvero centrum gravitatis continuo a mobilibus diſtat in ratione maſſarum reciproca (§. 596), & ante conflictum auferuntur a diſtantiis anterioribus continuo partes in ratione maſſa-

 rum

rum reciproca *per demonſtrata*; adeoque partes inter mobilia & centri gravitatis locum in anteriore quocunque tempore interceptæ ſunt itidem in ratione maſſarum reciproca (§. 188. *Arithm.*), conſequenter centrum gravitatis in eodem loco conſtanter hæret (§. 596) & hinc ante conflictum quieſcit. Enimvero poſt conflictum celeritates eædem prorſus ſunt, quæ ante eundem fuerant (§. 590), adeoque itidem maſſis reciproce proportionales *per hypoth.* Patet igitur ut ante quod diſtantiæ continuo creſcant a loco centri gravitatis in tempore quocunque anteriore in ratione maſſarum reciproca (§. 187. *Arithm.*), conſequenter & poſt conflictum quieſcit. *Quod erat unum.*

Jam in omni reliquo caſu eodem, quo ante, modo patet quod diſtantiæ a loco centri gravitatis dato tempore ante conflictum non decreſcant, nec poſt conflictum creſcant in ratione maſſarum reciproca, conſequenter a loco iſto continuo non diſtent corpora in ratione maſſarum reciproca (§. 188. 187. *Arithm.*) Centrum igitur gravitatis non omni tempore in eodem loco eſt (§. 596), conſequenter movetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

601. Si corpora elaſtica æqualia eadem celeritate ſibi mutuo occurrunt, celeritates quoque maſſis reciproce proportionales ſunt, quod per ſe patet. Centrum gravitatis igitur ante & poſt conflictum quieſcit, ſi corpora elaſtica æqualia æquali celeritate ſibi mutuo occurrunt.

SCHOLION.

602. *Nimirum caſus hic ſpecialis ſub generali theorematis actu continetur, ut dici non poſſit præter caſum theorematis dari adhuc alium, in quo centrum gravitatis quieſcit. Ceterum theorema præſens ita enunciari ſolet:* Status centri gravitatis non mutatur ab actione corporum in ſe invicem. *Sunt quidam philoſophi, qui ut autoritatem* Carteſii *tueantur, eandem motus quantitatem conſervari in omni conflictu contendunt, quatenus centrum gravitatis, in quo pondera corporum uniuntur (§. 125), eadem celeritate ante & poſt conflictum movetur. Verum enim eſt quantitatem motus centri gravitatis ante & poſt conflictum eſſe eandem.*

THEOREMA III.

603. *Si corpora elaſtica ſibi mutuo occurrunt, celeritas ab uno eorum amiſſa eſt ad celeritatem, quam idem amitteret, ſi in alterum quieſcens impingeret ut ſumma celeritatum utriusque ad celeritatem ipſius impingentis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpora M & m celeritatibus C & c ſibi mutuo occurrant, erit illius celeritas poſt conflictum $= \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ (§. 571), conſequenter celeritas in conflictu amiſſa $= C - \frac{MC + mC + 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC + 2mc}{M + m} = \frac{2mC + 2mc}{M + m}$. Jam vero ſi corpus M in alterum m quieſcens celeritate C incurreret; celeritas poſt conflictum foret $= \frac{MC - mC}{M + m}$ (§. *cit.*) conſequenter celeritas amiſſa foret $C - \frac{MC + mC}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC}{M + m} = \frac{2mC}{M + m}$. Eſt igitur celeritas in caſu priori amiſſa ad celeritatem in poſteriori amittendam $= \frac{2mC + 2mc}{M + m} : \frac{2mC}{M + m} = C + c : C$, hoc eſt, ut ſumma celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem impingentis ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 112.

604. *Si corpus elaſticum unum in alterum incurrit, celeritas ab incurrente in conflictu amiſſa eſt ad celeritatem, qua idem in quieſcens impingeret ut celeritatum differentia ante conflictum ad celeritatem incurrentis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus M celeritate C in corpus m incurrit, quod celeritate c movetur, erit illius celeritas poſt conflictum $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$ (§. 571), adeoque celeritas in conflictu amiſſa $C - \frac{MC + mC - 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC - 2mc}{M + m} = \frac{2mC - 2mc}{M + m}$. Enimvero ſi corpus M in alterum m quieſcens celeritate C incurreret; celeritas poſt conflictum foret $\frac{MC - mC}{M + m}$, adeoque celeritas amiſſa foret $C - \frac{MC + mC}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC}{M + m} = \frac{2mC}{M + m}$. Eſt igitur celeritas in caſu priori amiſſa ad celeritatem in caſu poſteriori amittendam $= \frac{2mC - 2mc}{M + m} : \frac{2mC}{M + m} = C - c : C$, hoc

hoc eſt, ut differentia celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem incurrentis poſt eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 113.

605. *Si corpus elaſticum majus incurrat in minus quieſcens, celeritatem majorem ea, qua fertur, ſed dupla minorem eidem communicat.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in corpus minus m quieſcens: erit celeritas corporis m poſt conflictum $2MC : (M + m)$ (§. 571), hoc eſt, ſi $M=m+n$, $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$.

Eſt igitur celeritas corpori minori m communicata per conflictum a corpore M ad celeritatem hujus ante conflictum $= \frac{2mC+2nC}{2m+n} : C = 2mC+2nC : 2mC+nC$ (§. 181. *Arithm.*) $= 2m+2n : 2m+n = 2 : 1+\frac{n}{m+n}$. Eſt igitur celeritas corporis minoris major quam fuerat impingentis ante conflictum, ſed minor quam dupla ejusdem: nimirum ſi dupla foret, antecedens rationis eſſe deberet $2+2n : (m+n)$. Idem etiam patet ſi celeritatem corpori minori acquiſitam $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$ dividas per $2m+n$; prodit enim $C+\frac{nC}{2m+n}$. Eſt vero $C+\frac{nC}{2m+n} > C$ (§. 84. *Arithm.*). Jam vero $\frac{nC}{2m+n} : C = nC : (2m+n)C = n : 2m+n$. Sed $n < 2m+n$ (§. 20. *Arithm.*). Ergo $\frac{nC}{m+n} < C$ (§. 151. *Arithm*). *Q. e. d.*

THEOREMA 114.

606. *Si corpus elaſticum majus in minus quieſcens incurrat, minus poſt conflictum movetur celeritate compoſita ex ea, qua majus ferebatur ante conflictum, & ex altera, qua poſt conflictum idem incedit.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in alterum quieſcens m, ſitque $M=m+n$; patet ex demonſtratione theorematis præcedentis corporis m celeritatem poſt conflictum eſſe $C+\frac{nC}{2m+n}$. Enimvero celeritas corporis M poſt conflictum $= \frac{MC-mC}{M+m}$ (§. 571) =

mC

$\frac{mC + nC - mC}{2m+n} = \frac{nC}{2m+n}$.

Componitur adeo celeritas corporis m ex celeritate C, quam habebat majus M ante conflictum, & ex celeritate $\frac{nC}{2m+n}$, quæ eſt eidem poſt conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 115.

607. *Si celeritas corporis elaſtici majoris in aliud minus quieſcens incurrentis fuerit ut ſumma maſſarum utriusque corporis; minori dat celeritatem, quæ eſt ut duplum ſui, amittit vero celeritatem, quæ eſt ut duplum minoris corporis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus minus m, in quod majus M celeritate C incurrit, quieſcit; celeritas ejus poſt conflictum eſt $\frac{MC - mC}{M+m}$ & minori dat celeritatem $\frac{2\,MC}{M+m}$ (§. 571). Eſt vero $C = M + m$ *per hypoth.* Ergo celeritas majoris ſive incurrentis $= M - m$, quæ differt a celeritate initiali $M + m$ quantitate $2\,m$. Amittit igitur corpus M in conflictu celeritatem, quæ eſt ut duplum corporis minoris. *Quod erat unum.*

Sed celeritas corpori minori ex conflictu acquiſita erit 2 M, adeoque ea eſt ut duplum corporis majoris incurrentis. *Q. e. d.*

THEOREMA 116.

608. *Si corpus elaſticum minus in aliud majus quieſcens incurrit celeritate, quæ eſt ut maſſarum utriusque corporis ſumma; dat ei celeritatem, quæ eſt ut duplum ſui; ſed celeritatem amittit, quæ eſt ut duplum majoris.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi corpus m celeritate C in corpus majus M incurrit, corporis majoris M celeritas poſt conflictum $\frac{2\,mC}{M+m}$ & celeritas ipſius poſt eundem $\frac{mC - MC}{M+m}$ (§. 571). Eſt vero C ut $M + m$ *per hypoth.* Ergo celeritas majoris ut $2m$ ſeu duplum minoris; minoris vero ſive incurrentis ut $m - M$. Differentia vero inter $M + m$ & $m - M$ eſt 2 M. Celeritas igitur in ictu amiſſa eſt ut duplum corporis M. *Q. e. d.*

THEOREMA 117.

609. *Si corpus elaſticum minus in aliud majus quieſcens incurrit, poſt conflictum ſemper reſilit eique celeritatem ſua minorem dat.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi corpus m celeritate C incurrat in majus M; erit celeritas majoris M poſt conflictum $\frac{2mC}{M+m}$, minoris vero ſeu incurrentis $\frac{mC-MC}{M+m}$ (§. 571). Nimirum in formula generali literæ M & m permutantur, quia ibi M percutiens, hic vero m percutiens eſt. Jam vero celeritas incurrentis ante conflictum $C=\frac{MC+mC}{M+m}$. Quare ſi ponamus $M=m+n$ (§. 20. *Arithm.*): erit celeritas minoris ante conflictum $=\frac{2mC+nC}{2m+n}$, majoris vero poſt eundem $\frac{2mC}{2m+n}$. Eſt igitur majori acquiſita minor dupla celeritate incurrentis (§. *cit.*) *Quod erat unum.*

Jam cum ſit $M=m+n$, erit celeritas minoris poſt conflictum $\frac{mC-mC-nC}{2m+n}=\frac{-nC}{2m+n}$, adeoque negativa. Poſt conflictum itaque tendit in plagam contrariam ei, in quam ante eundem movebatur (§. 571.). Corpus igitur minus m ſemper reſilit poſt conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 118.

610. *Si corpus elaſticum minus in aliud quieſcens incurrit, celeritas utriusque poſt conflictum ſimul æquatur celeritati incurrentis ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi corpus m celeritate C incurrit in majus M atque $M=m+n$; erit celeritas majoris poſt conflictum $=\frac{2mC}{2m+n}$; minoris vero non habita ratione directionis $=\frac{nC}{2m+n}$: quemadmodum ex demonſtratione propoſitionis præcedentis intelligitur. Summa igitur celeritatum poſt conflictum eſt $\frac{2mC+nC}{2m+n}=C$. *Q. e. d.*

THEOREMA 119.

611. *Si corpus elaſticum unum* A *incurrat in duo elaſtica* B *&* C, *quorum* B *ſit majus quam* A *&* C *viciſſim majus quam* B, *atque corpus* C *mediante altero* B *percutit: majorem corpori* C *celeritatem dat, quam ſi idem immediate ſeu corpore* B *non interveniente percuteret.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sint maſſæ corporum A, B & C = M, nM, & niM, celeritas incurrentis = C. Cum ſit ut ſumma maſſarum ad duplam maſſam incurrentis ita celeritas percutientis ad celeritatem percuſſi (§. 574); erit $M + nM : 2M = C : \frac{2MC}{M+nM}$, quæ eſt celeritas corpori B acquiſita. Quodſi jam hac celeritate corpus B in C impingat, ſeu idem urgeat; erit $nM + niM : 2nM = \frac{2MC}{M+nM} : \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)}$ quæ eſt celeritas corpori C interventu corporis B acquiſita. Si corpus A immediate percuteret corpus C; foret $M + niM : 2M = C : \frac{2MC}{M+niM}$, quæ eſt celeritas corpori C acquirenda, ſi corpus A immediate ſeu absque interventu corporis B idem percuteret. Eſt adeo celeritas mediata corporis C ad immediatam $= \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{2MC}{M+niM} = \frac{2nM}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{1}{M+niM} = 2nM^2 + 2n^2iM^2 : nM^2 + niM^2 + n^2M^2 + n^2iM^2 = 2n + 2n^2i : n + ni + n^2 + n^2i$. Eſt vero $n + n^2i = n(1 + ni) > ni + n^2 = n(i + n)$, quia $ni > i + n$, adeoque $2n + 2n^2i > n + n^2 + n^2i + ni$ (§. 90. *Arithm.*). Patet igitur celeritatem corporis C interventu alterius B a corpore A percuſſi eſſe majorem ea, quam acciperet ſi a corpore A immediate percuteretur.

E. gr. Sit maſſa corporis A = 1, alterius B = 2, tertii C = 3, erit celeritas corporis C mediante corpore B acquiſita ad eam, quam immediate ex ictu a corpore A acquireret, (ob $n = 2$ & $i = 3$), ut $4 + 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 28 : 24 = 7 : 6$. Eſt igitur celeritas mediata major immediata. Sit ſimiliter $M = 2$, $n = 3$, $i = 5$; erit $ni = 15$, $n^2i = 45$, adeoque celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 6 + 90 : 3 + 15 + 9 + 45 = 96 : 72 = 4 : 3$. Eſt igitur denuo celeritas mediata major immediata.

THEOREMA 120.

612. *Si corpus elaſticum unum A in aliud ſegnius motum, ſed majus B incurrat, & hoc celeritate per conflictum modificata percutiat corpus C quieſcens, ſed ſe itidem majus; corpus C majore celeritate feretur, quam ſi immediate a corpore A percuteretur.*

DEMONSTRATIO.

Sit maſſa corporis A = M, maſſa ſecundi B = nM & tertii C = niM,

 cele-

celeritas corporis A = C, corporis B vero = lC. Incurrat jam corpus A in corpus B; erit celeritas corporis B $= \frac{2MC + nlMC - lMC}{M + nM}$ (§. 571). Quodſi idem corpus A in tertium C quieſcens incurreret, foret hujus celeritas $= \frac{2MC}{M + niM}$. Incurrat jam corpus B celeritate per conflictum cum corpore A modificata in quieſcens C; erit celeritas corporis C $= \frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M + nM)(nM + niM)}$ (§. cit.). Eſt igitur celeritas mediata corporis C ad celeritatem immediatam $= \frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{2MC}{M + niM} = \frac{2nM + 2n^2lM - nlM}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{1}{M + niM} = (2n + 2n^2l - nl)(1 + ni) : (1 + n)(n + ni) = 2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il : n + ni + n^2 + n^2i$. Eſt vero $n + n^2i > n^2 + ni$, adeoque $2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il > n + ni + n^2 + n^2i$. Quamobrem celeritas mediata major eſt immediata.

E. gr. Sit maſſa corporis A = 1, alterius B = 2, tertii C = 3, adeoque $n = 2$, $i = 3$. Sit porro $l = 2$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $4 + 16 - 4 + 24 + 96 - 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 112 : 24 = 14 : 3$. Eſt itaque celeritas mediata major immediata.

Sint omnia ut ante, ſed $l = \frac{1}{2}$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 4 + 4 - 1 + 24 + 48 - 12 : 2 + 6 + 4 + 12 = 67 : 24$. Eſt adeo celeritas mediata denuo major immediata.

PROBLEMA 103.

613. *Invenire corpus B interponendum inter duo alia corpora A & C, ut corpus C quieſcens a corpore A data celeritate moto percuſſum maximam acquirat celeritatem, quam ex percuſſione iſtiuſmodi habere poteſt.*

RESOLUTIO.

Sit celeritas, qua corpus A movetur = V. Incurrat A in B quieſcens; erit hujus celeritas poſt conflictum $= \frac{2AV}{A + B}$ (§. 571). Incurrat jam corpus B celeritate hac acquiſita in tertium C quieſcens; erit corporis C celeritas poſt conflictum $= \frac{4ABV}{AB + B^2 + AC + BC}$ (§. cit.). Quoniam celeritas hæc maxima eſt, quam corpus C ex iſtiuſmodi percuſſione acquirere valet per

per hypoth. erit differentiale ejus nihilo æquale (§. 63. *Anal. infin.*). Jam cum A, C & V ſint quantitates conſtantes, B vero ſola ſit variabilis, facta differentiatione (§. 19. *Analyſ. infin.*) reperitur

$$(4A^2VB\,dB + 4AB^2V\,dB + 4A^2CV\,dB + 4ABCV\,dB - 4A^2CV\,dB - 8AB^2V\,dB - 4ACBV\,dB) : (AB + B^2 + AC + BC)^2 = 0,$$

hoc eſt,

$$\frac{4A^2CV\,dB - 4AB^2V\,dB = 0}{}$$

$$\frac{AC - B^2 = 0}{}$$

$$AC = B^2$$

Unde prodit $A : B = B : C$ (§. 301. *Arithm.*).

Theorema. Si corpus B, cujus interventu aliud C quieſcens a corpore A quacunque celeritate percutitur, fuerit medium proportionale inter percutiens & percuſſum, celeritatem ei dabit maximam, quam interventu cujusdam corporis ei communicare valet.

COROLLARIUM.

614. Quodſi ergo ſeries fuerit corporum in continua proportione creſcentium, ultimum acquiret celeritatem maximam, quam a priori ex percuſſione tot corporum interventu acquirere valet, quæ continuo creſcunt.

SCHOLION.

615. *Hoc pacto corporibus per conflictum celeritatem communicari poſſe, quæ fidem omnem ſuperare videtur, calculus probat & Hugenius (x) exemplo illuſtri docuit. Idem valet ſi corpora continuo decreſcant.*

PROBLEMA 104.

616. *Determinare motum corporum A & B oblique impingentium, ſive elaſticorum, ſive elateris expertium poſt conflictum.*

RESOLUTIO.

Motus corporis A per AC reſolvitur in duos alios ſecundum AE & AD & motus corporis B per BC ſimiliter in duos alios ſecundum BF & BG (§. 245) ſuntque celeritates per AD & BF ad celeritates per AC & BC ut ipſæ rectæ AD, BF, AC, BC (§. 247). Jam cum rectæ AE & BG ſint parallelæ, vires ſecundum has directiones agentes ſibi mutuo non opponuntur, adeoque in conflictu inſuper habendæ. Sed cum lineæ AD & BF, ſeu quod perinde eſt, EC & GC eandem rectam ad DC perpendicularem conſtituant, perinde eſt ac ſi corpora A & B ſolis velocitatibus, quæ ſunt ut EC & GC,

Tab. IV. Fig. 55.

(x) de Motu corporum ex percuſſione prop. 13.

GC, directe ſibi mutuo occurrerent (§. 523.). Determinetur itaque celeritas corporum A & B juxta ſuperiora. Sit e. gr. corporis A reſilientis celeritas ut CH. Quoniam motus per AE in conflictu non mutatur, fiat CK = AE & compleatur parallelogrammum HCKI; diagonalis CI deſignabit motum corporis A poſt conflictum, movebitur nempe poſt ictum corpus A juxta directionem CI & celeritate ut CI (§. 241.). Eodem modo reperitur, corpus B reſiliens moveri per diagonalem parallelogrammi CM, in quo LM = BG. Sunt adeo celeritates poſt ictum ut CI ad CM. Quodſi poſt conflictum corpora A & B verſus eandem plagam tendant, utrumque parallelogrammum infra DC conſtruitur.

CAPUT XIII.
DE
VI CENTRIFUGA ET CENTRIPETA.

DEFINITIO 65.

617. *Vis centrifuga* eſt vis, qua mobile circa centrum aliquod revolutum ab eo recedere conatur.

Tab. V. Fig. 56. E. gr. Si corpus in peripheria circuli movetur, in quovis puncto A conatur progredi per tangentem AD (§. 71.) & ſi nihil obſtaret, actu progrederetur, adeoque eodem tempore, quo arculum AE deſcribit, a centro recederet quantitate rectæ DE ad AD perpendicularis per vim centrifugam (§. 245).

COROLLARIUM.

618. Eſt adeo vis centrifuga ut recta DE ad AD perpendicularis, ſi arcus AE infinite parvus (§. 245).

DEFINITIO 66.

619. *Vis centripeta* eſt vis, qua mobile per rectam AG progreſſurum retrahitur a motu rectilineo, ut in curva incedat.

COROLLARIUM 1.

620. Eſt itaque vis centripeta ut recta DE, ſi arculus AE infinite parvus.

COROLLARIUM 2.

621. Et hinc vis centripeta centrifugæ æqualis eſt (§. 618):

DEFINITIO 67.

622. *Vires centrales* communi nomi-

nomine dicuntur vis centrifuga atque centripeta.

THEOREMA 121.

Tab. V. Fig. 56. 623. *Si duo corpora pondere æqualia eodem vel æquali tempore motu æquabili peripherias circulorum inæqualium deſcribant, erunt vires centrales ut diametri* AB *&* HL.

DEMONSTRATIO.

Sit arculus AE infinite parvus, adeoque a ſubtenſa non differat. Quia peripheriæ eodem tempore deſcribuntur; ſi ex centro C ducatur radius CE, erit HK arculus eodem momento deſcriptus & ad peripheriam minorem ut alter AE ad majorem (§. 137. *Geom.*). Quodſi jam ducantur tangentes AD & HI atque ex punctis E & K ad illas perpendiculares ED & KI, ΔΔ ADE & HIK eodem modo determinantur (§. 119. *Geom.*) adeoque ſimilia ſunt (§. 120. *Geom.*), conſequenter AE : HK = DE : IK (§. 175. *Geom.*) Sunt vero ut DE ad IK ita vis centralis in circulo majore ad vim centralem in minore (§. 620). Ergo vires centrales ſunt ut arcus AE & HK (§. 167. *Arithm.*) conſequenter ut peripheriæ circulorum, quas percurrunt, per demonſtrata, adeoque & ut diametri eorundem (§. 412. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

624. Quodſi ergo vires centrales duorum corporum peripherias circulorum inæqualium deſcribentium fuerint ut diametri, temporibus æqualibus easdem percurrunt.

THEOREMA 122.

625. *Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis eſt ut arcus infinite parvi* AE *quadratum per diametrum* AB *diviſum.* Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Demittatur perpendicularis EM: erit in rectangulo ADEM AM = DE. Quoniam arcus infinite parvus AE a ſubtenſa non differt; erit BA : AE = AE : AM (§. 330. *Geom.*). Eſt ergo AM = DE = AE^2 : BA (§. 301. *Arithm.*) Quare cum vis centralis ſit ut DE (620); erit eadem ut AE^2 : BA. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

626. Cum ergo corpus motu æquabili tempuſculis æqualibus arculos æquales AE deſcribat (§. 31); vis centralis, qua corpus in peripheria circuli urgetur, conſtanter eadem eſt.

THEOREMA 123.

627. *Si duo corpora diverſas pe-* Tab. V. Fig. 56.

peripherias motu æquabili deſcribant, vires centrales ſunt in ratione compoſita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut AE^2 : AB ad HK^2 : HL (§. 625), adeoque ut AE^2. HL ad HK^2. AB (178. *Anal. finit.*). Sed cum arcus AE & HK eodem tempore deſcribantur, *per hypoth.* erunt iidem ut celeritates (§. 33). Sunt itaque vires centrales in ratione compoſita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

628. Si celeritates fuerint æquales; erunt vires centrales reciproce ut diametri AB & HL (§. 281. *Arithm.*)

COROLLARIUM 2.

629. Si diametri AB & HL fuerint æquales, hoc eſt, ſi utrumque mobile in eadem peripheria, ſed diſpari celeritate, incedat; erunt vires centrales in ratione duplicata celeritatum (§. *cit. Arithm.*).

THEOREMA 124.

630. *Si duorum mobilium in diverſis peripheriis incedentium vires centrales fuerint æquales; erunt diametri circulorum* AB *&* HL *in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires enim centrales in eodem inſtanti ſunt $AE^2 : AB$ & $HK^2 : HL$ (§. 625). Quare $AE^2 : AB = HK^2 : HL$ *per hypoth.* conſequenter $AE^2 : HK^2 = AB : HL$ (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

LEMMA 2.

631. *Quantitatum proportionalium radices ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim $a : ma = b : mb$ *per hypoth.* Quoniam $\sqrt{ma} = \sqrt{a}.\ \sqrt{m}$ & $\sqrt{mb} = \sqrt{b}.\ \sqrt{m}$; erit utique $\sqrt{a} : \sqrt{ma} = \sqrt{b} : \sqrt{mb}$ (§. 149. *Arithm.*) *Q. e. d.*

LEMMA 3.

632. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales ſintque totidem aliæ inter ſe quoque proportionales, ſi poſteriores ſingulas per ſingulas priores dividas vel contra; quoti quoque proportionales erunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a : ma = b : mb$ & $c : nc = d : nd$ *per hypoth.* Quodſi a per c, ma per nc, b per d, mb per nd dividas; prodibunt $\frac{a}{c}$, $\frac{ma}{nc}$, $\frac{b}{d}$ & $\frac{mb}{nd}$.

Jam cum ſit $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{n}{m}$ & $\frac{b}{d}$

$: mb$

$: \frac{mb}{nd} = \frac{nbd}{mbd} = \frac{n}{m}$; erit utique $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$. Eodem modo patet, eſſe $\frac{c}{a} : \frac{nc}{ma} = \frac{d}{b} : \frac{nd}{mb}$. *Q. e. d.*

THEOREMA 125.

Tab. V. Fig. 56. 633. *Si duo corpora in peripheriis inæquabilibus eadem vi centrali urgentur, tempus in majori eſt ad tempus in minori in ratione ſubduplicata diametri majoris* AB *ad minorem* HL.

DEMONSTRATIO.

Sit AB = D, HL = d, celeritas in majori peripheria = C, in minori = c, peripheria major = P, minor = p, tempus per illam = T, per hanc = t; erit $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630), adeoque $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 631). Eſt vero $P : p = D : d$ (§. 412. *Geom*). Ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 632). Sed $\frac{P}{C}$ & $\frac{p}{c}$ ſunt tempora, quibus peripheriæ vel etiam arcus ſimiles, qui peripheriarum rationem habent (§. 170. *Arithm.*), deſcribuntur (§. 39). Ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

634. Eſt igitur $T^2 : t^2 = D : d$, (§. 160. *Arithm.*) hoc eſt, diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, ſunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 2.

635. Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630) & $T^2 : t^2 = D : d$ (§. 634) erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$ (§. 167. *Arithm.*), conſequenter $T : t = C : c$ (§. 631), hoc eſt, tempora, quibus peripheriæ aut arcus ſimiles percurruntur a mobilibus eadem vi centrali impulſis, celeritatum rationem habent.

THEOREMA 126.

636. *Vires centrales ſunt in ratione compoſita ex directa diametrorum & reciproca quadratorum temporum per integras peripherias.*

DEMONSTRATIO.

Sint vires V & v, reliqua ut in demonſtratione præcedente: erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C = D : T$ & $c = d : t$ (§. 38). conſequenter $C^2 : c^2 = \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$ (§. 260. *Arithm.*), adeoque $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$

$= \frac{D^2}{DT^2} : \frac{dt}{dt^2}$ (185. *Arithm.*) $= \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§.231. *Arithm.*). Eſt igitur $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 167. *Arithm.*). $= Dt^2 : d\,T^2$ (178. *Arithm.* *Q. e. d.*

THEOREMA 127.

637. *Si tempora, quibus in peripheriis integris aut arcubus ſimilibus mobilia feruntur, ſunt ut diametri circulorum, vires centrales ſunt reciproce ut eædem diametri.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $T : t = D : d$, *per hypoth.* & $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§.636); erit etiam $V : v = \frac{D}{D^2} : \frac{d}{d^2} = \frac{1}{D} : \frac{1}{d} = d : D$ (§. 178. *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

638. Quoniam $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§.627); erit $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = d : D$ (§. 167. *Arithm.*), conſequenter $C^2 : c^2 = Dd : Dd$ (§. 185. *Arithm.*). Sunt itaque celeritates hoc in caſu æquales.

THEOREMA 128.

639. *Si corpus quoddam in peripheria circuli motu uniformi incedat, ea quidem celeritate, quæ acquiritur per altitudinem* AL *cadendo; erit vis centralis ad gravitatem ejus ut dupla altitudo* AL *ad radium* CA. Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Eo tempore, quo grave cadit per AL, motu uniformi deſcriberet 2AL, nempe celeritate, quam cadendo per AL acquiſivit & qua per AE movetur (§.92). Eſt igitur tempus per AE ad tempus per AL ut AE ad 2AL (§. 32), & hinc reperitur ſpatium eodem tempore a gravi cadente percurſum, quo percurritur AE, $= AL$. $AE^2 : 4AL^2 = AE^2 : 4AL$ (§.86). Eſt vero vis centralis ad gravitatem in eodem corpore in ratione celeritatum, quas vires iſtæ producunt (§.280) adeoque ſpatiorum eodem tempore motu æquabili deſcriptorum (§. 33). Quare cum ſpatium eo inſtanti, quo vi gravitatis conficitur $AE^2 : 4AL$, ſit $AE^2 : BA$ (§.625); erit vis centralis ad gravitatem ejus ut $AE^2 : BA$ ad $AE^2 : 4AL$, hoc eſt, ut 4AL ad BA, ſeu 2AL ad CA (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

640. Quodſi adeo gravitas corporis

ris dicatur G; erit vis centrifuga 2 AL. G : CA.

THEOREMA 129.

641. *Si grave in peripheria circuli æquabili motu feratur ea quidem celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem* AL *dimidio radio æqualem; vis centralis erit gravitati æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Vis centralis eſt 2 AL. G : CA (§. 640). Quare ſi AL $= \frac{1}{2}$ CA; eadem erit CA. G : CA = G. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

642. Ergo ſi gravitati vis centralis æqualis eſt, ea celeritate in peripheria circuli fertur, quam cadendo per altitudinem radio dimidio æqualem acquirit.

THEOREMA 130.

643. *Si vis centralis gravitati æqualis eſt, tempus per peripheriam integram eſt ad tempus deſcenſus per dimidium radium ut peripheria ad radium.*

DEMONSTRATIO.

Spatium motu uniformi cum ea celeritate percurſum, quæ cadendo per $\frac{1}{2}$ CA acquiritur, eſt in tempore æquali = CA (§. 92). Quare cum peripheria circuli eadem celeritate uniformiter percurratur (§. 642); erit tempus per peripheriam ad tempus deſcenſus per dimidium radium ut peripheria ad radium CA (§. 32). *Q. e. d.*

THEOREMA 131.

644. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritate inæquali incedant, quæ ſit reciproce in ratione ſubduplicata diametrorum: vires centrales ſunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro virium reciproce ſumtarum.*

DEMONSTRATIO.

Si celeritates fuerint C & c, diametri D & d, vires V & v; erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d : D$ (§. 260. *Arithm.*). Ergo $V : v = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§. 178. *Arithm.*) $= \frac{1}{4} d^2$ ad $\frac{1}{4} D^2$ (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, reciproce ſunt ut quadrata radiorum ſeu diſtantiarum. *Q. e. d.*

THEOREMA 132.

645. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritatibus incedunt, quæ ſunt reciproce ut diametri; erunt vires centrales reciproce ut cubi diſtantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

$V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = d : D$ *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d^2 : D^2$ (§. 260. *Arithm.*) Ergo $V : v = \frac{d^2}{D} : \frac{D^2}{d} = d^3 : D^3$ (§. 178. *Arithm.*) $= \frac{1}{8} d^3 : \frac{1}{8} D^3$ (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, vires centrales reciproce ſunt ut cubi radiorum ſeu diſtantiarum a centro virium. *Q. e. d.*

THEOREMA 133.

646. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus latorum celeritates fuerint reciproce in ratione ſubduplicata diametrorum; tempora duplicata, quibus integras peripherias aut arcus ſimiles percurrunt, ſunt in ratione triplicata diſtantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

Sint tempora T & t; celeritates C & c, diametri D & d. Cum tam peripheriæ (§. 412. *Geom.*) quam arcus ſimiles (§. 170. *Arithm.*) diametrorum rationem habeant; erit $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 38). Eſt vero $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* Ergo $T : t = \frac{D}{\sqrt{d}} : \frac{d}{\sqrt{D}} = D\sqrt{D} : d\sqrt{d}$ (§. 124 *Analyſ. finit.*) $= \sqrt{D^3} : \sqrt{d^3}$ (§. 65. *Analyſ. finit.*), conſequenter $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$ (§. 260. *Arithm*). $= \frac{1}{8} D^3 : \frac{1}{8} d^3$ (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

647. Ergo ſi vires centrales ſunt in reciproca ratione diſtantiarum a centro ſubduplicata temporum quadrata, quibus peripheriæ integræ aut arcus ſimiles percurruntur, ſunt in triplicata earundem diſtantiarum (§. 289).

THEOREMA 134.

648. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus incedentium celeritates fuerint ut diametri reciproce, tempora ſunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro.*

DEMONSTRATIO.

Quia $C : c = d : D$, *per hypoth.* & peripheriæ (§. 412. *Geom.*) atque arcus ſimiles (§. 171. *Arithm.*) ſunt ut radii, adeoque $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 39); erit $T : t = \frac{D}{d} : \frac{d}{D} = D^2 : d^2$ (§. 124. *Analyſ. finit.*) $= \frac{1}{4} D^2 : \frac{1}{4} d^2$ (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, tempora ſunt in ratione duplicata radiorum ſeu diſtantiarum a centro. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

649. Si ergo vires centrales ſunt reciproce ut cubi diſtantiarum a centro virium,

rium, tempora, quibus integræ peripheriæ aut arcus ſimiles percurruntur, ſunt ut quadrata earundem (§.645).

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 56. 650. *Quodſi ſupponamus vim centripetam urgere corpus verſus centrum* C, *ut pro effectu ejus ſumatur portio ſecantis* EG; *omnia manent ut ante, propterea quod in caſu infinite parvi* EG & DE *pro æqualibus haberi poſſint, atque adeo eadem in utroque caſu eruatur menſura vis centralis. Nimirum cum* CA (§.308. Geom.) & DE per hypoth. *ſint perpendiculares ad* AG; *erunt inter ſe parallelæ* (§.256. Geom.), *adeoque angulus* GED = ECM (§.233. Geom.). *Quare cum etiam recti ad* D & M *ſint æquales* (§.145. Geom.); *erit* GE : ED = EC : CM (§.267. Geom.). *Quoniam ſagitta* AM *infinite parva* per hypoth. CM & CA *æquales habentur* (§.4. Analyſ. infin.). *Ergo etiam* CM = CE (§.40. Geom. & §.87. Arithm.). *Eſt igitur etiam* GE = DE (§.149. Arithm.). *Quod vero ſit etiam* EG *ut* AE^2 : AB, *quemadmodum ſupra oſtendimus eſſe* ED (§.627), *ita evincitur.* AG^2 = NG. EG (§.379. Geom.), *hoc eſt, quia in caſu arcus* AE *infinite parvi* NG = NE (§.4. Analyſ. infinit.), NE. EG = AB. EG = AG^2, *ſeu, quia arcus infinite parvus* AE *a portiuncula tangentis* AD *aſſignabiliter non differt*, AB. EG = AE^2. *Unde prodit* EG = AE^2 : AB, *aut quod perinde eſt, vis centrifuga eſt ut quadratum arcus infinite parvi per diametrum diviſum.*

THEOREMA 135.

651. *Si corpus in linea curva verſus easdem partes cava ea lege incedat, ut radius* CB *ex ipſo in punctum fixum* C, *quod in eodem plano ſitum eſt, ductus areas* BAC, BCE, *&c. deſcribat temporibus proportionales, ſeu dato tempore æquales: a vi centripeta verſus punctum* C *urgetur.* Tab. V. Fig. 57.

DEMONSTRATIO.

Progrediatur corpus ſola vi inſita per rectam ſeu arcum infinite parvum AB dato minimo quovis inſtanti: momento itaque altero ab eadem promoveretur per BD ipſi AB æqualem (§.31) & in directum ſitam (§.72). Sed per vim centripetam à DB retrahitur & per arculum BE incedere cogitur eſtque △ CAB = △ BEC, *per hypoth.* & ducta recta CD, ob AB = DB, *per demonſtrata*, △ CDB = CBA (§.385. *Geom.*). Ergo △ CDB = △ CEB (§.87. *Arithm.*), conſequenter perpendicula ex E & D in BC demiſſa æqualia ſunt (§.385. *Geom.*) & hinc DE ipſi FB parallela (§.226. *Geom.*) Cum adeo vires, quibus urgetur mobile per diagonalem BE parallelogrammi DEFB, agant juxta directiones BD & BF (§.241), vis centripeta in B ten-

tendit ad punctum C. Idem cum eodem modo in quovis alio elemento curvæ demonſtretur, patet vim ceutripetam a motu rectilineo verſus C retrahere mobile. *Q.e.d.*

THEOREMA 136.

Tab. V. Fig. 57. 652. *Si corpus ſecundum directionem rectæ* AD *progrediatur & una a vi centripeta ad punctum fixum* C *in eodem plano ſitum urgeatur; curvam deſcribit verſus* C *cavam, cujus areæ quæcunque duobus radiis* AC *&* CB *comprehenſæ ſunt temporibus, quibus deſcribuntur, proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim inſita vel impreſſa eum agat juxta BD & centripeta juxta BF ſeu BC, *per hypoth.* viribus conjunctis deſcribitur diagonalis BE parallelogrammi DEFB (§. 241). Quoniam itaque quovis inſtanti directio mobilis a vi centripeta mutatur, curva deſcribitur, eaque verſus C cava, quia quælibet particula curvæ BE a proxima AB verſus centrum C declinat. *Quod erat unum.*

Sunt vero ob AB=DB *per hypoth.* ΔΔ ABC & BCD æqualia (§. 385. *Geom.*) & ob ED & BC parallelas (§. 241) ΔΔ BCD & BCE itidem æqualia ſunt (§. 385. *Geom.*), conſequenter ABC = BCE. Quod cum eodem modo demonſtretur de triangulis quotcunque aliis æqualibus tempuſculis deſcriptis; patet, areas rectis ex centro C ductis interceptas temporibus, quibus deſcribuntur, æquales eſſe. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 137.

653. *Si mobile in linea curva incedens vi centripeta verſus centrum immobile urgetur, celeritas ejus eſt reciproce ut perpendiculum a centro illo in tangentem Curvæ demiſſum.* Tab. V. Fig. 57.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim temporibus æqualibus deſcribuntur portiunculæ curvæ infinite parvæ AB, BE & intempuſculis infinite parvis motus æquabilis; erunt celeritates in A & B ut AB ad BE (§. 33), hoc eſt, ut baſes triangulorum ACB & BCE. Sunt vero triangula iſta æqualia *per hypoth.* adeoque baſes AB & BE reciproce ut eorum altitudines (§. 393. *Geom.*), hoc eſt, reciproce ut perpendicula ex centro C in baſes AB & BE continuatas, quæ ſunt tangentes curvæ in punctis A & B (§. 20. *Analyſ. inf.*), demiſſa (§. 227. *Geom.*). Ergo celeritates in punctis A & B ſunt reciproce ut per-

perpendicula ex centro C in tangentes demiſſa (*§.* 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

DEFINITIO 68.

Tab. XVI. Fig. 161. 654. *Centrum virium* diximus punctum O, ad quod mobile in linea curva revolutum a vi centripeta continuo urgetur. Curva vero, in qua mobile incedit, dicitur *Orbis* vel *Orbitas* item *Trajectoria*.

DEFINITIO 69.

655. *Radius vector* eſt recta MO ex centro virium O in punctum quodlibet curvæ M ducta, in quo mobile hærere ſupponitur.

COROLLARIUM.

656. Eſt adeo radius vector diſtantia mobilis a centro virium (§. 192. *Geom.*)

THEOREMA 138.

657. *In omni curva vis centralis eſt in ratione compoſita ex directa radii vectoris & reciproca radii oſculi ſimplici atque triplicata perpendiculi ex centro virium in tangentem orbis demiſſi.*

DEMONSTRATIO.

Tangat PN curvam in puncto M, ſitque O centrum virium, OM radius vector & CM radius oſculi. Ducatur ex O perpendicularis OP ad tangentem PN: ducantur etiam radius vector ON radio alteri MO & radius oſculi CR alteri CM infinite propinquus: arcus curvæ M*m* haberi poteſt pro arcu circuli radio CM deſcripti (*§.* 313. 314. *Analyſ. infin.*). Vis centripeta agens verſus centrum circuli erit ut *m*R, quæ vero agit verſus centrum virium Orbis O ut *m*N. Quoniam radius oſculi CM ad tangentem perpendicularis (§. 317. *Analyſ. infin.*) & *m*RN = CMN + MCR = (§. 239. *Geom.* = CMN ob MCR infinite parvum = 0 (§. 3. *Analyſ. infin.*), angulus R recto æqualis, conſequenter etiam ipſi P (*§.* 145. *Geom.*). Jam PMO = MNO + MON = MNO ob MON infinite parvum = 0 (§. 239. *Geom.*). Ergo *m*R : *m*N = PO : MO (*§* 267. *Geom.*), hoc eſt, vis centripeta agens verſus centrum circuli oſculatoris C eſt ad vim centripetam verſus centrum virium O agentem ut PO ad MO *per demonſtrata*. Quodſi celeritas, qua arculus M*m* deſcribitur, fuerit = C; erit vis centripeta agens in centrum oſculi $C = C^2 : MC$ (§. 627). Eſt vero C reciproce ut PO, hoc eſt ut $\frac{1}{PO}$ (§. 653), adeoque vis centripeta agens in centrum oſculi $= \frac{1}{PO^2 . MC}$.

Qua-

Quare cum ſit *per demonſtrata* vis petens centrum oſculi ad vim, quæ centrum orbis petit, ut PO ad MO, reperitur tandem vis centripeta agens verſus centrum Orbis O $= \frac{MO}{PO^3.MC}$, atque adeo eſt in ratione compoſita ex directa radii vectoris MO, reciproca radii oſculi MC & reciproca triplicata perpendiculi ex centro Virium Orbis in tangentem demiſſi PO. *Q. e. d.*

THEOREMA 139.

658. *Si corpus in peripheria circuli revolvatur & vis centripeta idem urgeat verſus punctum fixum* O *in peripheria ſitum; erit ea in ratione quintuplicata reciproca radii vectoris* OM.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Fig. 162. Tangat PR circulum in puncto dato M & ex centro virium ducatur perpendicularis ad tangentem OP atque radius vector OM. Radius circuli MC erit quoque radius oſculi (§. 324. *Analyſ. infin.*). Jam cum CM (§. 308. *Geom.*) & OP *per hypoth.* ſint perpendiculares ad PR; erunt inter ſe parallelæ (§. 256. *Geom.*), conſequenter $o = x$ (§. 233. *Geom.*). Quare cum OPM ſit rectus *per conſtruct.* & MON itidem rectus (§. 317. *Geom.*); erit MN : MO = MO : OP, (§. 267. *Geom.*), adeoque OP $= \frac{MO^2}{MN}$, conſequenter $OP^3 = \frac{MO^6}{MN^3}$. Eſt vero vis centripeta in M $= \frac{MO}{OP^3.MC}$ (§. 657). Quare ſi pro OP^3 ſubſtituatur ejus valor $\frac{MO^6}{MN^3}$, prodibit vis centripeta $\frac{MO.\,MN^3}{MO^6.\,MC}$. Sunt vero MN & MC in omni puncto peripheriæ conſtantes, adeoque ubi tantummodo cum ratione virium centripetarum in diverſis punctis peripheriæ negotium fuerit, vis centripeta $\frac{MO}{MO^6}$ ſeu $\frac{1}{MO^5}$ (§. 178. 181. *Arithm.*), hoc eſt, in ratione quintuplicata radii vectoris reciproca. *Q. e. d.*

THEOREMA 140.

659. *Si corpus in peripheria circuli revolvitur & vis centripeta ad punctum quodcunque intra circulum datum* O *tendat; erit ea in ratione compoſita reciproca ex duplicata radii vectoris* OM *& triplicata chordæ* AM. Tab. XVI. Fig. 163.

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex centro virium O ad tangentem PR perpendicularis OP, itidem chorda BM, ſitque in C centrum circuli. Quoniam angulus P *per conſtruct.* & AMB (§. 317. *Geom.*) rectus eſt ac præterea $o = x$ (§. 323. *Geom.*); erit AB : AM = OM : OP (§. 267. *Geom.*) adeoque $OP = \frac{OM.AM}{AB}$, conſequenter $OP^3 = \frac{OM^3.AM^3}{AB^3}$. Eſt vero vis centripeta in M $= \frac{MO}{OP^3.BC}$ (§. 657. *Mech.* & §. 324. *Analyſ. infin.*) Quare eadem $= \frac{MO.AB^3}{AM^3.OM^3.BC}$, conſequenter cum AB & BC conſtantes ſint, ſeu in omni puncto curvæ eædem, vis centripeta $= \frac{1}{AM^3.OM^2}$ (§. 178. 181. *Arithm.*), hoc eſt, in ratione compoſita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM. *Q. e. d.*

THEOREMA 141.

Tab. XVI. Fig 163. 660. *In omni ſectione conica vis centripeta tendens ad focum curvæ eſt reciproce in ratione duplicata radii vectoris, ſeu diſtantiæ a foco.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMN ſectio conica quæcunque, parabola, ellipſis vel hyperbola. Sit focus in O & in eo centrum virium. Tangat TM ſectionem conicam in M. Ducatur radius vector OM & ex O perpendicularis ad tangentem OP. Ducatur præterea MH ad curvam normalis & ex H perpendicularis HR ad radium vectorem OM; erit ob OP & MH parallelas (§. 256. *Geom.*) $o = x$ (§. 233. *Geom.*), adeoque ob rectos ad P & R *per conſtruct.* MO : OP = MH : MR (§. 267. *Geom.*), conſequenter $OP = \frac{MO.MR}{MH}$. Eſt vero MR æqualis ſemiparametro (§. 418. 438. 504. *Analyſ. finit.*) adeoque $= \frac{1}{2}a$, ſi ea dicatur a. Ergo $OP = \frac{MO.\frac{1}{2}a}{MH}$ & ideo $OP^3 = \frac{MO^3.a^3}{8\,MH^3}$. Porro in omni ſectione conica radius oſculi $= \frac{4\,MH^3}{a^2}$ (§. 322. 325. 327. *Anal. infin.*) Quare cum vis centripeta ſit ut $\frac{MO}{PO^3.MC}$ ſubſtitutis valoribus PO^3 & radii oſculi MC reperi-

tur ea $\frac{8 MO.MH^3.a^2}{4MO^3.MH^3.a^3} = \frac{2}{MO^2 a}$, hoc eſt, ob 2 & a conſtantes quantitates in omni puncto curvæ, $= \frac{1}{MO^2}$ (§. 178. 181. *Arithm.*).

Vis igitur centripeta tendens ad focum ſectionis conicæ eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a foco ſeu radii vectoris. *Q. e. d.*

SCHOLION.

661. *Quoniam proprietas hæc ſectionibus conicis communis & ex communibus earum proprietatibus fluit; ideo conveniens eſt ut generaliter ex iisdem demonſtretur. Menſuram virium centripetarum ut* $\frac{MO}{PO^3.MC}$ *ſuperius demonſtratam* (§. 657) *invenit* Abrahamus de Moivre, *Geometra eximius. Quod vero eadem conveniat cum menſuris aliorum, quas quantitates infinite parva ingrediuntur, ſequente problemate oſtendere lubet.*

PROBLEMA 106.

662. *Invenire vim centripetam in qualibet curva.*

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 160. Sit O centrum virium, MO radius vector, MC radius oſculi, & OP ad tangentem PM perpendicularis. Deſcribatur ex centro virium O radio vectore MO arcus infinite parvus MK. Fiat MC $= n$, MO $= x$; erit mK $= dx$. Sit porro MK $= dz$ & arculus curvæ Mm $= ds$: tempus vero per arcum Mm $= dt$. Quoniam hoc eſt ut ſector OMK (§. 652); erit dt = MK. $\frac{1}{2}$ MO ſeu ob determinatam quantitatem $\frac{1}{2}$, ut MK. MO (§. 178. *Arithm.*), adeoque ut xdz. Porro cum ad P ſit rectus *per conſtr.* & K rectus (§. 38. *Analyſ. infin.*) & ob infinite parvum MO$m = 0$ (§. 3. *Analyſ. infin.*) PMO = MmK (§. 239. *Geom.*); erit

$$Mm : MK = MO : OP$$
$$ds : dz = x : \frac{xdz}{ds}$$

Eſt igitur $OP^3 = \frac{x^3dz^3}{ds^3}$ & hinc cum Vis centralis $\frac{MO}{OP^3.MC}$ (§. 657) erit ea

$$= x : \frac{nx^3dz^3}{ds^3}$$
$$= \frac{ds^3}{nx^2dz^3}$$

Eſt vero $dt = xdz$ *per demonſtr.* & hinc $dt^2 = x^2dz^2$

Quare Vis centralis $= \frac{ds^3}{ndzdt^2}$

Atque hic eſt character analyticus unus, quem dedit *Varignonius* (y).

Ali-

(y) in Comment. A. 1701. p. 28. edit. Bat.

Aliter.

Quoniam angulus CMR rectus (§.337. *Anal. infin.*); erit MR*m* ab eodem non differens niſi quantitate infinite parva MCR (§. 239. *Geom.*) itidem rectus (§. 4. *Analyſ. infin.* & §. 145. *Geom.*) & ex eadem ratione M*m*R etiam rectus. Quamobrem *m*R haberi poteſt pro arculo radio M*m* deſcripto ex centro M (§. 38. *Analyſ. infin.*). Cum adeo ſit M*m* = MR (§. 40. *Geom.*); erit RN differentia inter arcum M*m* & portionem tangentis MN ſeu differentia ſecunda arculi M*m*. Unde ſi M*m* = ds, ut ante, RN = dds. Sit porro ut ante MK = dz, MO = x, adeoque K*m* = dx: tempuſculum vero per arculum M*m* = dt. Cum M*m*K + K*m*C ſit rectus (§. 337. *Analyſ. infin.*). & RN*m* + R*m*N itidem rectus (§. 241. *Geom.*); ſit vero K*m*C = R*m*N (§. 156. *Geom.*); erit M*m*K = RN*m* (§. 91. *Arithm.*).

Eſt vero præterea NR*m* rectus *per demonſtr.* & MK*m* itidem rectus (§. 38. *Analyſ. infin.*). Quamobrem (§. 267. *Geom.*)

$$MK : Km = NR : mR$$
$$dz : dx = dds : \frac{ddsdx}{dz}$$

Porro cum CMR ſit rectus & M*m* rd RC perpendicularis *per demonſtr.* erit (§. 327. *Geom.*)

$$mR : mM = mM : mC$$
$$\frac{ddsdx}{dz} : ds = ds : \frac{ds^2dz}{dxdds}$$

Eſt itaque CM $= n = \frac{ds^2dz}{dxdds}$

Jam vis centralis ante reperta fuit $\frac{ds^3}{ndzdt^2}$. Quare ſi ſubſtituatur valor radii circuli oſculatoris n modo inventus; prodibit vis centralis $= \frac{ds^3dxdds}{ds^2dzdxdt^2} = \frac{dsdds}{dzdt^2}$. Atque hæc eſt formula altera, quam dedit *Varignonius* (z).

SCHOLION.

663. *Quodſi beneficio harum formularum vis centralis in circulo & ſectionibus conicis eruere volueris, quemadmodum ante factum eſt; multo difficilius idem fieri intelliges, quam in anterioribus a nobis factum eſt. Sufficit itaque oſtendiſſe, quomodo formula, qua nos uſi ſumus, in Varignonianas degeneret.*

PROBLEMA 107.

664. *Data lege virium centripetarum & conceſſis quadraturis, invenire trajectoriam, in qua mobile incedit.*

(z) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1700. p. 288.

RESOLUTIO.

Tab. XVII. Fig. 164. Sit in O centrum virium, AC trajectoria, AO ejus axis, AL arcus radio AO deſcriptus. Ducantur radii OL & Ol infinite propinqui & radiis OB ac Ob deſcribantur arcus EB & eb. Fiat denique AO$=a$, AL$=z$, OE$=x$; erit Ee=BN$=dx$, L$l=dz$ & ob ſectores ſimiles ObN ac OlL (§.138 & 412. Geom.).

$$OL : Ll = Ob : bN$$
$$a : dz = x : \frac{xdz}{a}$$

Sit celeritas, qua mobile fertur in B$=c$ & vis centralis$=v$. Quoniam maſſa mobilis eadem exiſtente ſive $=1$, elementum celeritatis dc, quod poſitivum vel negativum eſſe poteſt, prout celeritas vel augetur, vel minuitur, eſt ut elementum temporis in vim ſollicitantem ſive centralem ductum (§.113); tempus vero per BN ob motus in ſpatiolo infinite parvo æquabilitatem ut $\frac{dx}{c}$ (§.39); erit

$$-dc = \frac{vdx}{c}$$
$$-cdc = vdx$$
$$-\tfrac{1}{2}c^2 = \int vdx$$

hoc eſt, omiſſa quantitate conſtante $\frac{1}{2}$, cum hic tantummodo rationum habeatur ratio, (§.187. Arithm.) & addita conſtante homogenea ex lege integrationis (§.95. Analyſ. in fin.)

$$ab - c^2 = \int vdx$$
$$ab - \int vdx = c^2$$
$$\sqrt{(ab - \int vdx)} = c.$$

Quoniam motus per Bb in tempuſculo infinite parvo peractus æquabilis, erit ſpatium Bb $= cdt$ (§.34)

adeoque $Bb = dt\sqrt{(ab - \int vdx)}$

Sed $dt = BO.bN$ (§.651)

$$= \frac{x^2dz}{a}$$

Ergo $Bb = \frac{x^2dz(\sqrt{ab - \int vdx})}{a}$

$$Bb^2 = \frac{x^4dz^2(ab - \int vdx)}{a^2}$$

Jam $BN^2 = dx^2$

$$bN^2 = \frac{x^2dz^2}{a^2}$$

$$Bb^2 = dx^2 + \frac{x^2dz^2}{a^2}$$
$$= \frac{a^2dx^2 + x^2dz^2}{a^2}$$

Habe-

Habemus itaque

$$\frac{a^2dx^2+x^2dz^2}{a^2}=x^4dz^2\,(ab-\int vdx)$$

hoc eſt, ut obſervetur lex homogeneorum,

$$a^4c^2dx^2+a^2c^2x^2dz^2=x^4dz^2\,(ab-\int vdx)$$

$$a^4c^2dx^2=x^4dz^2\,(ab-\int vdx)-a^2c^2x^2dz^2$$

$$\frac{a^4c^2dx^2}{x^4\,(ab-\int vdx)-a^2c^2x^2}=dz^2$$

$$\frac{a^2cdx}{V(abx^4-x^4\int vdx-a^2c^2x^2)}=dz$$

$$z=\int(a^2cdx:V(abx^4-x^4\int vdx-a^2c^2x^2))$$

Hæc eſt æquatio generalis ad trajectoriam, in qua mobile data vi centrali v ad punctum O urgetur, & in qua c denotat quantitatem arbitrariam conſtantem ex lege homogeneorum aſſumendam.

SCHOLION.

665. *Æquationem hanc generalem ad trajectoriam invenit* Joannes Bernoulli *problema inverſum de trajectoriis, in quibus vires centrales ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum, ſoluturus ac inde caſum hunc ſpecialem non ſine artificio deduxit* (a): *majoris enim artis eſt ſolvere problema in caſu ſpeciali, quam generaliter. Ut vero ſolutionem noſtro more cum primis Matheſeos principiis perſpicue connectamus, problemata quædam per modum Lemmatum præmittenda ſunt.*

PROBLEMA 108.

666. *Invenire æquationem ad parabolam, abſciſſis a foco computatis.* Tab. XVI. Fig. 160.

RESOLUTIO.

Sit in Parabola QO $=x$, QM $=y$, parameter $=p$; erit AT $=\frac{1}{4}p$ (§. 396. *Analyſ. fin.*) adeoque AQ $=\frac{1}{4}p+x$, conſequenter $y^2=\frac{1}{4}p^2+px$ (§. 388. *Analyſ. fin.*). Q. e. i. & d.

PROBLEMA 109.

667. *Invenire æquationem ad Ellipſin abſciſſis a foco computatis.* Tab. XVII. Fig. 165.

RESOLUTIO.

Sit in F focus ellipſis & in C centrum. Fiat AB $=m$, parameter $=p$, CP $=x$: erit FA $=\frac{1}{2}m-V(\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{4}pm)$ (§. 427. *Analyſ. fin.*), adeoque

$$AP=\tfrac{1}{2}m-V(\tfrac{1}{4}m^2-\tfrac{1}{4}pm)-x$$
$$PB=\tfrac{1}{2}m+V(\tfrac{1}{4}m^2-\tfrac{1}{4}pm)+x.$$

$$AP.PB=\tfrac{1}{4}pm-2xV(\tfrac{1}{4}m^2-\tfrac{1}{4}pm)-x^2$$

 Jam

(a) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710. p. 691. & ſeqq.

Jam ex natura Ellipſeos (§.420. *Analyſ. fin.*)

$$y^2 : \tfrac{1}{4}pm - 2xV(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm) - x^2 = p : m$$

Ergo

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - \frac{2px}{m}V(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm) - \frac{px^2}{m}.$$ *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA 110.

Tab. XVI. Fig. 163. 668. *Invenire æquationem ad Hyperbolam abſciſſis a foco computatis.*

RESOLUTIO.

Sit focus hyperbolæ in O, centrum C, axis dimidius tranſverſus CA. Sit $2AC = m$, parameter $= p$, $OQ = x$, $QM = y$: erit $AP = V(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm) - \tfrac{1}{2}m$ (§.463. *Anal. fin.*), adeoque

$$AP = V(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm) - \tfrac{1}{2}m + x$$

$$AP + 2AC = V(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm) + \tfrac{1}{2}m + x.$$

$$AP(AP + 2AC) = \tfrac{1}{4}pm + 2xV(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm) + x^2$$

Quare cum ſit ex natura Hyperbolæ (§.459. *Analyſ. fin.*)

$$y^2 : \tfrac{1}{4}pm + 2xV(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm) + x^2 = p : m$$

erit

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + \frac{2px}{m}V(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm) + \frac{px^2}{m}$$

Q. e. i. & d.

PROBLEMA 111.

669. *Invenire trajectoriam, in qua mobile incedit, ſi vis centripeta, qua urgetur, fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris.* Tab. XVII. Fig. 165.

RESOLUTIO.

Quoniam in ſolutione generali radium vectorem diximus x, erit vis centralis $v = \frac{1}{x^2} = \frac{a^2g}{x^2}$, ſervata lege homogeneorum, ut commode valor in formula generali ſubſtitui poſſit. Cum itaque elementum arcus $Ll = dz$ (§.664) in caſu generali $=$

$$\frac{a^2c^2dx}{V(abx^4 - x^4\int vdx - a^2c^2x^2)}$$

erit idem in caſu ſpeciali

$$\frac{a^2c^2dx}{xV(abx^2 - x^2\int \frac{a^2gdx}{x^2} - a^2c^2)}$$

Sed $\int \frac{a^2gdx}{x^2} = \int a^2gx^{-2}dx - a^2gx^{-1}$

Quare $dz = \frac{a^2c^2dx}{xV(abx^2 + a^2gx - a^2c^2)}$

Cum dz ſive Ll ſit elementum arcus a forma ordinaria diſcedens, ut ad eam reducatur, fiat

$x =$

$$x = \frac{a^2}{y}$$

erit $dx = -\frac{a^2 dy}{y^2}$ $x^2 = \frac{a^4}{y^2}$

adeoque $dz = -a^4c^2dy : y^2$

$$\overline{\frac{a^2}{y}V\left(\frac{a^3b}{y^2} + \frac{a^4g}{y} - a^2c^2\right)}$$

$$= \frac{-a^4c^2dy}{a^2yV\left(\frac{a^3b}{y^2} + \frac{a^4g}{y} - a^2c^2\right)}$$

$$= \frac{-a^4c^2dy}{a^3V(a^3b + a^2gy - c^2y^2)}$$

$$= \frac{-ac^2dy}{V(a^3b + a^2gy - c^2y^2)}$$

Fiat porro $y = \frac{a^2g}{2c^2} - t$

erit $y^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^2gt}{c^2} + t^2$

adeoque $-c^2y^2 = -\frac{a^4g^2}{4c^2} + a^2gt - c^2t^2$

$$a^2gy = \frac{a^4g^2}{2c^2} - a^2gt$$

$$dy = -dt$$

Unde tandem habetur

$$dz = \frac{acdt}{V\left(a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} - c^2t^2\right)}$$

Fiat denique $a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} = c^2b^2$

erit $dz = \frac{acdt}{cV(b^2 - t^2)}$

$$\frac{dz}{a} = \frac{dt}{V(b^2 - t^2)}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{bdt}{V(b^2 - t^2)}$$

Habemus adeo elementum circuli $\frac{bdt}{V(b^2-t^2)}$, cujus radius b, ſinus rectus t (§. 153. *Anal. infin.*), per radium b diviſum & $\frac{dz}{a}$ eſt itidem elementum circuli Ll per radium LO diviſum vi denominationis in ſolutione generali (§. 664) facta. Jam dato radio datoque arcu, datur angulus (§. 57. *Geom.*), atque adeo ratio arcus ad radium, conſequenter arcus per radium diviſus (§. 129. *Arithm.*), exprimit angulum, nempe $\frac{dz}{a}$ angulum LOl, & $\int\frac{dz}{a}$ angulum AOL, pariterque $\frac{bdt}{bV(b^2-t^2)}$ angulum priori LOl & $\int\frac{bdt}{bV(b^2-t^2)}$ alium poſteriori AOL æqualem, cujus radius b, ſinus totus t. Unde jam fluit conſtructio curvæ ABC iſtiusmodi.

Radio

Radio $h = \sqrt{\left(\frac{a^3 b}{c^2} + \frac{a^4 g^2}{4c^4}\right)}$ deſcribatur Quadrans MKT ſumtoque arcu AL = z pro arbitrio ducatur recta OL ſecans quadrantem iſtum in K, erit arcus KM = $\int \frac{h\,dt}{\sqrt{(h^2-t^2)}}$ & KI = t.

Jam porro inveniri poteſt radius OB ſive OE. Quoniam enim

$$y = \frac{a^2 g}{2c^2} - t = \frac{a^2 g - 2c^2 t}{2c^2}$$

& $x = \frac{a^2}{y}$

erit $x = \frac{2a^2c^2}{a^2 g - 2c^2 t}$

$$= \frac{2c^2}{g - \frac{2c^2 t}{a^2}}$$

Eſt igitur $a : c = c : \frac{c^2}{a}$ & $a : t = \frac{c^2}{a} : \frac{c^2 t}{a^2}$, ac denique $g - \frac{2c^2 t}{a^2} : c = c : \frac{c^2}{g - 2c^2 t : a}$. Quodſi recta OB hoc modo inventa ex centro O deſcribatur arcus EB, interſecabit is radium O in B eritque punctum B in trajectoria quæſita.

PROBLEMA 112.

670. *Invenire æquationem ad trajectoriam, in qua vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro virium.* Tab. XVII. Fig. 167.

RESOLUTIO.

Sit $OQ = \frac{a^2 g}{2c^2}$ & $OP = t$; erit $PQ = \frac{a^2 g}{2c^2} - t = y$ (§. 669). Quoniam OB = $x = \frac{a^2}{y}$; ſi intra aſymptotos QG & QR deſcribatur hyperbola GNV, latere potentiæ exiſtente = a (§. 489. *Analyſ. finit.*) erit PN = z (§. 488. *Analyſ. finit.*). Fiat jam OF = , FB = y, reliqua ſint ut ante; erit (§. 268. *Geom.*):

$$OP : OS = OF : OB$$
$$t : h = x : \frac{hx}{t}$$

Sed OB = $\frac{2a^2c^2}{a^2 g - 2c^2 t}$ (§. 669).

Ergo $\frac{hx}{t} = \frac{2a^2c^2}{a^2 g - 2c^2 t}$

$$a^2 ghx - 2c^2 htx = 2a^2c^2 t$$

$$a^2 ghx = 2c^2 htx + 2a^2c^2 t$$

$$\frac{a^2 ghx}{2c^2 hx + 2a^2c^2} = t$$

Porro

Porro (*§. cit. Geom.*)

$$OP : PS = OF : FB$$
$$t : \sqrt{(b^2 - t^2)} = x : y$$
$$x\sqrt{(b^2 - t^2)} = ty$$
$$b^2x^2 - t^2x^2 = t^2y^2$$
$$b^2x^2 = t^2x^2 + t^2y^2$$
$$\frac{b^2x^2}{x^2 + y^2} = t^2$$

Eſt vero etiam *per demonſtrata*

$$t^2 = \frac{a^4g^2b^2x^2}{a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2}$$

Habemus igitur

$$\frac{b^2x^2}{x^2+y^2} = \frac{a^4g^2b^2x^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2}$$
$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{a^4g^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2}$$
$$4a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2 = a^4g^2x^2 + a^4g^2y^2$$
$$y^2 = \frac{4c^2b^2x^2}{a^4g^2} - x^2 + \frac{8c^4bx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2}$$

Quæ eſt æquatio ad Trajectoriam quæſitam. Cum ea ſit quadratica, erit ad ſectionem conicam. Habemus itaque

Theorema. Si corpus in trajectoria urgetur a vi centripeta, quæ eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro virium; erit trajectoria iſta aliqua ſectio conica.

Ut appareat, ad quamnam ſectionem conicam ſit æquatio; comparetur ea cum æquationibus ſingularum ſectionum conicarum, quas ante reperimus, abſciſsis a foco computatis. Quoniam pro Parabola, cujus parameter $= p$, (§.666).

$$y^2 = 4p^2 + px$$

Æquatio vero ad trajectoriam *per demonſtr.*

$$y^2 = \frac{4c^4b^2x^2}{a^4g^2} - x^2 + \frac{8c^4bx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2}$$

ob deficientem in Parabola ſecundum terminum erit

$$\frac{4c^4b^2}{a^4g^2} - 1 = 0$$
$$4c^4b^2 = a^4g^2$$
$$b^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4}$$
$$b = \frac{a^2g}{2c^2}$$

 Eſt

Eſt vero per conſtructionem $h = OT = OS$ & $\frac{a^2 g}{2c^2} = OQ$.

Trajectoria igitur parabola eſt, ſi $OT = OQ$.

In calculo ſumſimus

$$h = V\left(\frac{a^3 b}{c^2} + \frac{a^4 g^2}{4c^4}\right)$$

in caſu parabolæ

$$\frac{a^3 b}{c^2} = 0$$

adeoque $b = 0$

$$p = \frac{8c^4 h}{a^2 g^2} \qquad \frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$= \frac{8c^4 a^2 g}{2a^2 c^2 g^2} \qquad p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$= \frac{4c^2}{g} \qquad p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo parabolæ eſt tertia proportionalis ad g & $2c$.

Æquatio pro ellipſi abſciſſis a foco computatis eſt (§. 667),

$$y^2 = -\frac{px^2}{m} - \frac{2px}{m}V\left(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm\right) + \tfrac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad trajectoriam per demonſtrata

$$y^2 = \frac{4c^4 h^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 hx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Habemus itaque

$$\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo eadem, quæ in parabola.

Porro $-\frac{p}{m} = \frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2} - 1$

hoc eſt $1 - \frac{4c^2}{mg} = \frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2}$

$$a^4 g^2 - \frac{4a^4 c^2 g}{m} = 4c^4 h^2$$

$$h^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2}$$

$$h = V\left(\frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2}\right)$$

In Ellipſi adeo $\frac{a^2 g}{2c^2} > h$

hoc eſt, $OQ > OT$

Quod-

Quodſi ulterius deſideretur valor ipſius m, fiat

$$-\frac{2p}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$$

hoc eſt, $-\frac{8c^2}{mg}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g})} =$

$$-\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g})} = \frac{mc^2h}{a^2g}$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g} = \frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2}$$

$$\tfrac{1}{4}m - \frac{c^2}{g} = \frac{mc^4h^2}{a^4g^2}$$

$$a^4g^2m - 4a^4c^2g = 4mc^4h^2$$

$$a^4g^2m - 4mc^4h^2 = 4a^4c^2g$$

$$m = \frac{4a^4c^2g}{a^4g^2 - 4c^4h^2}$$

Æquatio pro hyperbola abciſſis a foco computatis eſt (§. 668).

$$y^2 = \frac{px^2}{m} + \frac{2px}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} + \tfrac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad trajectoriam eſt

$$y^2 = \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

$$\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{2c^2}{g}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Eadem ergo parameter in hyperbola, quæ in ceteris ſectionibus conicis.

$$\frac{p}{m} = \frac{4c^4h^2}{a^4g^2} - 1$$

hoc eſt $\frac{4c^2}{gm} = \frac{4c^4h^2 - a^4g^2}{a^4g^2}$

$$4a^4c^2g^2 = 4c^4h^2gm - a^4g^3m$$

$$4a^4c^2g^2 + a^4g^3m = 4c^4h^2gm$$

$$\frac{4a^4c^2g + a^4g^2m}{4c^4m} = h^2$$

$$\sqrt{(\frac{a^4g^2}{4c^2} + \frac{a^4g}{c^2m})} = h$$

Jam cum $QO = \frac{a^2g}{2c}$ & $TO = h$, ſitque $\frac{a^2g}{2c} < h$; erit $QO < TO$, quando trajectoria hyperbola.

Si ulterius deſideretur valor ipſius m, fiat

$$\frac{2p}{m}V\left(\tfrac{1}{4}m^2+\tfrac{1}{4}pm\right)=\frac{8c^4h}{a^2g^2}$$

hoc eſt, ob $p=\frac{4c^2}{g}$,

$$\frac{8c^2}{gm}V\left(\tfrac{1}{4}m^2+\tfrac{1}{4}pm\right)=\frac{8c^4h}{a^2g^2}$$

$$V\left(\tfrac{1}{4}m^2+\tfrac{1}{4}pm\right)=\frac{mc^2h}{a^2g}$$

$$\tfrac{1}{4}m^2+\tfrac{1}{4}pm=\frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2}$$

$$m+p=\frac{4mc^4h^2}{a^4g^2}$$

hoc eſt, $m+\frac{4c^2}{g}=\frac{4mc^4h^2}{a^4g^2}$

$$a^4g^2m+4a^4c^2g=4mc^4h^2$$

$$4a^4c^2g=4mc^4h^2-a^4g^2m$$

$$\frac{4a^4c^2g}{4c^4h^2-a^4g^2}=m$$

Quodſi datis m & p per literas aſſumtitias h, c, g & b harum valores deſiderentur per m & p, æquationum reductione facta facile determinantur.

Eſt enim $p=\frac{4c^2}{g}$ $\quad h=\frac{a^2g}{2c^2}$

$$g=\frac{4c^2}{p} \qquad c^2=\frac{a^2g}{2h}$$

$$c^2=\tfrac{1}{4}pg$$

$$\tfrac{1}{4}pg=\frac{a^2g}{2h}$$

$$p=\frac{2a^2}{h}$$

$$h=\frac{2a^2}{p}$$

Si ergo p datur & c pro arbitrio aſſumitur, cum in omni ſectione conica ſit $p=4c^2:g$, valor ipſius g omni ſectioni conicæ reſpondet. Aſt cum in parabola tantummodo ſit $h=a^2g:2c^2$; valor ipſius h per a & p determinatus parabolæ proprius. Unde ſi valores quantitatum g & h modo repertos ſubſtituas in æquatione ad trajectoriam, in æquationem ad parabolam abſciſſis a foco computatis eadem degenerat. Nimirum æquatio ad trajectoriam (§.670.)

$$y^2=\frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2}+\frac{8c^4hx}{a^2g^2}+\frac{4c^4}{g^2}-x^2$$

Porro

$$g=\frac{4c^2}{p} \qquad h=\frac{2a^2}{p}$$

$g^2=$

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \quad b^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Quare

$$\frac{4c^4b^2}{a^2g^2} = \frac{16a^4c^4p^2}{16a^4c^4p^2} = 1$$

Coëfficiens itaque ipſius $x^2 = 1 - 1 = 0$, atque adeo hic terminus in æquatione, quæ quæritur, deficit.

$$\frac{8c^4b}{a^2g^2} = \frac{16a^2c^4p^2}{16a^2c^4p} = p$$

$$\frac{4c^4}{g^2} = \frac{4c^4p^2}{16c^4} = \tfrac{1}{4}p^2$$

Unde prodit æquatio $y^2 = px + \frac{1}{4}p^2$, quæ eſt ad parabolam abſciſſis a foco computatis (§. 666).

Quodſi valor ipſius b in ellipſi vel hyperbola deſideretur, in æquationibus $b^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^4g}{mc^2}$ & $b^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} + \frac{a^4g}{mc^2}$ ſubſtituendus eſt valor ipſius g. Nimirum

$$g = \frac{4c^2}{p} \quad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo $b^2 = \frac{16a^4c^4}{4c^4p^2} \mp \frac{4a^4c^2}{mpc^2}$

$$= \frac{4a^4}{p^2} \mp \frac{4a^4}{mp}$$

$$= \frac{4a^4m \mp 4a^4p}{mp^2}$$

$$b = \frac{2a}{p} V(1 \mp \frac{p}{m})$$

Si denique valor ipſius b deſideretur, in æquatione $a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} = ab^2$ ſubſtituendus eſt valor ipſius g^2 & b^2.

In parabola

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \quad b^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Unde $a^3b + \frac{16a^4c^4}{4c^2p^2} = \frac{4a^4c^2}{p^2}$

h. e. $a^3b + \frac{4a^4c^2}{p^2} = \frac{4a^4c^2}{p^2}$.

$$a^3b = a$$

$$b = 0$$

Quemadmodum jam ſupra reperimus.

In Hyperbola

$$b^2 = \frac{4a^4m + 4a^4p}{mp^2} \quad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo $a^3b + \frac{16a^4c^4}{4c^2p^2} = \frac{4a^4mc^2 + 4a^4c^2p}{mp^2}$

$$a^3b = \frac{4a^4mc^2 + 4a^4pc^2}{mp^2} - \frac{4a^4c^2}{p^2}$$

$$= \frac{4a^4c^3}{mp}$$

$$b = \frac{4ac^3}{mp}$$

In ellipſi idem prodit valor, ſed negativus.

SCHOLION.

671. *A theoria virium centralium pendet ſolutio problematis de curva, in qua grave deſcendens eandem ubique premit vi ponderi abſoluto æquali: quod a* Johanne Bernoulli *propoſitum* (b) *ſolvit* Hoſpitalius (c). *Ejus igitur ſolutionem hic ſubnectere libet.*

PROBLEMA 113.

Tab. XVII. Fig. 168. 672. *Invenire curvam, in qua grave deſcendens motu naturaliter accelerato eandem in ſingulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis abſoluto, ſeu, ſi* MC *ſit radius evolutæ in puncto* M, *ut ubique filum* MC *eadem vi tendat.*

RESOLUTIO.

Sit AH axis curvæ, AB altitudo per quam cadendo acquirit celeritatem initialem, qua deſcenſum in curva inchoat: PM & *pm* ſint ordinatæ infinite propinquæ, MC radius evolutæ ad curvam BMK ex evolutione deſcriptam normalis (§. 317. *Analyſ. infin.*): Producatur PM in N & repræſentet MN pondus abſolutum corporis deſcendentis. Producatur itidem radius evolutæ CM indefinite & in eum ſic productum ex N demittatur perpendicularis NO; repræſentabit MO partem ponderis, quo premitur curva in puncto M ſeu planum, in quo eſt tangens curvæ in puncto M (§. 47. *Geom.*).

Enimvero filum CM non modo tenditur in M ab hac gravitatis parte, quod eſt ut MO, verum etiam a vi centrifuga, quam habet in arculo M*m* radio evolutæ MC deſcripto. Quamobrem aggregatum ex ea gravitatis parte & conatu centrifugo in M eſt æquale ponderi abſoluto *per hypoth.*

Sit jam conatus centrifugus $= V$, erit (§. 639).

$$MC : 2PM = MN : V$$

adeoque $V = \frac{2PM.\ MN}{MC}$, conſequenter

$$MN = \frac{2PM.MN}{MC} + MO$$

per demonſtr.

Sit igitur $MN = a$, quia MN pondus

(b) in Act. Erudit. Supplem. T. 2. p. 291.
(c) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1700. p. 11.

dus abſolutum denotans conſtans eſt, AP $= x$, PM $= y$, arcus curvæ BM $= v$; erit Pp = MR $= dx$, mR $= dy$, Mm $= dv$, & MC $= tdv : dx$ (§. 320. *Anal. infin.*).

Ut valor ipſius t determinetur, fiat ut ibidem differentiale ipſius MC $= o$. Sed quia in ſingulis arculis Mm preſſio eadem *per hypoth.* ubivis aſſumendi ſunt æquales, atque adeo Mm $= dv$ quantitas conſtans. Sumta igitur in differentiatione dv pro conſtante, prodibit

$$\frac{dvdtdx - tdvddx}{dx^2} = o$$

$$dvdtdx = tdvddx$$

$$\frac{dtdx}{ddx} = t$$

Eſt vero $dt = dy$ (*cit. Analyſ. infin.*)

Ergo $t = \frac{dydx}{ddx}$.

Subſtituatur hic valor in expreſſione radii oſculi ſeu evolutæ MC $= tdv : dx$; prodibit

$$MC = \frac{dydvdx}{dxddx} = \frac{dydv}{ddx}$$

Porro CMR + RMm eſt rectus (§. 317. *Analyſ. infin.*) & PMC + CMR itidem rectus ob MR & Pp perpendiculares ad pR alteri PM parallelam (§. 236. *Geom.*) Quamobrem CMR + RMm = PMC + CMR (§. 145. *Geom.*), adeoque RMm = CMP (§. 91. *Arithm.*) Eſt vero CMP = OMN (§. 156. *Geom.*). Ergo RMm = OMN (§. 87. *Arithm.*). Quoniam præterea anguli O & R recti ſunt *per conſtr.* erit (§. 267 *Geom.*).

$$Mm : MR = MN : NO$$

$$dv : dx = a : \frac{adx}{dv}$$

Denique cum ſit

$$MC : MN = 2PM : \frac{2\,PM.MN}{MC}$$

hoc eſt, $\frac{dydv}{ddx} : a = 2y : \frac{2ayddx}{dydv}$

habebimus ob $\frac{MN.2PM}{MC} + MO = MN$ *per demonſtrata*

$$\frac{2ayddx}{dydv} + \frac{adx}{dv} = a$$

$$2ayddx + adydx = adydv$$

$$2yddx + dydx = dydv$$

Quodſi coëfficiens 2 abeſſet, ſumma membri foret ydx. Sed ſi integrabile fieri debet, dividendum eſt per $\surd y$: quo facto prodit

$$\frac{2yddx + dydx}{\sqrt{y}} = \frac{dydv}{\sqrt{y}}$$

$2dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y}$, quia dv conſtans.

Quoniam vero $dv > dx$, cum dv ſit differentiale arcus, dx abſciſſæ, adjicienda eſt quantitas conſtans, quæ vi legis homogeneorum fieri debet $= dv\sqrt{a}$. Habemus adeo

$$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$$

$$ydx^2 = ydv^2 - 2dv^2\sqrt{ay} + adv^2$$

Sed $dv^2 = dx^2 + dy^2$

Ergo $ydx^2 = ydx^2 + ydy^2 - 2dx^2\sqrt{ay} - 2dy^2\sqrt{ay} + adx^2 + ady^2$

$$2dx^2\sqrt{ay} - adx^2 = ydy^2 + ady^2 - 2dy^2\sqrt{ay}$$

$$dx\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)} = dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}$$

Fiat $z = 2\sqrt{ay} - a$

erit $dz = \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$

$\frac{dz\sqrt{y}}{a} = dy$.

Jam $z = 2\sqrt{a}.\sqrt{y} - a$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$$

ſive $\frac{z + a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$

Porro $\frac{z}{2\sqrt{a}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$

ſeu $\frac{z - a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$

Quodſi ergo valores hactenus inventi ſubſtituantur in formula $\frac{ay(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}$; prodibit

$$dx = \frac{dz\,(z + a)\,(z - a)}{4a\sqrt{a}.\sqrt{z}} = \frac{(z^2 - a^2)\,dz}{4a\sqrt{az}}$$

$$4adx\sqrt{a} = \frac{z^2dz - a^2dz}{\sqrt{z}} = z^{3:2}dz - a^2z^{-1:2}dz$$

$4ax\sqrt{a} = \tfrac{2}{5}z^{5:2} - 2a^2z^{1:2}$

$2ax\sqrt{a} = \tfrac{1}{5}(z^2 - 5a^2)\sqrt{z}$

Jam $z^2 = 4ay - 4a\sqrt{ay} + a^2$

$\sqrt{z} = \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$

Quamobrem $10\,ax\sqrt{a} = (4ay - 4a\sqrt{ay} - 2a^2)\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a)\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)}$$

Sit $x = 0$; erit

$$2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$$

$$2y - 2\sqrt{ay} = 2a$$

$$y - \sqrt{ay} = a$$
$$\tfrac{1}{4}a \qquad \tfrac{1}{4}a$$

$$y - \sqrt{ay} + \tfrac{1}{4}a = \tfrac{5}{4}a$$

$$\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$\sqrt{y} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5a}$$
$$y = \tfrac{6}{4}a + \tfrac{1}{2}a\sqrt{5}$$

$$2y = 3a + a\sqrt{5} = 2AB$$

Fiat $y = 0$

erit $5ax = -2a\sqrt{a^2}$

$$x = -\tfrac{2}{5}a$$

Curva igitur KMB continuatur ultra punctum B. Nimirum ſi fiat AD$=a$ & erecta perpendicularis CD$=\frac{2}{5}a$; curva huic in puncto C occurrit.

Quoniam curva verticalem ad angulos rectos ſecat, ubi differentiale ſemiordinatæ $=0$; ut punctum reperiatur, in quo curva rectam AB ſecat ad angulos rectos, fiat $dy=0$, erit ob $dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a)} = ay(\sqrt{y} - \sqrt{a})$

$$dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a)} = 0$$

$$2a\sqrt{ay} - a = 0$$

$$2\sqrt{ay} = a$$

$$4ay = a$$

$$y = \tfrac{1}{4}a$$

Quamobrem ſi fiat AG$=\frac{1}{4}a$, curva ſecabit AB in G ad angulos rectos.

PROBLEMA 114.

673. *Invenire curvam, in qua mobile deſcendens eandem quidem conſtanter eadem vi premit, ſed quæ non æqualis eſt ponderi abſoluto.*

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, niſi quod vis premens dicatur b; erit (§.672).

$$\frac{2ayddx}{dydv} + \frac{adx}{dv} = b$$
$$2ayddx + adydx = bdydv$$

$$\frac{2ayddx + adydx}{2\sqrt{y}} = \frac{bdvdy}{2\sqrt{y}}$$

$$adx\sqrt{y} = bdv\sqrt{y} - adv\sqrt{a}$$

$$a^2ydx^2 = b^2ydv^2 - 2abdv^2\sqrt{ay} + a^3dv^2$$
$$dv^2 = dy^2 + dx^2$$

$$a^2ydx^2 = b^2ydy^2 + b^2ydx^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} - 2abdx^2\sqrt{ay} + a^3dy^2 + a^3dx^2$$

$$a^2ydx^2 - b^2ydx^2 + 2abdx^2\sqrt{ay} - a^3dx^2 = b^2ydy^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} + a^3dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)} = dy\,(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy\,(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})}{\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)}}$$

Fiat $b = 0$, erit

$$dx = -\frac{ady\sqrt{a}}{\sqrt{(a^2y - a^3)}} = -\frac{ady}{\sqrt{(ay - a^2)}}$$

$$x = 2\sqrt{(ay - a^2)}$$

$$x^2 = 4ay - 4a^2$$

Eſt igitur in hoc caſu curva, per quam mobile deſcendit parabola, cujus parameter $= 4a$. Quando vero $b = 0$, perinde eſt ac ſi mobile in vacuo libere deſcendit. Quamobrem conſenſus hypotheſium præſentium cum curva deſcenſus *Galilæana* patet (§.482).

SCHOLION.

674. *Monuit jam* Varignonius (d) *eandem ſolutionem ad alia problemata ſimilia extendi poſſe: quod quomodo fiat, ſequente problemate oſtendere lubet.*

PROBLEMA 115.

Tab. XVII. Fig. 168. 675. *Invenire curvam, quæ a pondere in ea deſcendente premitur in ratione dignitatum altitudinum* PM.

RESOLUTIO.

Si omnia ſint ut in antecedentibus, erit *per hypotheſ.*

$$\frac{2ayddx + adxdy}{dydv} = \frac{y^n}{a^{n-1}} \quad (§.672)$$

$$2yddx + dxdy = y^n a^{-n} dvdy$$

$$\frac{2yddx + dxdy}{2\sqrt{y}} = \tfrac{1}{2} y^{n-1:2} a^{-n} dvdy$$

$$dx\sqrt{y} = \frac{y^{n+1:2}dv}{(2n+1)a^n} = \frac{y^n dv\sqrt{y}}{(2n+1)a^n}$$

$$(2n+1)a^n dx = y^n dv$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 = y^{2n} dv^2 = y^{2n}dx^2 + y^{2n}dy^2$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 - y^{2n}dx^2 = y^{2n}dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})}}$$

Quodſi jam fuerit $n = 1$, adeoque curva prematur in ratione altitudinum, per quas mobile deſcendit, conſequenter in ratione duplicata celeritatum (§.86); erit

dx

(d) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710. p. 196.

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{(9a^2-y^2)}}$$

$$x = -\sqrt{(9a^2-y^2)}$$

Fiat $y = o$, relinquetur $\sqrt{9a} = 3a$, conſequenter (§.107. *Anal. infin.*)

$$x = 3a - \sqrt{(9a^2-y^2)}$$

$$3a - x = \sqrt{(9a^2-y^2)}$$

$$9a^2 - 6ax + x^2 = 9a^2 - y^2$$

$$y^2 = 6ax - x^2$$

Eſt ergo curva quæſita circulus, cujus radius eſt $3a$.

Sit $n=2$, hoc eſt, prematur curva in ratione duplicata altitudinum deſcenſus, ſeu quadruplicata celeritatum (§.86); erit

$$dx = \frac{y^2dy}{\sqrt{(25a^2-y^2)}}$$

Quæ eſt æquatio ad curvam elaſticam *Bernoullianam* (e).

Sit $n=\frac{1}{2}$, hoc eſt, prematur curva in ratione ſubduplicata altitudinum, ſeu in ratione celeritatum (§. *cit.*); erit

$$dx = \frac{y^{1:2}dy}{\sqrt{(4a-y)}}$$

$$dx^2 = \frac{ydy^2}{4a-y}$$

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 = \frac{ydy^2}{4a-y} + dy^2$$

$$= \frac{ydy^2 + 4ady - ydy^2}{4a-y}$$

$$= \frac{4ady^2}{4a-y}$$

$$dv = \frac{2dy\sqrt{a}}{\sqrt{(4a-y)}} = \frac{2ady}{\sqrt{(4a^2-ay)}}$$

$$v = -4\sqrt{(4a^2-ay)}$$

Fiat $y = o$, erit reſiduum $= -8a$, adeoque

$$v = 8a - \sqrt{(4a^2-ay)}$$

Quodſi diameter circuli $HB = 4a$, $HI = y$; erit $IB = 4a - y$. Tab. XVII. Fig. 65.

Quare $IB^2 = 16a^2 - 8ay + y^2$

$IN^2 = 4ay - y^2$ (§. 377. *Anal. fin.*

$$BN^2 = 16a^2 - 4ay$$

$$BN = 2\sqrt{(4a^2 - ay)}$$

$$2BN = 4\sqrt{(4a^2-ay)}$$ = arcui Cyclodis BM (§. 168. *Anal. infin.*)

$$2BH = BM + AM$$

$$8a = BMA$$

$8a - 4\sqrt{(4a^2-ay)}$ = arcui AM.

Atque adeo patet; curvam, quæ a mobili deſcendente premitur in

Ff 2 ra-

(e) in Actis Erudit. A. 1694. p. 272. & A. 1695. p. 538.

ratione celeritatum, ſeu altitudinum ſubduplicata, esſe cycloidem ordinariam.

COROLLARIUM.

676. Quodſi in Cycloide AP $= x$, PM $= y$ & diameter circuli genitoris $= 4a$; æquatio ad eandem eſt $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(4a-y)}}$. Quare ſi diameter circuli genitoris fuerit $= a$, reliqua maneant ut ante; æquatio ad cycloidem eſt $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(4a-y)}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$, conſequenter area cycloidis APM $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$.

CAPUT XIV.

DE

RESISTENTIA MEDII.

DEFINITIO 70.

677. Per *Reſiſtentiam medii* intelligitur reſiſtentia fluidi, per quod mobile fertur.

COROLLARIUM.

678. Quoniam mobile fluidum, quod motui ejus reſiſtit, loco pellere tenetur, atque adeo quandam motus partem amittit; celeritas ejus, maſſa quippe manente eadem, minuitur (§. 22).

PROBLEMA 116.

Tab. XVII. Fig. 169. 679. *Data celeritate mobilis in medio reſiſtente motu æquabili lati, invenire celeritatem dato tempore amisſam, ſpatium confectum & curvam reſiſtentiæ, in qua ſemiordinatæ ſunt ut celeritates amisſæ.*

RESOLUTIO.

Sit AB celeritas, qua mobile initio fertur $= a$, ANG curva definiens celeritates totales in temporibus AP $= x$ amisſas, PN celeritas amisſa $= r$; erit NM celeritas reſidua, quæ dicatur v. Sit jam pm alteri PM infinite propinqua; erit nR differentia poſitiva ſemiordinatarum PN & pn ſeu celeritatum extinctarum $= dr$, eademque differentia negativa ſemiordinatarum NM & nm ſeu celeritatum reſiduarum $= -dv$. Unde reſultat

I. $dr = -dv$.

Sit porro curva ESI, cujus ordinatæ ſunt ut nR, ſeu legem reſiſtentiæ exponunt. Quodſi ergo Tab. XVII. Fig. 170.
nR

nR dividas per PS., quotus erit quantitas conſtans, perinde enim fere eſt ac ſi eandem quantitatem dividas per ſe ipſam. Sit PS $= z$. Quoniam nR $= -dv$ *per demonſtrata*; erit

$$\frac{nR}{PS} = -\frac{dv}{z}.$$

Jam cum $Pp = dx$, quia AP perinde ac in curva præcedente tempus exponit, ſit conſtans; erit per legem homogenorum.

$$-\frac{dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{II.} \quad -adv = zdx$$

Sit denique ſpatium a mobili tempuſculo dx percurſum $= ds$. Quoniam idem eſt vdx (§. 34); erit

$$ds = vdx$$

adeoque III. $s = \int vdx$

SCHOLION.

680. *Ex formulis hisce generalibus quas dedit* Varignonius (f) *deducuntur, quæ de reſiſtentia medii in hypotheſibus ſpecialibus a* Walliſio, Nevvtono, Hugenio *atque* Leibnitio *inventa ſunt: quemadmodum ex ſequentibus patebit.*

THEOREMA 142.

Tab. XVII. Fig. 169. 681. *Si mobile motu æquabili fertur per medium, in quo eidem reſiſtitur in ratione celeritatum; curva reſiſtentiæ totalis* ANG *eſt Logarithmica; cujus aſymptotus tempus, ſemiordinatæ ad ipſum relatæ celeritates reſiduas repræſentant.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam mobili reſiſtitur in ratione celeritatum *per hypotheſ.* ſeu celeritates in inſtanti amiſſæ ſunt ut celeritates; ſi omnia ſint ut in problemate præcedente (§. 679); erit $z = v$. Eſt vero $-adv = zdx$ *vi num. II.* (§. *cit.*). Ergo $-adv = vdx$ conſequenter $a = -\frac{vdx}{dv}$.

Eſt vero $-\frac{vdx}{dv}$ ſubtangens curvæ, cujus abſciſſæ ſunt x, ſemiordinatæ decreſcentes v (§. 20. *Anal. infin.*). Ergo ſubtangens curvæ reſiſtentiæ totalis ANG eſt Logarithmica, cujus aſymptotus BF (§ 54. *Anal. infin.*). Repræſentat autem BF tempus & ſemiordinatæ ad ipſum relatæ exprimunt celeritates reſiduas a reſiſtentia medii. *Q. e. d.*

SCHOLION.

682. *Si quis dubitet hanc eſſe Logarithmicæ proprietatem propriam, quod ſubtangens ſit conſtans; haud difficulter idem demonſtratur. Sint enim* z & y *duæ ſemiordinatæ*, v & x *ipſis reſpon-*

(f) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1707. p. m. 503.

dentes abſciſſæ: erunt ſubtangentes $\frac{ydx}{dy}$ & $\frac{zdv}{dz}$, *adeoque* $ydx : dy = a$ & $zdv : dz = a$ (§. 54. Anal. infin.), *conſequenter* $ydx : dy = zdv : dz$ (§. 87. Arithm. *Quoniam differentiale abſciſſæ ſumitur conſtans*; *erit* $dx = dv$, *conſequenter* $y : dy = z : dz$ (§. 183. Arithm.), *adeoque* $y + dy : y = z + dz : z$ (§. 190. Arithm.). *Habemus adeo ſemiordinatas in proportione geometrica. Jam ipſis reſpondentes abſciſſæ* $x + dx$ & x *atque* $v + dv$ & v *ob* $dx = dv$ *ſunt æquidifferentes* (§. 322. Arithm.). *Abſciſſis adeo æqui differentibus reſpondent ſemiordinatæ in geometrica progreſſione, conſequenter curva conſtantis ſubtangentis eſt Logarithmica* (§. 552. Anal. fin.). *Ceterum* ANG *dicitur* curva reſiſtentiæ totalis *ad differentiam* curvæ reſiſtentiæ inſtantaneæ, *in qua ſemiordinatæ ſunt ut celeritates in inſtanti amiſſæ.*

THEOREMA 143.

683. *Si mobile motu æquabili per medium fertur, in quo eidem reſiſtitur in ratione celeritatum & tempora ſumuntr æqualia; erunt celeritates in principiis ſingulorum temporum in progreſſione geometrica & partes ſingulis temporibus amiſſæ erunt iisdem proportionales ſeu ut totæ; vel etiam ut celeritates in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobili a medio, per quod motu æquabili fertur, reſiſtitur in ratione celeritatum; curva reſiſtentiæ ANG Logarithmica eſt, cujus aſymptotus BF tempus repræſentat, abſciſſæ vero NM celeritates reſiduas exhibent (§. 681). Quoſi ergo tempora ſumuntur æqualia, celeritates in principiis temporum ſunt in geometrica progreſſione (§. 552. *Anal. fin. Quod erat unum.*

Tab. XVII. Fig. 169.

Quodſi fiat BM = MR, tempora, quibus amittuntur celeritates AO & NV æqualia ſunt. Eſt vero AB : NM = NM : TR *per demonſtr.* Ergo AB – NM : AB = NM – TR : NM (§. 193. *Arithm.*), hoc eſt, AO : AB = NV : NM, conſequenter AO : NV = AB : NM (§. 173. *Arithm.*), ſeu celeritates temporibus æqualibus amiſſæ ſunt ut totæ in principiis illorum temporum. *Quod erat ſecundum.*

Quoniam AB : NM = NM : TR *per demonſtr.* erit etiam AB–NM : NM = NM – TR : TR (§. 193. *Arithm.*), hoc eſt, AO : NM = NV : TR, conſequenter AO : NV = NM : TR (§. 173. *Arithm.*), ſeu celeritates temporibus æqualibus BM & MR amiſſæ ſunt ut celeritates

tates NM & TR in fine illorum temporum. *Quod erat tertium.*

Ultimum quoque ita oſtenditur. AO : NV = AB : NM *per num. 2.* & AB : NM = NM : TR *per num. 1.* Ergo AO : NV = NM : TR (*§.* 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 144.

684. *Si mobile motu æquabili per medium fertur, in quo eidem reſiſtitur in ratione celeritatum; ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut celeritates amiſſæ, & , ſi tempora ſumantur æqualia, ut celeritates totæ in principio vel in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia ſint ut in problemate generali (§. 679); erit $-adv = zdx$ *vi num. II.* & $vdx = ds$ *vi num. III.* Eſt vero $z = v$ *per hypoth.* Ergo $-adv = vdx$ (*§.* 15. *Arithm.*), conſequenter $ds = -adv$ (*§.* 87. *Arithm.*). Eſt igitur $s = a^2 - av$ (§. 95. *Anal. infin.*), ſeu ob conſtantem a eſt s ut $a - v$ (§. 181. *Arithm.*). Sed $a - v$ eſt celeritas a mobili tempore x amiſſa. Quamobrem ſpatia ſunt ut celeritates amiſſæ. *Quod erat unum.*

Quodſi tempora ſumantur æqualia, celeritates amiſſæ ſunt ut totæ in principio, vel fine illorum temporum (§. 683). Sunt vero etiam ut celeritates amiſſæ iſtis temporibus ita ſpatia movendo iisdem confecta *per demonſtrata.* Ergo eadem ſpatia ſunt ut celeritates in principio vel etiam in fine illorum temporum (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 145.

685. *Si mobili motu æquabili lato in ratione celeritatum reſiſtitur, & tempora ſumuntur æqualia ſeu in progreſſione arithmetica, erunt celeritates in inſtanti ſeu tempuſculo infinite parvo amiſſæ ut celeritates in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Curva enim reſiſtentiæ Logarithmica eſt, cujus aſymptotus tempora, ſemiordinatæ ad eandem relatæ celeritates in fine illorum temporum repræſentant (§. 681). Quare ſi tempora ſint x & t, ſemiordinatæ ipſis reſpondentes y & z; erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{zdt}{dz}$ (*§.* 54. *Anal. infin.*), conſequenter cum tempora ſumantur in progreſſione arithmetica *per hypoth.* ſitque adeo $dx = dt$ (*§.* 333. *Arithm.*) $y : dy = z : dz$. Eſt itaque $y : z = dy : dz$ (*§.* 173. *Arithm.*), hoc eſt, celeri-

leritates in fine temporum iſtorum. *y* & *z* ſunt ut celeritates in inſtanti inde amiſſæ *dy* & *dz*. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

Tab. XVII. Fig. 170. 686. Quoniam in curva reſiſtentiæ inſtantaneæ ESI abſciſſa EP eſt ut tempus, ſemiordinata PS ut celeritas in inſtanti amiſſa (§. 682); PS vero eſt celeritas in fine temporis EP mobili reſidua (§. 685) & in curva reſiſtentiæ totalis abſciſſis tanquam temporibus reſpondent ſemiordinatæ tanquam celeritates iſtis amiſſæ (§. 682); curva reſiſtentiæ totalis eadem quæ curva reſiſtentiæ inſtantaneæ, ſi mobili motu æquabili lato reſiſtitur in ratione velocitatum.

THEOREMA 146.

687. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur in medio, per quod fertur, in ratione celeritatum; ſpatia adhuc percurrenda ſunt celeritatibus reſiduis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut ſpatium integrum percurrendũ ad ſpatium aliud percurrendum, ita celeritas, quam initio motus habet mobile ad celeritatem reſiduam (§. 684). Quamobrem ſpatium quodlibet adhuc percurrendum eſt ad integrum ut celeritas reſidua, qua percurrendum, ad celeritatem initialem, ſeu quam in principio habet mobile (§. 193. *Arithm.*): quod cum de omni ſpatio percurrendo verum ſit; erit ſpatium percurrendum unum ad aliud quodcunque ut celeritas reſidua, qua illud percurrendum, ad celeritatem reſiduam, qua hoc percurrendum (§. 195. *Arithm.*), hoc eſt, ſpatia adhuc percurrenda ſunt celeritatibus reſiduis, qua percurrenda, proportionalia (§. 155. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

688. Si ergo celeritas initialis AB exponatur per ſpatium integrum percurrendum, cum ſpatia percurſa ſint AO, AQ &c. (§. 684). erunt percurrenda OB, OQ &c. ſeu applicatæ NM & TR ad aſymptotum BF Logiſticæ ANG. Tab. XVII. Fig. 169.

THEOREMA 147.

689. *Si mobili motu æquabili lato a medio reſiſtitur in ratione celeritatum & ſpatia adhuc percurrenda ſint ut numeri; erunt tempora inſumta percurſis ut illorum Logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Spatia enim adhuc percurrenda ſunt ut ſemiordinatæ Logiſticæ NM, TR &c. applicata ad tempora inſumta BM, BR ſpatiis jam percuſſis AO, AQ (§. 688). Enimvero ſi in Logiſtica NM, TR ſumuntur ut numeri, abſciſſæ BM, BR ſunt ut eorum Logarithmi (§. 533.

553. *Anal.*). Ergo ſi ſpatia percurrenda ſunt ut numeri, tempora ſunt eorum Logarithmi. *Q. e. d.*

THEOREMA 148.

Tab. XVII. Fig. 169. 690. *Si mobile æquabili motu incedit in medio, quod in ratione velocitatum eidem reſiſtit, celeritas nonniſi tempore infinito extinguitur & ſpatium percurrendum integrum* AB *nunquam abſolvit, etſi ſemper accedat ad limitem.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim continuo decreſcentes ſunt ut ſemiordinatæ Logarithmicæ ad aſymptotum BF applicatæ & aſymptotus tempus exhibet (§. 681). Quare cum AB celeritatem integram repræſentet, quam mobile in principio motus habet; ea prorſus extingui nequit, niſi punctis G & F coincidentibus, ſeu Logiſtica ANG cum aſymptoto BF concurrente: quod cum fieri non poſſit niſi infinito intervallo (§. 556. *Anal. infin.*); celeritas quoque nullo tempore finito extingui poteſt. *Quod erat primum*

Jam cum celeritate, quam in principio motus habet mobile, non prorſus extincta terminum B attingere non poſſit, nullo quoque tempore finito eundem attingere valet, adeoque ſpatium percurrendum integrum AB nunquam abſolvit. *Quod erat ſecundum.*

Quia tamen motus indeſinenter continuatur, adeoque ſpatium celeritatibus amiſſis deſcriptum continuo creſcit; mobile ad terminum ſuum B continuo propius accedit. *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

691. *Nemo objiciat propoſitionem præſentem experientiæ repugnare: neque enim hypotheſis reſiſtentiæ in ratione velocitatum naturæ rerum conformis, quemadmodum ſuſpicatus fuit* Walliſius. *Et ſi vel maxime hypotheſis naturæ prope ad eam accederet, ex natura conſuetudine motus in praxi tandem inſenſibilis fieri deberet, quemadmodum a* Leibnitio (g) *jam annotatum eſt.*

THEOREMA 149.

692. *Si intra aſymptotos rectangulus* AB *&* BK *deſcribatur hyperbola* FLS *& motus initio celeritas exponatur per rectam* AB, *elapſo aliquo tempore vero per rectam* OB; *tempus per aream* AFLO *& ſpatium eo tempore deſcriptum per rectam* AO *exprimi poteſt.* Tab. XVII. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Si enim BQ & BO fuerint celeritates

(g) in Actis Erudit. A. 1689. p. 41.

ritates in fine temporum BM & BR reſtantes, dicaturque BQ = y, BO = z; erit $y : z = dy : dz$ (§. 685), conſequenter $y : dy = z : dz$ (§. 173. *Arithm.*). Sunt vero $\frac{y}{dy}$ & $\frac{z}{dz}$ elementa ſpatii hyperbolici aſymptotici (§. 120. *Anal. infin.*). Quamobrem elementa iſta æqualia ſunt, ſi eorum altitudines, quæ ſunt abſciſſarum in aſymptoto BA ſumtarum differentialia, fuerint ut celeritates in inſtanti amiſſæ. Quodſi ergo ab initio motus usque ad plenariam extinctionem ſumantur continuo AO, AQ ut celeritates extinctæ; Spatium hyperbolicum aſymptoticum reſolvitur in elementa inter ſe æqualia. Atque adeo area FAOL ſucceſſiva elementorum æqualium additione gignitur, quemadmodum abſciſſæ AP continua acceſſione elementorum æqualium reſultat. Enimvero abſciſſa AP exponitur tempus, quo celeritas AN ſive AO amittitur *per hypoth.* Ergo etiam ſpatium hyperbolicum AFLO tempus deſignare debet, quo celeritas AO amittitur. *Quod erat unum.*

Jam rectæ AO & AQ ſunt ut celeritates temporibus BM & BR amiſſæ *per hypoth.* Sunt vero ſpatia temporibus BM & BR movendo confecta ut celeritates iisdem temporibus extinctæ (§. 684). Ergo ſpatia temporibus BM & BR ſeu, quod perinde eſt *per demonſtrata*, temporibus AFLO & AFHG confecta ſunt ut rectæ AO & AQ. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 150.

693. *Si motui æquabili in medio reſiſtitur in ratione celeritatum, decrementa celeritatum ſunt incrementis ſpatiorum proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Spatia enim & celeritates amiſſæ eodem tempore per eandem rectum exponuntur (§. 692). Ergo etiam incrementa illorum, & harum decrementa eodem tempore per eandem rectam exponi debent. Quoniam itaque tempore eodem incrementa ſpatiorum & decrementa celeritatum iisdem rectis proportionalia ſunt; ſpatiorum quoque incrementa celeritatum decrementis proportionalia ſunt (§. 167. *Arithm. Q. e. d.*

SCHOLION 1.

694. Wallifius, *qui primus de reſiſtentia aëris in motu corporum determi-*

minanda cogitavit (h) *& reſiſtentiam in ratione celeritatum fieri ſuppoſuit*; *rationem celeritatis* a, *qua initio motus eſt, ad reſiduam uno momento ſeu tempuſculo infinite parvo elapſo ſumit ut* m *ad* 1. *Celeritas igitur reſidua eſt* $\frac{a}{m}$.

Jam cum celeritates reſiduæ in progresſione geometrica decreſcant (§. 685), *per hanc ſeriem exhibentur celeritates ab initio motus usque ad ejus extinctionem* $a, \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}$, &c. *in infinitum, donec ſcilicet quod reſtat eſt reſpectu ipſius a infinite parvum, adeoque nullum. Summa igitur celeritatum* $a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} + \frac{a}{m^5}$ &c. *in infinitum ob terminum ultimum contemtibilis parvitatis* $= \frac{a}{m-1} + a$ (§. 120. *Analyſ.*) $= \frac{a+ma-a}{m-1} = \frac{ma}{m-1}$.

Jam vero ſingulis celeritatibus tempuſculis æqualibus deſcribuntur ſingula ſpatiola, quæ cum ſint ut celeritates, ſpatium integrum celeritate prorſus extincta erit $\frac{ma}{m-1}$, *ſeu, ſi* $a = 1$, $\frac{m}{m-1}$, *quemadmodum idem determinat* Wallisius.

SCHOLION 2.

695. Nevvtonus (i) *cum deprehenderet hypotheſin reſiſtentiæ in ratione celeritatis magis mathematicam eſſe, quam naturalem & naturæ magis conformem cenſens alteram de reſiſtentia in duplicata ratione celeritatum, motus corporum ex hac lege reſiſtentia oriundos conſiderare cepit. Noſtrum igitur eſt ut eosdem hic more noſtro explicemus. Ex ſuperioribus enim formulis generalibus deducuntur, quæ de eodem notanda veniunt, prouti ex ſequentibus patet.*

THEOREMA 151.

696. *Si corpus motu æquabili per medium ſimilare fertur ipſique reſiſtitur in velocitatis ratione duplicata, curva reſiſtentiæ totalis eſt Hyperbola æquilatera* ANG *intra aſumptotos* HK *&* KF, *puncto* B, *in quo celeritas initialis* AB *applicatur, a centro* K *intervallo rectæ* AB, *quæ celeritatem initialem exponit, diſtante.* Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si celeritas initialis AB $= a$, celeritas amiſſa $= v$, tempus quo amittitur $= x$, decrementum celeritatis inſtantaneum ut z; erit $-adv = zdx$ (*vi num. II. §. 679*). Eſt vero decrementum celeritatis inſtantaneum in ratione duplicata celeritatis extinctæ *per hypoth.* adeoque ſervata lege homogeneorum $z = \frac{v^2}{a}$. Quamobrem

(h) in Algebra c. 101. f. 438. Vol. 2. Oper.

(i) in Princ. lib. 2. prop. 5. & ſeqq. p. m. 239.

$$-adv = \frac{v^2dx}{a}$$

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{a^2}$$

hoc eſt, $-v^{-2}dv = dx : a^2$

$$v^{-1} = x : a^2$$

Sive, ſi quantitas conſtans in integratione adjiciatur, $\frac{1}{v} + b = \frac{x}{a^2}$.

Fiat $x = o$: erit $v = a$, quia ibidem applicata recta AB exprimit celeritatem initialem, adeoque

$$\frac{1}{a} + b = o$$

$$b = -\frac{1}{a}$$

Ergo $\frac{1}{v} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a^2}$

$$a^2 - av = vx$$

$$a^2 = vx + av$$

Curva igitur reſiſtentiæ totalis ANG eſt hyperbola æquilatera intra aſymptotos HK & KF, latere potentiæ hyperbolæ exiſtente linea recta, quæ celeritatem exponit, & applicata AB, quæ eandem exponit ſui intervallo a centro K remota (§. 490. *Anal. fin.*).

COROLLARIUM.

697. Quoniam tempus repræſentatur per aſymptotum BF, celeritates reſiduæ per ſemiordinatas NM, hyperbola vero cum aſymptoto ANG non concurrit (§. 481. *Anal. fin.*); celeritas, qua fertur mobile, integra nonniſi infinito tempore per reſiſtentiam medii extinguitur, ſeu mobile nunquam motu ſuo prorſus privatur.

THEOREMA 152.

698. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur a medio in ratione duplicata celeritatis, celeritas reſidua erit ad extinctam in ea ratione, quam habet latus potentiæ hyperbolæ* KB *ad partem aſymptoti* BM *exponentem tempus, quo celeritas extincta fuit.* Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si enim potentiæ hyperbolæ latus KB = BA = a, recta tempus exponens BM = x, celeritas reſidua MN = v, adeoque extincta PN = $a - v$; erit $a^2 - av = vx$ (§. 696). Eſt igitur $a : x = v : a - v$ (§. 299. *Arithm.*), hoc eſt, AB : BM = MN : NP, ſeu celeritas reſidua eſt ad extinctam ut latus potentiæ hyperbolæ ad partem aſymptoti tempus exponentem, quo celeritas extincta fuit. *Q. e. d.*

THEOREMA 153.

699. *Si mobili motu æquabili lato*

lato reſiſtitur a medio in ratione duplicata celeritatis, ſpatium dato tempore eſt ut logarithmus rationis, quam habet celeritas initialis ad reſiduam tempore iſto elapſo.

DEMONSTRATIO.

Si enim ſpatium ſit s, reliqua ſint ut ante; erit $vdx = ds$ (§. 679). Eſt vero in hypotheſi propoſitionis $-\frac{a^2 dv}{v^2} = dx$ (§. 696), adeoque $vdx = -a^2 dv : v$, conſequenter $ds = -a^2 dv : v$. Sed $-adv : v$ eſt differentiale logarithmi fractionis. $a : v$ (§. 243. *Analyſ. infin.*). Quamobrem $s = al(a:v)$, hoc eſt, ob conſtantem a, ſpatium dato percurſum tempore eſt ut $l(a:v)$, ſeu ut logarithmus celeritatis initialis a ad reſiduam v. *Q.e.d.*

THOREMA 154.

Tab. XVII. Fig. 171. 700. *Si mobili æquabili motu per medium reſiſtens lato reſiſtitur in ratione duplicata celeritatum, tempore, quod per partem aſymptoti* BM *hyperbolæ* ANG *exponitur, confectum ſpatium repræſentatur per ſpatium hyperbolicum aſymptoticum* ABMN *inter celeritatem initialem* AB *& reſiduam* NM *interceptum.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus BM $= x$ & celeritas reſtans MN $= v$; erit vdx elementum areæ ABMN (§. 97. *Analyſ. infin.*). Sed ſi ſpatium tempore BM deſcriptum $= s$; erit $ds = vdx$ (§. 679). Ergo $s = \int vdx =$ ABMN. Spatium igitur hyperbolicum tempori, quod per BM exprimitur, reſpondens ABMN exprimit ſpatium a mobili tempore iſto confectum. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

701. Quoniam ſpatia motu æquabili dato tempore confecta ſunt in ratione compoſita temporum ac celeritatum (§. 34); mobile celeritate initiali AB tempore BM percurreret ſpatium, quod eſt ut BM. AB (§. 159. *Arithm.*), conſequenter ſpatium iſtud exponit rectangulum ABMP (§. 376. *Geom.*). Quare cum motu reſiſtentiis in duplicata celeritatum ratione impedito tempore BM conficiatur ſpatium per ſpatium hyperbolicum aſymptoticum ABMN exprimendum (§. 700); erit ſpatium celeritate in ratione duplicata celeritatis continuo impedita deſcriptum ad ſpatium, quod eodem tempore in medio non reſiſtente deſcriberet mobile; ut ſpatium hyperbolicum aſymptoticum ABMN ad rectangulum ABMP.

THEOREMA 155.

702. *Si motus æquabilis impeditur reſiſtentiis, quæ ſunt in ratione duplicata celeritatum; decrementa celeritatum inſtantanea ſunt in ratione compoſita ex celeritate*

reſidua & incremento momentaneo ſpatii percurſi.

DEMONSTRATIO.

Conſtat ex demonſtratione theorematis 151. (§. 696), eſſe $-adv = v^2dx : a$. Eſt igitur $-dv$ ut v^2dx propter conſtantem a^2 (§. 181. *Arithm.*). Enimvero $v^2dv = v. vdx$ & v deſignat celeritatem reſiduam, $vdx = ds$ (§. 679) incrementum momentaneum ſpatii in medio reſiſtente percurſum. Ergo in hypotheſi theorematis decrementa momentanea velocitatis $-=dv$ ſunt in ratione compoſita celeritatum reſiduarum & incrementorum momentaneorum ſpatii percurſi. *Q. e. d.*

THEOREMA 156.

Tab. XVII. Fig. 172. 703. *Si recta* AB *celeritatem initialem mobilis exponit, cui in medio, per quod æquabiliter movetur, in ratione duplicata celeritatum reſiſtitur, & erectis perpendicularibus* AC *&* BF *deſcribantur duæ Logarithmicæ* ANG *&* BOR, *quorum communis eſt ſubtangens* AB, *altera vero* BOR *ad aſymptotum* AC, *altera* ANG *ad aſymptotum* BF *relata; ducta* PO *ipſi* AB *parallela, exponet* MO *tempus,* PN *celeritatem iſto tempore amiſſam &* NM *celeritatem in fine illius temporis adhuc reſiduam.*

DEMONSTRATIO.

Si enim ſubtangens communis AB $= a$, tempus $= x$, celeritas in fine ejuſdem reſidua $= v$; erit

$$a^2 = vx + av \text{ (§. 696)}$$

$$0 = vdx + xdv + adv$$

$$-adv - xdv = vdx$$

$$-\frac{dv}{v} = \frac{dx}{a+x}$$

Sunt adeo $-\frac{dv}{v}$ & $\frac{dx}{a+x}$ duo Logarithmi æquales (§. 243. *Analyſ. infin.*). Quare ſi ſit BM $= y$ & NM $= v$; erit $\frac{dy}{a} = -\frac{dv}{v}$, adeoque ANG Logarithmica ad aſymptotum BF relata, cujus ſubtangens $a =$ AB. Et quia etiam $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{a+x}$; (§. 87. *Arithm.*) erit itidem BOR Logarithmica ad aſymptotum AC relata, cujus itidem ſubtangens AB (§. 54. *Anal. infin.*). Quoniam vero AB exponit celeritatem initialem, tempus $= x$, celeritas reſidua $= v$ *vi denominationis*; recta MO $= x$ tempus, NM $= v$ celeritatem in fine ejus reſiduam & PN celeritatem tempore MO amiſſam exponit. *Q. e. d.*

Theo-

THEOREMA 157.

Tab. XVII. Fig. 171. 704. *Si tempus* BM *reſolvitur in tempuſcula, quæ ſunt in progreſſione geometrica, ſpatiola iſtis tempuſculis deſcripta æqualia ſunt & velocitates reſiduæ ſunt in eadem ratione decreſcente, in quo tempora creſcunt quantitate quadam conſtante aucta.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus exponitur per partem BM aſymptoti KF Hyperbolæ æquilateræ ANG; ſpatium hyperbolicum ABMN exponit ſpatium a mobili tempore BM in medio non reſiſtente deſcriptum (§.700). Enimvero oſtendimus in ſuperioribus (§.692), ſi BM reſolvitur in particulas, quæ ſunt in progreſſione geometrica, aream ABMN reſolvi in ſpatiola ſeu elementa inter ſe æqualia. Spatiola igitur tempuſculis in ratione geometrica progredientibus deſcripta ſunt inter ſe æqualia. *Quod erat unum.*

Tab. XVII. Fig. 171. Si AB exprimat celeritatem initialem & duæ fuerint Logiſticæ ANG & BOR ad aſymptotos BF & AC relatæ; MO tempus denotat, & MN celeritatem in fine iſtius reſiduam (§.703). Sumantur jam in aſymptotis abſciſſæ BM vel AP in progreſſione arithmetica; erunt NM & PO in progreſſione geometrica & quidem ſemiordinatæ NM in decreſcente, ſemiordinatæ vero PO in creſcente (§.552. *Anal. fin.*). Patet igitur temporibus quantitate conſtante AB (= PM) auctis in ratione geometrica creſcentibus celeritates reſiduas NM in ratione geometrica decreſcere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

705. Quoniam ſpatia dato tempore deſcripta ſunt ut logarithmi negativi celeritatum in fine illorum temporum reſiduarum (§.699); ſi celeritates reſiduæ ſumantur ut numeri, ſpatia ſunt ut eorum logarithmi & tempus etiam ſunt ut numeri (§.704).

COROLLARIUM 2.

706, Quare cum AP vel BM ſit ut logarithmus MN vel PO; erit BM vel AP ut ſpatium tempore MO celeritate PN, utpote extincta tempore MO (§. 705), deſcriptum (§.453. *Anal. fin.*).

SCHOLION.

707. *Eadem methodo ad alias hypotheſes reſiſtentia applicari poterant formula generales. Sed cum iſtiuſmodi hypotheſes magis geometrica, quam naturales ſint, plura in præſente non addimus ad reſiſtentias in motu gravium explicandas progreſſuri in duabus hypotheſibus anterioribus. Supponimus autem motum gravium æquabiliter acceleratum in hypotheſi* Galilæana, *utpote experimentis in iis a centro Telluris diſtan-*

ſtantiis conſentiente, in quibus ea capere licet.

PROBLEMA 117.

Tab. XIIX Fig. 173. 708. *Invenire curvam reſiſtentiæ, celeritatem reſiduam & ſpatium dato tempore deſcriptum in motu gravium ſeu æquabiliter accelerato.*

RESOLUTIO.

Exponat recta AC tempus. Fiat AP = PM; exponet PM celeritatem tempore AP a mobili acquiſitam (§. 68) & AMF erit linea recta ac APM triangulum æquicrurum. Sit PN celeritas extincta tempore AP per reſiſtentiam & MN celeritas in fine illius temporis reſidua; erit ANG curva reſiſtentiæ totalis. Ducatur *pm* ipſi PM infinite propinqua & demiſſa perpendiculari NR; erit *n*R particula celeritatis tempuſculo P*p* extincta. Fiat PS ut *n*R; erit ESI curva reſiſtentiæ inſtantaneæ (§. 682). Denique fiat QP = NM; erit AQH curva celeritatum reſiduarum.

Sit jam AP = PM = x, NM = PQ = v, PS = z, PN = r; erit

$$v = x - r$$

$$r = x - v$$

$$\text{I. } dr = dx - dv.$$

Porro ut ſupra (§. 679).

$$\frac{dr}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{Unde } \frac{dx - dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{II. } adx - adv = zdx$$

quæ eſt æquatio ad curvam reſiſtentiæ inſtantaneæ ESI.

Tandem ſi s ſpatium tempore x confectum denotet, erit ut ſupra (§. 679)

$$\text{III. } vdx = ds.$$

SHOLION.

709. *Ex formulis hiſce generalibus perinde ac ſupra deducuntur quæ de motu gravium in medio reſiſtente a* Nevvtono, Hugenio *&* Leibnitio *inventa ſunt, quemadmodum ex ſequentibus intelligitur.*

THEOREMA 158.

710. *Si gravi deſcendenti reſiſtitur in ratione celeritatum, curva celeritatum reſiduarum* AQH *eſt Logarithmica, cujus aſymptotus* BF *tempus exponit, ſemiordinatæ vero* OQ *ad aſymptotum relatæ ſunt differentiæ inter celeritates reſiduas* PQ *& ſubtangentem* AB. Tab. XIIX Fig. 174.

DEMONSTRATIO.

Si AP = x, PQ = v, AB = a; erit $adx - adv = zdx$ (§. 708).

Eſt

Eſt vero $z = v$ *per hypoth.*

Ergo $adx - adv = vdx$

$$adx - vdx = adv$$

$$dx = \frac{adv}{a-v}$$

Quæ eſt æquatio ad curvam AQH.

Fiat $a - v = y$

erit $a - y = v$

$$-dy = dv$$

$$-\frac{ady}{y} = \frac{adv}{a-v} = dx$$

Quæ eſt æquatio ad Logarithmicam, cujus ſubtangens $= a$ (§. 54. *Anal. infin.*).

Sit itaque $AB = a$, $AP = BO$
Tab. XLIX. Fig. 174. $= x$; erit $Oo = Pp = dx$. Quoniam $PQ = v$; erit $QO = a - v = y$, adeoque $QL = -dy$. Quodſi ergo ſumta AB pro ſubtangente deſcribatur Logarithmica, cujus aſymptotus BF; erit $dx = -\frac{ady}{y}$ æquatio ad eandem. Eſt igitur curva celeritatum reſiduarum in fine ſingulorum temporum AQH Logarithmica, cujus aſymptotus BF, ſemiordinatæ vero ſunt differentiæ inter lineas, quæ celeritates in fine ſingulorum temporum reſiduas exponunt, atque rectam quandam conſtantem AB, cui ſubtangens æqualis eſt (§. 54. *Anal. infin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

711. Quodſi fiat $PM = AP$ & $MN = PQ$; erit PN celeritas per reſiſtentiam amiſſa tempore AP, conſequenter ANG curva reſiſtentiæ totalis (§. 682). Data igitur curva celeritatum reſiduarum in fine ſingulorum temporum, datur curva reſiſtentiæ totalis ANG.

THEOREMA 159.

712. *Si gravi deſcendenti reſiſtitur in ratione celeritatum, ſpatia movendo confecta ſunt ut celeritates extinctæ.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia fuerint ut in theoremate præcedente, erit $vdx = adx - adv$ (§. 708). Eſt vero $vdx = ds$ (§. *cit.*). Ergo $ds = adx - adv$, conſequenter $s = ax - av$. Eſt igitur propter conſtantem a ſpatium movendo confectum ut $x - v$ (§. 181. *Arithm.*). Quoniam $PM = x$, $MN = v$; PM vero eſt celeritas cadendo tempore AP acquiſita & MN celeritas in fine temporis in medio reſiſtente reſidua, erit $PN = x - v$ celeritas tempore AP extincta. Sunt igi-

tur ſpatia movendo confecta ut celeritates extinctæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

713. Quoniam PM exprimens celeritatem in medio non reſiſtente a gravi acquiſitam eſt ut tempus AP (§. 68), PN vero denotans celeritatem extinctum ut ſpatium movendo confectum (§. 712); igitur dantur lineæ temporibus inſumtis proportionales, a quibus ſpatia movendo in medio reſiſtente confecta ſi ſubtrahantur relinquunt rectas NM celeritati in medio reſiſtente a gravi acquiſitæ proportionales.

THEOREMA 160.

Tab. XIIX Fig. 174. 714. *Si complementa celeritatum a gravi in medio reſiſtente in ratione celeritatum cadendo acquiſitarum ad celeritatem maximam, quam corpus cadendo acquirere valet, ſumantur ut numeri, erunt tempora inſumta ut eorum logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Si BF exponit tempus, curva AQH celeritatum reſiduarum eſt Logarithmica; cujus aſymptotus BF, ſubtangens AB (§. 710). Quoniam Logiſtica AQH cum aſymptoto BF non concurrit niſi infinito intervallo (§. 553. *Anal. fin.*); AB eſt celeritas, quam in medio reſiſtente infinito tempore grave cadendo acquirere poteſt, adeoque abſolute maxima. Eſt itaque QO celeritatis tempore AP in medio reſiſtente acquiſitæ complementum ad maximam. Quamobrem ſi complementa celeritatum acquiſitarum ad maximam ſunt ut numeri; erunt tempora inſumta, quæ per AP, ſive BO denotantur, ut ipſorum Logarithmi (§. 550. *Anal. fin.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 161.

715. *Si grave in medio cadit, quod in ratione celeritatum deſcenſui ejus reſiſtit; celeritatem abſolute maximam nunquam acquirit.* Tab. XIIX Fig. 174.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim curva celeritatum reſiduarum in medio reſiſtente, ſeu acquiſitarum, ſi medium in ratione celeritatum reſiſtit, AQH Logarithmica, cujus aſymptotus B. F (§. 710). Quoniam celeritates acquiſitæ ſunt ſemiordinatæ QP ad axem AK applicatæ; celeritas maxima repræſentatur per ſemiordinatam, quæ reſpondet puncto, in quo curva AQH aſymptotum BF ſecat. Quare cum id fiat infinito intervallo (§. 553. *Anal. fin.*), ſeu quando AK infinita evadit; tempus infinitum requiritur ut grave cadendo celeritatem abſolute ma-

maximam acquirat. Eam igitur nunquam acquirit. *Q.e.d.*

THEOREMA 162.

Tab. XIIX Fig. 174. 716. *Si grave deſcendit per medium in ratione velocitatum reſiſtens, celeritatum temporibus in progreſſione arithmetica auctis cadendo acquiſitarum a maxima, quam per idem cadendo acquirere poteſt, differentiæ in progreſſione geometrica decreſcunt.*

DEMONSTRATIO.

Conſtat enim ex antecedentibus, ſi AQH ſit Logarithmica, cujus aſymptotus BF & AK eidem parallela; eſſe QP celeritatem tempore AP vel BO cadendo acquiſitam (§.710) & BA celeritatem maximam, quam corpus per medium in ratione celeritatum reſiſtens cadendo acquirere valet (§. 714). Sunt igitur abſciſſæ BO, BR ut tempora, ſemiordinatæ ipſis reſpondentes OQ & VR ut celeritatum QP & VT iſtis temporibus acquiſitarum differentiæ a maxima, ſeu ut earundem complementa ad maximam. Enimvero ſi in Logarithmica abſciſſæ creſcunt in progreſſione arithmetica, ſemiordinatæ in geometrica decreſcunt (§.552. *Anal. fin.*). Ergo ſi grave per medium in ratione velocitatum reſiſtens cadit & tempora in progreſſione arithmetica creſcunt, celeritatum temporibus iſtis acquiſitarum differentiæ a maxima in geometrica decreſcunt. *Q.e.d.*

THEOREMA 163.

717. *Si gravi per medium deſcendenti reſiſtatur in ratione celeritatum & axis* AK *tempora deſcenſus repræſentet,* ANG *ſit curva reſiſtentiæ totalis,* AQH *vero curva celeritatum acquiſitarum, & circa axem* AD *ad* AK *normalem deſcribatur parabola* AIC, *cujus parameter eſt ut dupla celeritas maxima, quam corpus cadendo acquirere valet; ſpatium in medio reſiſtente confectum eſt ad ſpatium eodem tempore in vacuo conficiendum in ratione* PN *ad* PI, *ſeu ut ſemiordinata curvæ reſiſtentiæ totalis ad ſemiordinatam parabolæ externæ ad eundem axem relatæ.* Tab. XIIX Fig. 174.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim ſpatium in medio reſiſtente in ratione celeritatum movendo confectum eſt tempore AP $= x$ ut $ax - av$ (§.712), ſpatium vero eodem tempore in vacuo conficiendum ut $\frac{1}{2}x^2$ (§.80); erit iſtud ad hoc ut $ax - av$ ad $\frac{1}{2}x^2$, conſequenter ut $x - v$ ad $x^2 : 2a$

(§.181. *Arithm.*). Jam cum ANG ſit curva reſiſtentiæ totalis *per hypoth.* erit PN $= x - v$ (§.712) & quia AQH eſt curva celeritatum temporibus x acquiſitarum *per hypoth.* celeritas maxima, quam corpus cadendo acquirere poteſt, eſt ut recta AB $= a$ (§.715.). Enimvero ſi circa axem AD parametro $2a$, quæ eſt ut dupla celeritas maxima a gravi acquiſitu poſſibilis deſcribatur parabola AIC; cum ſit QI = AP $= x$; erit AQ= PI $= x^2 : 2a$ (§.398 *Anal. fin.*). Eſt igitur ſpatium movendo in medio reſiſtente confectum ad ſpatium eodem tempore in medio non reſiſtente conficiendum ut PN ad PI. *Q.e.d.*

THEOREMA 164.

Tab. XIIX. Fig. 174. 718. *Spatium a gravi per medium in ratione velocitatum reſiſtens deſcendente confectum tempore infinito infinitum eſt: celeritas vero tempore iſto acquiſita finita eſt.*

DEMONSTRATIO.

Iisdem enim poſitis, quæ in antecedentibus, ſpatium movendo confectum tempore AP eſt ut ſemiordinata PN. Quare cum creſcente AP creſcat etiam PN; ubi AP fit infinita, etiam applicata ad AP infinita evadere debet, conſequenter tempore infinito percurſum ſpatium infinitum eſt. *Quod erat unum.*

Jam celeritas abſolute maxima, quam corpus in medio reſiſtente cadendo acquirere poteſt, exponitur per ſubtangentem Logiſticæ AQH ipſi AB æqualem, adeoque per lineam finitam, conſequenter & ipſa finita eſt. Celeritas igitur tempore infinito acquiſita finita eſt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 165.

719. *Si intra aſymptotos* CB & *BA rectangulas deſcribatur Hyperbola æquilatera & recta* AB *vel rectangulum* ABNE *exponat celeritatem maximam, quam corpus per medium in ratione celeritatum reſiſtens acquirere valet; area* AILE *exponet tempus, rectangulum* AIKE *celeritatem cadendo acquiſitam &* EKL *ſpatium tempore iſto confectum.* Tab. XIII. Fig. 175.

DEMONSTRATIO.

Sit AB $= a$ ſeu ut celeritas maxima, quam corpus acquirere valet, AI $= v$, ſeu ut celeritas tempore x acquiſita, & AE $= b$; erit ob conſtantem b, $ab : bv = a : v$ (§.178. *Arithm.*), adeoque etiam rectangulum ABNE exponet celeri-

leritatem maximam, quam corpus cadendo in medio reſiſtente acquirere valet & AIKE exponet celeritatem dato tempore x acquiſitam. *Quod erat primum.*

Quoniam medium reſiſtit in ratione celeritatum; erit $dx = \frac{adv}{a-v}$ (§.710), adeoque $bdx = \frac{abdv}{a-v}$.

Quoniam AB $= a$, AI $= v$; erit BI $= a-v$. Eſt vero in Hyperbola BA.AE = BI. IL (§. 486. *Analyſ. fin.*), adeoque $(a-v)$. IL $= ab$, conſequenter IL$= ab:(a-v)$. Eſt igitur $abdv:(a-v)$ elementum areæ AILE. Quamobrem bx æquatur areæ AILE, & hinc x ſeu AP = AILE : AE. Ob conſtantem itaque AE tempus x eſt ut ſpatium hyperbolicum aſymptoticum AILE (§. 178. *Arithm.*). *Quod erat ſecundum.*

Jam ſi tempus x exponatur per rectam AP & celeritas eodem acquiſita v per rectam AI; ſpatium cadendo confectum eſt ut $x - v$ (§.712). Quare ſi tempus exponitur per ſpatium hyperbolicum AILE & celeritas iſto tempore acquiſita per rectangulum AIKE; ſpatium deſcenſus exponitur per eorum differentiam, adeoque per trilineum hyperbolicum EKL. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

720. Quoniam celeritas per reſiſtentiam medii in ratione celeritatis extincta eſt ut ſpatium dato tempore cadendo confectum (§.712), ſpatium vero hoc eſt ut trilineum hyperbolicum EKL (§. 719); erit etiam celeritas tempore AILE extincta ut trilineum KLE.

COROLLARIUM 2.

721. Et quia rectangulum AIKE celeritatem cadendo tempore AILE acquiſitam exponit (§.719); celeritas acquiſita eſt ad celeritatem extinctam ut rectangulum AIKE ad trilineum hyperbolicum EKL.

THEOREMA 166.

722. *Si recta dimidia* AB *ſit ſubtangens &* AC *aſymptotus Logarithmicæ* BOI, *ductaque* BF *ipſi* AC *parallela fiat ut ſemiordinata Logarithmicæ* OP *aucta dupla ſubtangente* AB *ad* OK *ſemiordinatam, ita abſciſſa* AP *ad quartam proportionalem* PQ; *erit punctum* Q *in curva celeritatum reſiduarum* AQH, *ſeu abſciſſa* AP *tempus, ſemiordinata* PQ *celeritatem hoc tempore cadendo a gravi acquiſitam exponet, ſiquidem eidem reſiſtitur in ratione celeritatum duplicata.* Tab. XIIX Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Sit AB $= a$, AP $= x$, PQ $= v$; erit

erit $adx - adv = zdx$ (§. 708). Eſt vero $z = v^2 : a$ *per hypoth.* obſervata ſcilicet lege homogeneorum. Ergo

$$adx - adv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$a^2 dx - a^2 dv = v^2 dx$$

$$a^2 dx - v^2 dx = a^2 dv$$

$$dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$$

Fiat $v = \dfrac{ay - a^2}{y + a}$

erit $dv = \dfrac{aydy + a^2 dy - aydy + a^2 dy}{(y+a)^2}$

$$= \frac{2a^2 dy}{(y+a)^2}$$

& $v^2 = \dfrac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

adeoque $a^2 - v^2 = a^2 - \dfrac{a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

$$= \frac{a^2y^2 + 2a^3y + a^4 - a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{(y+a)^2}$$

$$= \frac{4a^3y}{(y+a)^2}$$

Ergo $\dfrac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = \dfrac{2a^4 dy (y+a)^2}{4a^3 y (y+a)^2}$

$$= \frac{\frac{1}{2} ady}{y}$$

Habemus itaque $dx = \frac{1}{2} ady : y$, quæ eſt æquatio ad Logarithmicam, cujus ſubtangens $\frac{1}{2} a$.

Sit itaque AB $= a$, BF ad AB in puncto B, AC ad eandem rectam in altero extremo A perpendicularis. Deſcribatur Logarithmica BOI, cujus aſymptotus AC, ſubtangens $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2} a$. Si jam ſumatur AP $= x$; erit PO $= y$, adeoque OK $= y - a$, conſequenter $dx = \frac{1}{2} ady : y$ (§. 54. *Anal. infin.*). Jam vero vi calculi $v = (ay - a^2) : (y + a)$, adeoque $y + a : y - a :: = a : v$. Eſt itaque PO + AB : OK = AB : PQ. Quare cum PQ $= v$ ſit celeritas tempore x reſidua; recta AP tempus, PQ celeritatem reſiduam ſeu hoc tempore acquiſitam exponit, conſequenter AQH eſt curva celeritatum reſiduarum (§. 682). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

723. Quodſi fiat PM = AP & MN = QP; erit punctum N in curva reſiſtentiæ totalis ANG. Quoniam enim AP tempus exponit, PM eſt ut celeritas cadendo in vacuo ſeu medio non reſiſtente acquiſita (§. 68). Quare cum QP ſit ut celeritas in medio reſiſtente tempore AP acquiſita (§. 722); ſi MN ipſi QP æqualis fiat, erit PN ut celeritas

tas reſiſtentia medii extincta tempore AP. Eſt igitur ANG curva reſiſtentiæ totalis (§. 682).

THEOREMA 167.

Tab. XIIX. Fig. 176. 724. *Iisdem poſitis, quæ in propoſitione præcedente, dupla ſubtangens* AB *Logarithmicæ* BOI, *cujus ope curva celeritatum reſiduarum* AQH *conſtruitur, celeritatem maximam exponit, quam grave in medio in ratione duplicata celeritatum reſiſtente cadendo acquirere poteſt; eam vero grave non acquirit niſi tempore infinito elapſo & recta* BF *eſt curvæ celeritatum reſiduarum* AGH *aſymptotus.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus ſemiordinatam QP, quæ celeritatem in medio reſiſtente tempore AP acquiſitam exponit, fieri ipſi AB ſeu ſubtangenti Logarithmicæ BOI æqualem; punctum H coincidet cum puncto F, curva nimirum AQH cum recta BF concurrente. Eſt vero PO + AB : OK = AB : PQ (§. 722), hoc eſt, OK + 2 AB : OK = AB : PQ. Quare ſi PQ ipſi AB æqualis fieri debet, neceſſe eſt ut OK æqualis evadat ipſi OK + 2 AB. Enimvero hoc fieri nequit, niſi quando 2 AB reſpectu ipſius OK infinite parva evadit (§. 4. *Analyſ. infin.*), conſequenter quando OK, adeoque etiam BF infinita evadit. Ergo PQ ipſi AB æqualis fieri nequit, niſi quando AC infinita evadit. Curva igitur celeritatum reſiduarum cum recta BF nonniſi infinito intervallo concurrit, atque adeo BF eſt ipſius aſymptotus & AB exponit celeritatem maximam, quam corpus in medio reſiſtente acquirere poteſt, cumq; recta tempus repræſentans AP infinita evadit, quando fit PQ = AB, celeritas maxima nonniſi infinito tempore acquiritur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

725. Quoniam OK + 2 AB : OK = AB : PQ (§. 722); erit AB − PQ : PQ = 2 AB : OK (§. 193, *Arithm.*), hoc eſt, KQ : QP = 2 AB : OK, ſeu differentia celeritatis dato tempore acquiſitæ a maxima, quæ in medio reſiſtente acquiri poteſt, eſt ad celeritatem dato tempore acquiſitam ut dupla maxima, quæ acquiri poteſt, ad ſemiordinatam OK Logarithmicæ BOI applicatam ad aſymptotum BF curvæ celeritatum in medio reſiſtente acquiſitarum AQH.

COROLLARIUM 2.

726. Quoniam celeritas maxima a gravi cadente in medio, quod in ratione duplicata celeritatum reſiſtit, non acquiritur, niſi infinito tempore elapſo (§. 724); grave cadens eandem nunquam attingere poteſt.

SCHO-

SCHOLION.

727. Hugenius *celeritatem maximam, quam grave in medio reſiſtente acquirere poteſt*, celeritatem terminalem *appellat* (k).

THEOREMA 168.

728. *Si grave deſcenderet in vacuo ſeu medio non reſiſtente, tempore finito eam celeritatem acquireret, quam in medio ſive in ſimplici, ſive in duplicata ratione celeritatum reſiſtente nonniſi tempore infinito acquirere poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Sive enim mobile deſcendat in medio, quod in ratione celeritatum ſimplici reſiſtit, ſive in medio cadat, quod in illorum duplicata ratione deſcenſum impedit; celeritas maxima, quam cadendo acquirere poteſt grave, eſt ut linea quædam data (§. 715. 724), adeoque finita. Quamobrem cum celeritates in vacuo acquiſitæ ſint ut tempora (§. 68); celeritas terminalis gravium in medio reſiſtente tempore finito acquiritur in non reſiſtente. Enimvero eadem celeritas in medio utroque reſiſtente non acquiritur niſi tempore infinito (§. 715. 726): Ergo in non reſiſtente finito tempore acquiritur, quæ in reſiſtente utroque infinito acquiritur. *Q. e. d.*

THEOREMA 169.

729. *Spatium in vacuo celeritate terminali* AB *tempore* AP *a gravi percurſum eſt ad ſpatium eodem tempore percurſum in medio ſive in ſimplici, ſive in duplicata ratione celeritatum reſiſtente ut rectangulum* ABKP *ad aream* AQP. Tab. XIIX. Fig. 176

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim mobile in vacuo celeritate terminali latum motu æquabili movetur *per hypoth.* erit idem in ratione compoſita celeritatis terminalis AB & temporis AP (§. 34), adeoque ut rectangulum ABKP. Enimvero in omni medio reſiſtente ſpatium tempore AP percurſum eſt ut area curvæ celeritatum reſiduarum AQP (§. 708). Eſt igitur ſpatium a gravi in medio reſiſtente percurſum, ſive motus impediatur in ratione celeritatum, ſive in ratione earundum duplicata, ad ſpatium eodem tempore celeritate terminali in vacuo confectum ut area curvæ celeritatum reſiduarum AQP ad rectangulum ABKP. *Q. e. d.*

THEO-

(k) in Diſcurſu de cauſa gravitatis p. 170.

THEOREMA 170.

730. *Si celeritate terminali tanquam radio deſcribatur quadrans circuli & celeritas in medio, quod in ratione duplicata celeritatum reſiſtit, a gravi cadendo acquiſita exponatur per coſinum arcus, ſpatium in medio iſto deſcriptum erit ut differentia logarithmorum ſinus verſi & exceſſus diametri ſupra eundem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus $= x$, celeritas in medio reſiſtente acquiſita $= v$; erit ſpatium in eodem percurſum $\int v dx$ (§. 708). Reperimus vero ſupra (§. 722) $dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Sed $\frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2} a dv + \frac{1}{2} v dv}{(a-v)(a+v)} - \frac{\frac{1}{2} a dv + \frac{1}{2} v dv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2} dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2} dv}{a+v}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ *per demonſtrata* $= \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a+v}$. Jam $\int dv : (a-v) = - l(a-v)$ & $\int dv : (a+v) = l(a+v)$ quia quantitate conſtante a ſumta pro unitate $a - v$ exprimit numerum unitate minorem, adeoque logarithmum habet negativum (§. 351. *Arithm.*). Ergo $\int v dx = -\frac{1}{2} a^2 l(a-v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$. Sunt ergo ſpatia in medio reſiſtente tempore x percurſa ut $-\frac{1}{2} a^2 l(a-v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$, conſequenter ob conſtantem $\frac{1}{2} a^2$ ut $- l(a-v) - l(a+v)$ (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, ut differentiæ Logarithmorum quantitatum $a - v$ & $a + v$. Tab. XIIX Fig. 176.

Quodſi jam celeritate terminali AB deſcribatur quadrans BD ducaturque recta QE ipſi PD parallela; erit AL ſinus arcus ED, ſeu coſinus arcus BE $= v$, adeoque BL ſinus verſus arcus ejuſdem BE $= a - v$, conſequenter logarithmus negativus $a - v$ logarithmus ſinus verſi BL. Jam diameter circuli $= 2a$. Quare ſi inde ſubducas $a - v$, relinquetur $a + v$. Eſt igitur $a + v$ exceſſus diametri BS ſupra ſinum verſum BL, adeoque logarithmus poſitivus $a + v$ logarithmus exceſſus diametri BS ſupra ſinum verſum BL. Jam cum $- l(a-v) - l(a+v)$ ſit differentia Logarithmi negativi ipſius BL & poſitivi LS; ſpatium a mobili in ratione celeritatum duplicata reſiſtente deſcriptum eſt ut differentia logarithmorum ſinus verſi BL & exceſſus diametri BS ſupra ſinum verſum BL, ſi celeritate terminali deſcribitur Quadrans

drans circuli BED & AL coſinus arcus BE fiat æqualis rectæ QP, quæ celeritatem tempore AP acquiſitam exponit, quo ſpatium iſtud confectum eſt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

731. Quoniam exceſſus diametri ſupra ſinum verſum eſt hujus complementum ad diametrum, & differentia Logarithmorum ſinus verſi & exceſſus ejus ſupra diametrum eſt Logarithmus ſinus verſi per complementum ejus ad diametrum diviſi (§. 243. *Arithm.*), conſequenter logarithmus rationis ſinus verſi ad complementum ejus ad diametrum (§. 128. *Arithm.*); ſi celeritate terminali ſumta pro ſinu toto, coſinus arcuum ſint ut celeritates cadendo acquiſitæ, erunt logarithmi rationis ſinuum verſorum ad eorum complementa ad diametrum ut ſpatia temporibus iſtis deſcripta, quibus celeritates fuere acquiſitæ.

THEOREMA 171.

Tab. XII, X Fig. 176. 732. *Si gravis deſcenſus impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritate terminali* AB *deſcribitur quadrans circuli* BED, *ſitque* ER = AL *ſinus arcus* ED *ut celeritas in medio reſiſtente cadendo acquiſita, erit ſpatium percurſum ut logarithmus ſinus complementi* EL.

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonſtratione præcedentis theorematis, ſi ſpatium ſit s, AL = ER = v, AB = a, eſſe $ds = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Sit EL = y: erit (§. 377. *Anal. fin.*).

$$y^2 = a^2 - v^2$$

$$2ydy = -2vdv$$

$$ydy = -vdv$$

$$-a^2 ydy = a^2 vdv$$

$$\frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2} = -\frac{a^2 ydy}{y^2}$$

hoc eſt, $ds = -\frac{a^2 dy}{y}$

$$s = -a^2 \int \frac{dy}{y}$$

$$= -a^2 ly$$

Sunt igitur ſpatia ut $-a^2 ly$, ſeu propter conſtantem a (§. 181. *Arithm.*) ut $-ly$. Eſt vero $-ly$ logarithmus ſinus EL; utpote negativus, quia ſinus EL continuo decreſcunt, creſcentibus ſinibus ER. Quare ſi velocitates reſiduæ ſumuntur ut ſinus arcuum ED, erunt ſpatia deſcripta eodem tempore, quo celeritates iſtæ cadendo acquiſitæ, ut logarithmi coſinuum EL,

EL, ſeu ſinuum complementorum arcuum ED. *Q. e. d.*

SCHOLION.

733. *Quodſi dubites ſummam differentialis* $-a^2dy : y$ *eſſe* $-a^2ly$, *propterea quod quantitas conſtans eidem in integratione adjici poſſit* (§. 95. Anal. infin.): *adjice quantitatem conſtantem* c, *ut ſit* $s = c - a^2ly$. *Quoniam in caſu* $v = 0$ *evadit* $y = la$, *erit* $c - a^2la = 0$. *Sumatur* a *pro unitate, erit* $c - la = 0$, *adeoque* $c = la$. *Sed logarithmus unitatis* $= 0$ (§. 334. Arithm.). *Ergo etiam* $c = 0$. *Patet igitur ſi* AB *ſumatur pro unitate, non opus eſſe ut quantitas quædam conſtans in ſummatione elementi coſinus* EL *adjiciatur.*

THEOREMA 172.

734. *Si gravi deſcendenti reſiſtitur in ratione duplicata celeritatum & coſinus arcus* EB *exponit celeritatem cadendo acquiſitam, radius vero* AB *celeritatem terminalem; tempus, quo celeritatem iſtam cadendo acquiſivit grave, eſt ut logarithmus rationis* SL *ad* LB, *ſeu complementi ſinus verſi ad diametrum ad ſinum verſum.*

DEMONSTRATIO.

Si ſit $AB = a$, $AL = ER = v$, tempus deſcenſus $= x$; erit $dx = \frac{a^2dv}{a^2-v^2}$, prouti apparet ex demonſtratione theorematis 169. (§. 730). Jam vero $\frac{adv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v}$ utpote (facta reductione ad denominationem eandem) $= (\frac{1}{2}dv + \frac{vdv}{2a} + \frac{1}{2}dv - \frac{vdv}{2a}) : (a-v)(\frac{1}{2}a+v)$. Ergo $\frac{adv}{a^2-v^2} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v} = dx$. Quoniam $\int\frac{dv}{a-v} = -l(d-v)$ & $\int\frac{dv}{a+v} = l(a+v)$; erit $x = \frac{1}{2}al(a+v) - \frac{1}{2}al(a-v)$. Sunt igitur propter conſtantem $\frac{1}{2}a$ tempora, quibus celeritates v acquiruntur, ut $l(a+v) - l(a-v)$. Jam $l(a+v) - l(a-v) = l\frac{a+v}{a-v}$ (§. 243. *Arithm.*), hoc eſt, cum ſit $a+v = LS$ & $a-v = BL$, $l(a+v) - l(a-v) = l(LS:LB)$, qui eſt logarithmus rationis LS ad LB (§. 129. *Arithm.*). Ergo ſi radius circuli AB exponit celeritatem terminalem & AL coſinus arcus BE celeritatem in medio reſiſtente data lege acquiſitam; erit tempus, quo celeritas hæc a gravi cadendo acquiritur ut logarithmus rationis complementi ſinus verſi ad diametrum LS ad ſinum verſum LB. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

735. Patet ex demonſtratione theorematis præſentis eſſe tempus x ut $l\frac{a+v}{a-v}$ ſi a exponat celeritatem terminalem & v celeritatem tempore x acquiſitam. Eſt vero $a+v$ celeritas acquiſita terminali aucta & $a-v$ differentia ejus a terminali, ſeu complementum ad terminalem, conſequenter $(a+v):(a-v)$ exprimit rationem celeritatis acquiſitæ terminali auctæ ad ipſius complementum ad terminalem. Tempus igitur eſt ut logarithmus rationis celeritatis acquiſitæ terminali auctæ ad ipſius complementum ad terminalem.

COROLLARIUM 2.

736. Quoniam $QP=v$, $KQ=a-v$; ſi fiat $PT=AS=AB$; erit $QT=a+v$, conſequenter logarithmus rationis TQ ad QK ut tempus.

THEOREMA 173.

737. *Si rationis inter ſummam celeritatis terminalis & acquiſitæ atque differentiam acquiſitæ a terminali ſumantur ut numeri & deſcenſui gravis reſiſtitur in ratione duplicata celeritatum; erunt tempora, quibus celeritates fuerunt acquiſitæ, ut logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Quodſi enim deſcenſus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritas terminalis fuerit $=a$, acquiſita $=v$; erit ſumma terminalis & acquiſitæ $a+v$ & differentia acquiſitæ a terminali $a-v$, conſequenter ratio ſummæ iſtius ad hanc differentiam $=\frac{a+v}{a-v}$ (§. 129 *Arithm.*). Sunt vero tempora, quibus celeritates iſtæ acquiruntur, ut $l\frac{a+v}{a-v}$ (§. 734). Quare ſi ratio ſummæ terminalis celeritatis ac acquiſitæ ad differentiam acquiſitæ a terminali ſumitur ut numerus; erit tempus, quo celeritas acquiſita fuit, ut logarithmus. *Q. e. d.*

THEOREMA 174.

738. *Si deſcenſui gravis reſiſtitur in ratione duplicata celeritatum & ſpatia percurſa ſunt ut logarithmi Sinuum* LE *arcus* BE *quadrantis* BD *celeritate terminali tanquam radio deſcripti; tempora inſumta ſunt ut logarithmi rationis, inter ſinum verſum* BL *& complementum ejus ad diametrum* LS. Tab. XIX Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Si enim deſcenſus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatis & celeritate terminali AB deſcripto quadrante BED coſinus arcus BE, ſeu arcus ED ſinus LA

eſt

eſt ut celeritas acquiſita, ſpatia percurſa ſunt ut logarithmi ſinuum EL (§.732), tempora vero inſumta ut logarithmi rationum inter ſinum verſum BL & ejus complementum ad diametrum LS (§.734). Quamobrem quando ſpatia percurſa ſunt ut logarithmi ſinuum; tempora inſumta ſunt ut logarithmi rationum inter ſinum verſum BL & ejus ad diametrum complementum LS. *Q. e. d.*

THEOREMA 175.

739. *Incrementum celeritatis gravium in medio non reſiſtente eſt ad incrementum acquiſitæ in medio, quod in ratione duplicata celeritatis reſiſtit, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus ſupra quadratum celeritatis acquiſitæ exceſſum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam celeritas gravium in medio non reſiſtente creſcit in ratione temporis (§.68); ſi tempus dicatur x, erit incrementum celeritatis momentaneum in tempuſculo ſcilicet dx uti dv. Jam ſi celeritas terminalis $= a$, celeritas toto tempore x in medio, quod in ratione duplicata celeritatis reſiſtit, acquiſita $= v$; erit $a^2dx - v^2dx = a^2dv$, prouti patet ex demonſtratione theorematis 166. (§.722). Eſt igitur $dx : dv = a^2 : a^2 - v^2$. Quare cum dv ſit incrementum momentaneum celeritatis in medio data lege reſiſtente acquiſitæ, erit incrementum celeritatis in vacuo ad ejus incrementum in medio reſiſtente ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus exceſſum ſupra quadratum acquiſitæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

740. Quoniam $(a^2 - v^2) = (a + v)(a - v)$; erit dx ad dv in ratione compoſita a ad $a + v$ & a ad $a - v$, hoc eſt, incrementum celeritatis in vacuo momentaneum eſt in caſu dato ad incrementum in medio reſiſtente in ratione compoſita celeritatis terminalis ad eandem celeritate acquiſita auctam & ejusdem celeritatis terminalis ad ipſius ſupra acquiſitam exceſſum.

THEOREMA 176.

741. *Si motus gravium impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritas terminalis exponitur per rectam* AB = CF; *qua tanquam radio deſcribitur quadrans, eodem vero pro latere potentiæ hyperbolæ ſumto intra aſymptotos* AC & CD *deſcribatur hyperbola* BME *fiatque* HF *celeritati in medio reſiſtente acquiſitæ æqualis; area hyperbolica* APMB *exprimit ſpatium eo tempore a* Tab. XIIX Fig. 177.

gravi percurſum, quo celeritatem ut HF *acquiſivit.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim AB = AC = CF = a, HF = v; erit ob $GF^2 = GH^2 + HF^2$ (§. 417. *Geom.*) GH = CP = $V(a^2 - v^2)$, conſequenter ob PC. PM = AB^2 (§. 488. *Anal. fin.*) PM = $a^2 : V(a^2 - v^2)$. Jam differentiale rectæ AP = $a - V(a^2 - v^2) = \frac{vdv}{V(a^2-v^2)}$. Quamobrem elementum areæ APMB = $\frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$, conſequenter area APMB = $\int \frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$. Eſt vero ſpatium a gravi interea temporis percurſum, quo celeritas v acquiſita, $\int \frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$ (§. 730). Ergo ſpatium hyperbolicum APMB exprimit ſpatium a gravi interea temporis percurſum, quo celeritas ut HF acquiſita. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

742. Quando celeritas acquiſita FH in terminalem FC degenerat, ſemiordinata PM cum aſymptoto CD coincidit, adeoque area hyperbolica ABMP degenerat in infinitam EBACD, conſequenter ſpatium repræſentat infinitum a gravi percurſum, aut percurrendum. Quoniam itaque celeritatem terminalem non attingit niſi tempore infinito elapſo (§. 726); ſpatium infinitum a gravi nonniſi tempore infinito percurritur.

THEOREMA 177.

743. *Si intra aſymptotos rectangulas* AB *&* AC *deſcribatur Hyperbola æquilatera* EMD, *cujus latus potentiæ eſt ut celeritas terminalis,* BP *vero ut tertia proportionalis ad celeritatem terminalem & celeritatem tempore finito acquiſitam, ſpatium hyperbolicum* DBPM *exponet ſpatium eodem tempore a gravi in medio deſcriptum, quod in ratione duplicata deſcenſui reſiſtit, quo celeritas acquiſita fuit.* Tab. XIIX Fig. 178.

DEMONSTRATIO.

Sit AB = a, erit etiam latus potentiæ hyperbolæ = a. Sit celeritas tempore dato a gravi cadendo acquiſita = v; erit PB = $\frac{v^2}{a}$, conſequenter AP = $a - \frac{v^2}{a} = \frac{a^2-v^2}{a}$. Unde ob AP. PM = a^2 (§. 488. *Anal. fin.*), reperitur PM = $\frac{a^3}{a^2-v^2}$. Jam differentiale abſciſſæ PB = $\frac{2vdv}{a}$, conſequenter elementum ſpatii hyperbolici DBPM = $\frac{2a^2vdv}{a^2-v^2}$,

adeoque DBPM $= 2\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$.

Eſt igitur area hyperbolica DBPM ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ propter conſtantem 2 (§. 181. *Arithm.*). Ex antecedentibus conſtat ſpatium a gravi in medio data lege reſiſtente interea temporis deſcriptum, dum celeritatem v acquirit, eſſe ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ (§. 730). Idem igitur ſpatium eſt ut ſpatium hyperbolicum aſymptoticum DBPM.

SCHOLION.

744. *Patet adeo, unum idemque ſpatium deſcenſus multis modis per figuras repræſentari poſſe.*

CAPUT XV.

DE

MACHINIS SIMPLICIBUS.

DEFINITIO 71.

745. *Machina* vocatur, quicquid ad motum producendum conducit, ut vel virium, vel temporis compendio efficiatur.

SCHOLION.

746. *Quoniam effectus machinarum ex ſtructura ipſarum ſecundum immutabiles motuum leges conſequuntur; omnes operationes rerum corporearum mechanica dicuntur, quia agunt ſtructura ſua convenienter & juxta æternas motuum leges. Hinc manifeſtum eſt, illum demum mechanice philoſophari, qui evidenter oſtendit, quomodo vi legum motus effectus rerum ex ſtructura ipſarum conſequantur. Nec difficulter hinc colligitur, paucos admodum eſſe, qui mechanice philoſophantur. Apparet etiam, philoſophiam mechanicam liberam eſſe ab ea labe, quam imperiti eidem adſpergere conantur. Immo nec obſcurum eſt, ſine Matheſeos præſidio de rebus naturalibus temere philoſophari.*

DEFINITIO 72.

747. Per *Potentiam* intelligo vim, quæ machinæ applicata ad motum tendit, ſive actu eundem producat, ſive non. In priore caſu dicitur *Potentia movens*; in poſteriore *Potentia ſuſtentans*.

DEFINITIO 73.

748. *Pondus* appello, quod ope machinæ vel ſuſtentatur, vel movetur, vel motui producendo utcunque reſiſtit.

DEFINITIO 74.

Tab. V. Fig. 58. 749. *Vectis* eſt linea recta inflexilis & gravitatis expers A B, unico ſui puncto C fulcro firmo D innixus, circa quod moveri poteſt.

COROLLARIUM.

750. Omnia ergo inſtrumenta, in quibus rectam circa punctum fixum mobilem concipere licet, cui uno in loco pondus aliquod, in alio potentia in uſu applicatur, ad vectem revocantur, conſequenter quæ de vecte demonſtrantur, ad eadem recte applicantur.

SCHOLION 1.

751. *Ex natura vectis adeo ratio redditur non modo ſtructura & effectuum omnium inſtrumentorum in officinis artificum atque opificum, nec non paſſim in vita communi obviorum; ſed & motuum animalium: quod poſterius primus docuit* Johannes Alphonſus Borellus *in peculiari* de motu animalium *opere.*

SCHOLION 2.

752. *In genere autem notandum eſt, ubi machinarum leges inveſtigamus, non conſiderari materiam, ex qua conſtant, nec materiæ affectiones, neque varias figuras, quæ ob certos uſus inducuntur; ſed tantum eorum rationem haberi, quæ machinæ eſſentiam abſolvunt, ut nempe conſtet, quæ machina quæ tali conveniunt. Quodſi enim contingat, vel materiam, vel figuram, vel aliud quodcunque obſtaculum impedire, quo minus lex iſta accurate obſervari queat; ea ex ſuis principiis ſeorſim ſunt determinanda.*

DEFINITIO 75.

753. *Hypomochlium* eſt fulcrum, cui vectis innititur.

DEFINITIO 76.

754. *Vectis homodromus* eſt, in quo pondus medium locum tenet inter locum potentiæ B & hypomochlium C, vel potentia A medium locum occupat inter locum ponderis B & hypomochlium C. Tab. V. Fig. 59.

DEFINITIO 77.

755. *Vectis heterodromus* eſt, in quo hypomochlium medium locum C tenet inter locum ponderis A & locum potentiæ B. Tab. V. Fig. 58.

DEFINITIO 78.

756. *Axis in peritrochio* eſt circulus AB baſi cylindri concentricus & una cum ipſo circa axem ejus EF mobilis. Cylindrus ille *Axis*, circulus *Peritrochium*, radii circuli (qui ſubinde ſoli comparent) *Scytalæ* appellantur. Tab. V. Fig. 60.

SCHOLION.

757. *Proprie per axem intelligitur virga ferrea, cui circumpoſitus eſt cylindrus ligneus ſchytalis inſtructus. Enimvero rationem paulo ante reddidi* (§. 746), *cur definitiones ad geometriam puram revocari conſultum ſit.*

COROLLARIUM.

758. Axi adeo in peritrochio locus eſt, quotieſcunque in motu machinæ con-

concipere licet circulum circa axem fixum deſcriptum & cylindri huic circumpoſiti plano concentricum.

DEFINITIO 79.

Tab. V. Fig. 61. 759. *Trochlea* eſt circulus circa centrum C volubilis.

DEFINITIO 80.

Tab. V. Fig. 62. 63. 760. *Cochlea* eſt cylindrus rectus AB ſpirali ſimiliter ſulcatus. Deſcribitur autem illa ſpiralis, ſi recta FG motu æquabili in ſuperficie cylindri circumferatur & interea punctum I ex F verſus G motu itidem æquabili deſcendit. *Cochlea mas* eſt, ſi ſuperficies convexa; *Cochlea fæmina* vero, ſi concava fuerit ſulcata.

SHOLION.

Tab. V. Fig. 63. 761. *Mas & fœmina, ſi motus gigni debet, ſemper conjunguntur. Loquor nimirum de cochlea ſimplicis uſu. Si enim cum axe in peritrochio conjungitur; fœmina opus non eſt, cum is vices ejus adimpleat. Sed hoc in caſu machina compoſita prodit.*

DEFINITIO 81.

762. *Cuneus* eſt priſma triangulare, cujus baſes ſunt triangula æquicrura acutangula.

AXIOMA 10.

763. *Potentia æqalis eſt ponderi quod, ſalvo effectu, in ejus locum ſubſtitui poteſt.*

SCHOLION.

764. *Patet ex ipſa æqualitatis definitione* (§. 15. Arithm.)

THEOREMA 178.

765. *Si potentia* B *vecti ſive homodromo, ſive heterodromo applicata ſuſtentat pondus in* A *applicatum, rationem reciprocam diſtantiarum ab hypomochlio ad pondus habet.* Tab. V. Fig. 58.

DEMONSTRATIO.

Sit primum vectis AB heterodromus. Quoniam ſupponitur horizonti parallelus; linea directionis utriusque ponderis erit ad ipſum perpendicularis, centrumque gravitatis unius in A, alterius in B (§. 215). Quodſi ergo pro potentia in B applicata ſubſtituatur pondus æquale; habebimus duo pondera, quorum centra gravitatis recta AB connectuntur, eaque in æquilibrio, cum potentia pondus ſuſtentet *per hypoth.* Eſt igitur C centrum gravitatis commune (§. 122), conſequenter pondus in B, hoc eſt, potentia ad pondus in A reciproce ſe habet ut AC ad CB (§. 144). *Quod erat unum.*

Si vectis fuerit homodromus CB, ponderis G non aliam partem ſuſtentat potentia in B applicata, Tab. V. Fig. 59.

 quam

quam quæ ferenda eſt à fulcro ibi ſuppoſito. Eſt igitur ad pondus A ut diſtantia ponderis ab hypomochlio AC ad diſtantiam potentiæ CB (§.231). *Quod erat ſecundum.*

Tab. V. Fig. 65. Si vectis fuerit inclinatus, hoc eſt, ſi linea directionis ponderis & potentiæ cum vecte AB angulum efficiat obliquum, erunt CD & CE ad lineas directionis AF & EG perpendiculares diſtantiæ a centro motus C (§.229), conſequenter eodem, quo ante, modo demonſtratur, potentiam ſuſtentantem, quæ in B applicatur, eſſe ad pondus in A ſuſpenſum ut DC ad CE (§.272). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

766. Quodſi potentia, quæ pondus ſuſtentat, augeatur, præpollebit, adeoque dato vecte pondus movebit.

SCHOLION.

767. *Facile itaque ad vectem ea omnia transferuntur, quæ ſuperius de æquiponderantibus* (§. 144. & ſeqq. itemque §. 231. & ſeqq. §. 272. & ſeqq.) *demonſtrata ſunt.*

PROBLEMA 118.

Tab. V. Fig. 58. 768. *Data gravitate vectis heterodromi AB, diſtantia centri gravitatis ab hypomochlio CV, diſtantiis ponderis atque potentiæ* AC & CB, *una cum pondere* O, *invenire potentiam, quæ ipſum ſuſtentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Concipiamus vectem gravitatatis expertem & ejus loco in V appenſum pondus eidem æquale G. Quodſi fiat ut AC ad CV ita gravitas vectis ad quartum: reperietur pondus, quod vectis ſuſtentare valet (§. 765).
2. Subtrahatur id a pondere dato, reſiduum erit pondus a potentia ſuſtentandum.
3. Fiat igitur ut CB ad CA ita pondus reſiduum ad quartum: & reperietur potentia in B applicanda, ut dato vecte datum pondus ſuſtentet (§. 765).

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 librarum, O = 300. Fiat

1 — 2 — 10	5 — 1 — 280
10	1
—	—
20	280
300	5
—	280 (56. Potentia.
280	55

PROBLEMA 119.

769. *Datis gravitate vectis heterodromi AB, diſtantia centri gravitatis ab hypomochlio CV, diſtantiis potentiæ atque ponderis* BC Tab. V. Fig. 58.

& CA

& CA, invenire pondus ſuſtentandum.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ut in problemate præcedente pars ponderis a vecte ſolo ſuſtentandi.
2. Quæratur eadem ratione pars altera ponderis, quam potentia in B applicata ſuſtentare valet.
3. Jungantur partes ſigillatim repertæ in unam ſummam. Ita prodit pondus quæſitum.

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10, potentia 56. librarum: invenietur

ponderis pars prima = 20
altera = 280

---

pondus integrum = 300

PROBLEMA 120.

Tab. V. Fig. 58. 770. *Datis gravitate vectis heterodromi* AB, *pondere ſuſtentando* G, *potentia in* B *applicanda, longitudine uc centro gravitatis vectis* V, *invenire centrum gravitatis commune ſeu centrum motus* C.

RESOLUTIO.

1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in centro gravitatis V appenſum pondus G. Quæratur centrum gravitatis commune Z potentiæ in B applicatæ & ponderis G (§. 149.)
2. Subtrahatur ZB ex AB, relinquetur AZ.
3. Concipiatur denique in Z appenſum pondus, gravitati vectis & potentiæ junctim ſumtis æquale, & inveniatur hujus ponderis & ponderis dati O centrum gravitatis commune C (§. 149), quod quærebatur.

E. gr. Sit potentia in B 56, gravitas vectis 10, pondus O 300 librarum, AB = 6, VB = 3. Fiat

66 — 10 — 3

3

30

$ZB = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$
$AB = \frac{66}{11}$

$AZ = \frac{61}{11}$

$366 - 66 - \frac{61}{11}$

h. e. 61 11 $\frac{61}{11}$ 61 (1 = AC
11 61

61

PROBLEMA 121.

771. *Datis gravitate & centro gravitatis* F *vectis homodromi* CB, *pondere* G, *diſtantia ejus ab hypomochlio* CA, *una cum diſtantia potentiæ* CB, *invenire potentiam, quæ pondus ſuſtentare valet.* Tab. V. Fig. 59.

RESOLUTIO.

1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in F appenſum pondus ei æquale, quæraturque poten-

potentia vectem ſolum ſuſtentatura (§. 765).

2. Quæratur porro potentia requiſita ad pondus datum G ſuſtentandum (§. cit.)

3. Addantur potentiæ ſigillatim repertæ in unam ſummam. Ita prodit potentia quæſita.

Sit e. gr. CA = 1, CF = 3, CB = 6, pondus datum 300. gravitas vectis 10. librarum. Reperietur potentia vectem ſuſtentatura 5, pondus vero ſolum ſuſtentatura 50, adeoque potentia integra 55. librarum.

THEOREMA 179.

772. *Si potentia vecte ſive heterodromo, ſive homodromo pondus attollit, ſpatium illius eſt ad ſpatium hujus ut hoc ad potentiam, quæ idem pondus tantum ſuſtentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Tab. V. Fig. 58. 59. Dum pondus attollitur per arcum Aa, potentia movetur per arcum Bb. Sunt vero arcus Aa & Bb ſimiles, in vecte heterodromo ob angulos verticales ad C æquales (§. 156. *Geom.*); in homodromo, quia concentrici, conſequenter $Aa : Bb = AC : CB$ (§. 138. 412. *Geom.*). Sed ut AC ad CB ita potentia ad pondus, quod ſuſtentare valet (§. 756). Ergo ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ idem ſuſtentare valet (§. 167). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

773. Lucrum itaque virium cum temporis diſpendio conjungitur & contra.

PROBLEMA 122.

774. *Stateram conſtruere, hoc eſt, inſtrumentum, quo unico pondere mediante diverſorum corporum gravitatem explorare licet.*

RESOLUTIO.

1. In virga ferrea aut lignea, aut ex quacunque materia alia parata, AB aſſumatur ad arbitrium punctum C & in eo perpendiculariter erigatur examen ſeu lingula CD. Tab. V. Fig. 56.

2. Jugum intra trutinam ſeu ſcapum GF ſupendatur &

3. Brachium minus AC unco AH & lance G alioque quocunque modo oneretur, donec majori æquilibretur, aut non multum ab æquilibrio abſit.

4. Pondus I huc illucque promoveatur, donec cum una, duobus, tribus, quatuor &c. libris in lance G collocatis æquilibretur, notentur puncta, in quibus I ponderat ut una, duo, tres, quatuor &c. libræ.

Ipſa conoructio loquitur, hoc modo unici ponderis I ope pondera corporum admodum differentium explorari poſſe (§. 756).

SCHOLION 1.

775. *Quodſi onera ingentia, quales ſunt currus fœno onuſti, ponderanda, non opus eſt, ut ad æquilibrium reducantur brachia; ingentes vero illæ ſtateræ trutina & lingula non habent opus. Situs enim jugi horizontalis, quantum ad praxin ſufficit, nudo oculo facile dignoſcitur.*

SCHOLION 2.

776. *Empirica ſtateræ, qua utuntur artifices, diviſio geometrica præferenda eſt, qua brachium longius* BC *ejusdem ubique ſpiſſitudinis in partes æquales dividi jubetur. Neque enim materiæ conditio artificumque negligentia patitur, ut conſtructio ſatis ſit accurata.*

SCHOLION 3.

777. *Cum pondera non ubivis locorum æqualia ſint; ſtateræ quoque empirico modo conſtructæ univerſales non ſunt.*

SCHOLION 4.

778. *Utut autem commodiſſimus ſit ſtateræ uſus, quia non multis opus eſt ponderibus & axis minus gravatur; e vita tamen communi eam proſcribi præſtat, quoniam venditores fraudulenti fallacem facile reddunt, nec adeo in promptu ſit fallaciam retegere. Ad communem itaque uſum conſtruuntur libræ æqualium brachiorum. Sed antequam conſtructionem tradamus, fundamenta quædam theoretica ſunt præmittenda.*

THEOREMA 180.

779. *Si libra, cujus centrum motus* C *fuerit ſupra rectam, e cujus extremis pendent pondera æqualia* H & I, *horizonti ſit parallela, quieſcit; ſed ſi inclinatur, tamdiu movetur, donec iterum horizonti ſit parallela.* Tab. V. Fig. 67.

DEMONSTRATIO.

Si enim jugum AB horizonti parallelum, lineæ directionis ponderum ad eam ſunt perpendiculares, (§. 212) adeoque brachia AL & LB coincidunt cum diſtantiis a centro motus (§. 229). Quare cum ſit AL = LB, erit in L centrum gravitatis commune ponderum (§. 244). Ex hoc igitur ſuſpenſa quieſcunt (§. 124). *Quod erat unum.*

Quodſi ex ſitu ſuo dimoveatur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & GF cum eodem parallela: erunt diſtantiæ GE & EF (§. 229), quæ cum inæquales ſint, pondera non æquilibrantur (§. 765), ſed alterum I præponderat (§. 152): quod cum deſcendat, redit libra in ſtatum horizonti parallelum. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 121.

Tab. V. Fig. 68. 780. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onuſta, cujus centrum motus infra jugum AB, fuerit horizonti parallela, quieſcit; ſi vero inclinatur, in ſitum horizontalem non revertitur, ſed deſcendit pondus unum, donec libra pervenerit in ſitum priori contrarium.*

DEMONSTRATIO.

Si jugum AB fuerit horizontale, erunt lineæ directionis ponderum H & I ad id perpendiculares (§. 212), adeoque diſtantiæ a centro motus rectæ AL & LB (§. 229). Eſt vero AL = LB, ex natura libræ, adeoque cum pondera itidem æqualia ſint, *per hypoth.* centrum gravitatis commune eorundem eſt in C (145), adeoque ſitum non mutat (§. 114). *Quod erat unum.*

Si jugum inclinetur, ducatur DC ad horizontem perpendicularis & per E recta GF eidem parallela; erunt diſtantiæ GE & EF a centro motus C inæquales. Præponderat ergo H ex majori diſtantia EG adeoque continuo deſcendit, donec A, B & L ſint in eadem recta horizontali (§ 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 122.

781. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onuſta, cujus centrum motus C in ipſo jugo AB, fuerit horizonti parallela, quieſcit, nec quomodocunque inclinata ſitum mutat.* Tab. V. Fig. 69.

DEMONSTRATIO.

Prius eodem modo patet, quo in theoremate præcedente. Poſterius ita demonſtratur. Ducatur DE per C horizonti parallela, erunt DC & CE diſtantiæ ponderum H & I (§. 229). Sed ob rectos ad F & D atque verticales angulos ad C æquales (§. 156. *Geom.*), itemque AC = CB, ex natura libræ, erit DC = CE (§. 252. *Geom.*). Quare cum pondera H & I æqualia ſint *per hypoth.* adhuc æquilibrantur (§. 765). Libra igitur quieſcit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 123.

782. *Libram conſtruere, hoc eſt, inſtrumentum, in cujus extremitatibus appenſa gravia æqualia æquiponderant in ſitu horizontali.*

RESOLUTIO.

1. Jugum AB bifariam dividatur in C, ita ut brachia AC & CB ſint ejusdem longitudinis, ſintque tum brachia cum uncis ſuis Tab. V. Fig. 72.

A &

A & B, tum lances D & E ejuſdem prorſus ponderis, ita ut jugum ex puncto C appenſum tam lancibus inſtructum, quam ſine iisdem ſitum tueatur horizontalem.

2. In medio jugi puncto C excitetur perpendiculariter examen ſive lingula CF.

3. Jugum denique intra trutinam HI ita ſuſpendatur, ut centrum motus C ſit paulo ſupra jugum ſeu rectam AB, quæ appenſionum puncta A & B conjungit, vel ut centrum motus ſit in ipſa recta AB.

Dico, ſi libra ex trutina HI ſuſpenſa examen intra eandem abſcondatur, gravia lancibus impoſita eſſe æqualia, ſeu gravitatem utriusque eſſe eandem.

DEMONSTRATIO.

Si libra ex I ſuſpendatur, erit trutina HI ad lineam horizontalem perpendicularis (§. 215.). Quodſi ergo lingula intra eam abſconditur, cum ea ſit ad jugum AB perpendicularis *per conſtructionem*, jugum AB erit horizonti parallelum. Quare cum centrum motus C ſit vel in jugo AB, vel ſupra jugum, *per conſtruct.* pondera utrinque ſuſpenſa æqualia ſunt (779. 781). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

783. Si brachia ſint inæqualia, libra doloſa eſt.

SCHOLION 1.

784. *Præſtat brachia eſſe longiora, quam breviora, quia idem error in diviſione brachiorum admiſſus minorem in ponderibus producit, ſi brachia longiora, quam ſi breviora. Fac enim brachium* AC *eſſe juſto longius uno ſcrupulo quarto ſeu una decima linea. Si brachium* AB $= 5''$, *erit* BC : AC $= 500 : 501$. *Si* AB $= 5'$; *erit* BC : AC $= 5000 : 5001$. *In caſu itaque poſteriori differentia brachiorum eſt* $\frac{1}{5000}$; *in priore* $\frac{1}{500}$ *brevioris. Hinc & pondus majus in caſu poſteriore excedere debet minus* $\frac{1}{5000}$ *ſui, in priore autem* $\frac{1}{500}$ *ſui.*

SCHOLION 2.

785. *Vulgares libræ ita conſtruuntur, ut centrum motus ſit paulo altius jugo, quo libra ex ſitu horizontali emota, ponderibus utrinque æqualibus appenſis, non quieſcat, niſi eidem reſtituta* (780). *Non tamen nimis ab eo removeri debet, ut lingula minores declinationes indicet.*

SCHOLION 3.

786. *Ne affrictus impediat jugi e ſitu horizontali emotionem, axis ejus, qui trutinæ inſeritur, cylindricus ſit & foramen in trutina rotundum, ut contactus exiguus evadat. Immo motus jugi pernicior evadit, ſi axis in aciem deſinat, qua parte trutinam tangit. Unde & jugum leve ac tenue eſſe debet, quantum per materiam ponderandam fieri poteſt*

poteſt, ut minori vi e ſitu ſuo dimoveatur ſicque accuratius indicet æquilibrium.

PROBLEMA 124.

787. *Libram propoſitam examinare, utrum accurata ſit, nec ne.*

RESOLUTIO.

Permutentur lances aut pondera in iis æquilibrata. Quodſi enim maneat æquilibrium, libra accurata eſt; ſin minus, doloſa.

DEMONSTRATIO.

Si enim libra doloſa eſt, brachia inæqualia ſunt (§. 783) adeoque lanx ex majori brachio ſuſpenſa levior altera (§. 765). Quare ſi lancem leviorem e minori, graviorem e majori brachio ſuſpendas: præponderabit e majori brachio ſuſpenſa adeoque æquilibrium tollitur (§. 152). *Q. e. d.*

PROBLEMA 125.

Tab. V. Fig. 70. 788. *Libra doloſa verum pondus mercis explorare.*

RESOLUTIO.

1. Merce in lance E collacata, notetur pondus in altera D ipſi æquilibratum.
2. Eadem tranſlata in D, notetur pondus in E ipſi æquilibratum.
3. Pondera iſta in ſe invicem ducantur &
4. Ex facto radix quadrata extrahatur. Dico hanc eſſe verum mercis pondus.

Sit e. gr. pondus in E = 10, in D = 9 librarum, repetietur verum mercis pondus $9\frac{18}{19}$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut AC ad BC ita merx ad pondus in D poſitum & ut AC ad BC ita pondus in E ad mercem (§ 765). Ergo mercis pondus eſt medium proportionale inter pondera in lancibus D & E collocata (§. 167. 156. *Arithm.*), conſequenter æquale radici ex facto ponderum in ſe invicem extractæ (§. 301. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

789. Si verum mercis pondus inventum, ratio brachiorum non amplius latet. Eſt enim AC ad CB ut pondus mercis ad pondus in D ipſi æquilibratum (§. 765), e. gr. in noſtro exemplo ut 948 ad 900 ſeu ut 237 ad 225 (§. 181. *Arithm.*

COROLLARIUM 2.

790. Data ratione brachiorum AC & CB facile determinatur error in æquilibrio admiſſus (§. 765). Æquiponderent e. gr. in lance E 100 libræ merci in altera D collocatæ. Ut habeatur quæſitum, fiat

```
237—225—100
      100    237)225.00(95 fere
    ———         )2133.  (
    2250         ———
                 1170
                 1185
```

Dolus ergo committitur 5 librarum.

COROLLARIUM 3.

791. Invenitur quoque pars, qua brachium longius excedit minus, iisdem datis. Sit enim jugum integrum 100 partium. Fiat ut ſumma brachiorum 237 + 225 ſeu 462 ad majus 237 ita 1000 ad idem brachium in partibus jugi milleſimis 513 fere. Sed ex natura libræ eſſe debet 500: excedit ergo veram quantitatem particulis 13, qualium ſcilicet jugum eſt 1000.

THEOREMA 183.

ab. E. 8· 7· 792. *Si potentia ope axis in peritrochio ſuſtentet pondus* G *ſitque linea directionis* AL *ad peripheriam rotæ vel ad ſcytalam perpendicularis; erit ut radius axis* CE *ad radium rotæ* CA *ſeu longitudinem ſcytalæ ita potentia ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Quodſi potentia in A applicata deprimit rotam vel ſcytalam, perinde eſt ac ſi vecte heterodromo ACE, cujus centrum motus in C, pondus G ſuſtentaret. Si vero in *a* applicata eandem attollit, perinde eſt ac ſi vecte homodromo *a* EC pondus idem G ſuſtentaret. Omnes enim machinæ partes reliquæ ad ponderis ſuſtentationem nil conferunt, cum utrinque ſibi mutuo æquilibrentur, ut machina tanquam gravitatis expers conſiderari poſſit. Jam cum linea directionis potentiæ in A vel *a* ſit ad AC vel *a* C perpendicularis, *per hypoth.* & funis EG a pondere G extenſus ad EC horizontalem *per hypoth.* ſimiliter normalis (§. 215); erit ut CE ad CA vel ut EC ad C*a* ita potentia ad pondus (§. 765). *Q. e. d.*

THEOREMA 184.

793. *Si potentia in* F *deprimat rotam juxta lineam directionis* FD *ad radium rotæ obliquam ſed directioni perpendiculari parallelam: ad potentiam, quæ juxta directionem perpendicularem* AL *agit, eam habet rationem, quam ſinus totus ad ſinum anguli directionis* DFC. Tab. VI. Fig. 75.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FD perpendicularis ad AC, *per hypoth.* erit DC potentiæ in F applicatæ diſtantia a centro motus C (§. 229). Eſt ergo ut potentia in F ad pondus G ita EC ad CD (§. 272) & ut potentia in A ad pondus G ita EC ad

CA (§. 792). Ergo potentia in F ad potentiam in A ut DC ad AC (§. 199. *Arithm.*). Sed ſi AC vel FC (§. 40. *Geom.*) ſumatur pro ſinu toto, erit DC ſinus anguli DFC (§. 2. *Trigon.*). Potentia igitur in A eſt ad potentiam in F ut ſinus totus ad ſinum anguli directionis DFC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

794. Quare cum diſtantia potentiæ in A ſit radius CA; dato angulo directionis DFC inveniri poteſt diſtantia DC.

Sit e. gr. FC = 4' & DFC = 48°. Calculus ita ſubducetur:

Log. ſin. Tot.	100000000
Log. FC	0.6020600.
Log. ſin. DFC	98710735
Log. DC	10.4731335,

cui quam proxime reſpondent in tabulis 2' 9'' 7'''.

THEOREMA 185.

Tab. VI. Fig. 71. 795. *Potentiæ in diverſis punctis F & K rotam juxta directiones FD & KI perpendiculari AL parallelas deprimentes ſunt inter ſe ut diſtantiæ a centro motus CD & CI reciproce.*

DEMONSRATIO.

Eſt enim potentia in F ad pondus G ut EC ad CD & idem pondus G ad potentiam in K ut IC ad CE (§. 799). Ergo potentia in F ad potentiam in K ut IC ad CD (§. 198. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

796. Creſcente adeo diſtantia a centro motus, potentia decreſcit & contra; pondere manente eodem.

COROLLARIUM 2.

797. Quare cum radius AC ſit diſtantia maxima & potentiæ juxta lineam directionis ad eundem perpendicularem agenti conveniat (§. 792); erit potentia perpendicularis omnium minima, quæ datum pondus G ſuſtentare valent juxta diverſas directiones parallelas agentes.

COROLLARIUM 3.

798. Si ex centro C erigatur radius CH ad AC perpendicularis, erit FD eidem parallela (§. 256. *Geom.*). Quare ſi ex F demittatur perpendicularis FM, erit eadem ipſi AC parallela (§. *cit.*), conſequenter FM = DC (§. 257. *Geom.* Cum adeo FM ſit diſtantia potentiæ in F applicata; in praxi facile definitur abſque calculo.

THEOREMA 186.

799. *Si potentia juxta perpendicularem* AL *deprimit rotam & pondus* G *attollit, erit ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis, ut pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet.* Tab. VI. Fig. 71.

DE-

DEMONSTRATIO.

Dum rota ſemel circumvolvitur, potentia integram ejus peripheriam percurrit. Interea autem pondus attollitur per ſpatium peripheriæ axis æquale. Eſt itaque ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis ut peripheria rotæ ad peripheriam axis, conſequenter ut radius rotæ AC ad radium axis CE (§. 412. *Geom.*). Sed ut AC ad CE ita pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet, (§. 729). Ergo ſpatium potentiæ eſt ad ſpatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet. *Q. e. d.*

PROBLEMA 126.

800. *Dato pondere dataque potentia ipſum ſuſtentatura axem in peritrochio conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur radius axis ponderi ſuſtentando conveniens, ne ſcilicet axis frangatur.
2. Fiat ut potentia ad pondus ita radius axis ad radium rotæ, ſeu longitudinem ſcytalæ (§. 792).

COROLLARIUM.

801. Quodſi potentia fuerit pars ponderis exigua, radius rotæ enormis prodit. E. gr. Sit pondus 3000, potentia 50 librarum; erit radius rotæ ad radium axis ut 60 ad 1. Hinc ſi radius axis non excederet pedem dimidium, foret radius rotæ pedum 30.

SCHOLION.

802. *Huic malo medela affertur, rotas cum axibus multiplicando, & ut una alteram circumagere valeat, dentibus vel etiam tympanum paxillis inſtruendo.*

THEOREMA 187.

803. *Si pluribus rotis dentatis potentia aliqua, cujus linea directionis* KL, *peripheriam ultimæ tangit, pondus* H *ſuſtentat; erit ea in ratione compoſita omnium earum, quas radii axium ad radios rotarum habent, nempe* CB : CD, EF : EG, HI : HK. Tab. VI. Fig. 72.

DEMONSTRATIO.

Quodſi concipiamus potentiam applicari in D: erit ea ad pondus A ut CB ad CD (§. 792), conſequenter = A. CB : CD (§. 297. *Arithm.*). Axis igitur DF tantopere gravatur, ac ſi pondus A. CB : CD appenderetur. Concipiamus itaque porro potentiam in G applicari, quæ hoc pondus ope rotæ alterius ſolius, conſequenter pondus A ope duarum ſuſtentet. Cum ſit ad pondus A. CB : CD ut EF ad EG (§. 792); reperietur = A. CB. EF : CD. EG (§.

 297.

297. *Arithm.*). Quare axis tertius GI tantopere gtavatur, ac ſi pondus A. CB. EF : CD. EG appenderetur. Quoniam potentia in K eſt ad hoc pondus ut HI ad HK (§. 792); reperietur ea = A. CB. EF. HI : CD. EG. HK (§. 297. *Arithm.*) & ita porro, ſi plures fuerint rotæ. Eſt igitur potentia in K applicata ad pondus A, quod ope plurium rotarum ſuſtentat, ut A. CB. EF. HI : CD. EG. HK ad A, hoc eſt, ut A. CB. EF. HI ad A. CD. EG. HK (§. 178. *Arithm.*), adeoque & ut CB. EF. HI ad CD. EG. HK (§. 181. *Arithm.*), conſequenter in ratione compoſita CB : CD, EF : EG & HI : HK (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

804. Quodſi pondus ducas in factum ex radiis axium & productum dividas per factum ex radiis rotarum; potentia ipſum ſuſtentatura reperitur, quæ aucta idem attollet. Sit e. gr. A = 6000 librarum, BC = 6″, CD = 34″, EF = 5″, EG = 35″, HI = 4″, HK = 27″; erit BC. EF. HI = 120. & CD. EG. IK = 32130 & hinc potentia = 6000. 120 : 32130 = $22\frac{1314}{3213}$ = $22\frac{146}{357}$ = $22\frac{2}{5}$ quam proxime.

COROLLARIUM 2.

805. Si vero potentiam ducas in factum ex radiis rotarum, & productum dividas per factum ex radiis axium; prodibit pondus, quod ſuſtentare valet. Sit e. gr. Potentia $22\frac{146}{357}$ librarum, reliqua omnia ſint ut ante; reperietur pondus 6000.

SCHOLION.

806. *Loco ultimæ rotæ in praxi adhibetur manubrium* ABCD, *ubi* AE *radio axis,* CD *radio rotæ reſpondet.*

PROBLEMA 127.

807. *Data potentia datoque pondere, invenire numerum rotarum & in unaquaque rationem radii axis ad radium rotæ definire, ita ut potentia peripheriæ rotæ ultimæ applicata juxta directionem perpendicularem pondus datum ſuſtentet.* Tab. VI. Fig. 73.

RESOLUTIO.

1. Dividatur pondus per potentiam.
2. Quotus diſpergatur in factores.

Dico, numerum factorum indicare numerum rotarum, radiosque axium ſe habere ad radios rotarum ut unitatem ad radios ſingulos.

Sit e. gr. pondus 3000 librarum & potentia 60; erit quotus 500, qui reſolvitur in factores 4. 5. 5. 5. Quatuor igitur conſtrui poſſunt rotæ, in quarum una radius axis eſt ad radium rotæ ut 1 ad 4, in reliquis ut 1 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Si pondus per potentiam dividitur,

ditur, unitas eſt ad quotum ut potentia ad pondus (§. 66. *Arithm.*). Eſt igitur potentia ad pondus in ratione compoſita unitatis ad ſingulos factores (§. 159. *Arithm.*). Quare ſi radii axium fiant ad radios rotarum ut unitas ad eoſdem factores; potentia erit ad pondus in ratione compoſita radiorum axium ad radios rotarum. Potentia igitur pondus ſuſtentare valet ope machinæ conſtructæ (§. 803.). *Q. e. d.*

SHOLION.

808. *Quoniam in exceſſu peccari nequit, conſultum eſt, ubi potentia non exacte dividit pondus, quotum unitate majorem aſſumere. Similiter unam, immo aliquot unitates quoto addere licet, ſi in factores commode diſpergi nequit.*

THEOREMA 188.

Tab. VI. Fig. 72. 809. *Si ope duarum rotarum potentia movet pondus, revolutiones tardius motæ ſunt ad revolutiones celerius motæ ut peripheria axis celerius motæ ad peripheriam rotæ, cui occurrit.*

DEMONSTRATIO.

Interea dum rota tardius mota M unam revolutionem abſolvit, peripheria axis FD, qui eidem occurrit, totam ejus peripheriam emetiri debet. Toties igitur axis FD, conſequenter rota N, circumvolvitur, antequam rota M unam revolutionem abſolvit, quoties peripheria axis FE in peripheria rotæ M continetur. Sunt adeo revolutiones rotæ tardius motæ ad revolutiones velocius motæ ut peripheria axis FD ad peripheriam rotæ M, cui occurrit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

810. Eædem igitur revolutiones ſunt ut radius axis FE ad radium rotæ DC (§. 422. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

811. Cum numerus dentium in axe FD ſit ad numerum dentium in peripheria rotæ M ut peripheria illius ad peripheriam hujus; erunt revolutiones rotæ tardius motæ M ad revolutiones celerius motæ N, ut numerus dentium ſeu paxillorum in axe ad numerum dentium in rota M, cui iſte occurrit.

THEOREMA 189.

812. *Si ope plurimum rotarum* M, N, O *&c. potentia movet pondus* A *erunt revolutiones rotæ celerrime motæ* O *ad revolutiones tardisſime motæ* M *in ratione compoſita ex rationibus reciprocis peripheriarum axium* IG, FD *&c. & peripheriarum rotarum* N, M *&c. quibus illi occurrunt.* Tab. VI. Fig. 72.

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M & N m & n, peripheriæ axium DF & GI a & b: erit ut a ad m ita 1 ad numerum revolutionum rotæ N (§. 809) $= m:a$ (§. 302. *Arithm.*). Eſt vero porro ut b ad n ita $m:a$ ad numerum revolutionum rotæ O (§. 809) $= mn : ab$ (§. 302. *Arithm.*). Quare revolutiones rotæ celerrime motæ O ſunt ad revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ut $mn : ab$ ad 1, hoc eſt ut mn ad ab (§. 178. *Arithm.*) conſequenter in ratione compoſita ex rationibus peripheriarum rotarum M & N ad peripherias axium DF & GI, qui ipſis occurrunt, (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

813. Quoniam numeri dentium ſunt in ratione peripheriarum; revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ſunt ad revolutiones rotæ velociſſime motæ O in ratione compoſita earum, quas habent numeri dentium in axibus FD, IG &c. ad numeros dentium in rotis N & M &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 2.

814. Quia peripheriæ ſunt ut radii (§. 412. *Geom.*), revolutiones rotæ tardiſſime motæ M ſunt ad revolutiones rotæ velociſſime motæ O in ratione compoſita earum, quas habent radii axium GH, DE &c. ad radios rotarum GE, DC &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 3.

815. Quare ſi factum ex radiis rotarum GE, DC &c. ducas in numerum revolutionum rotæ tardiſſime motæ M & productum dividas per factum ex radiis axium, qui ipſis occurrunt, GH, DE &c. prodit numerus revolutionum rotæ velociſſime motæ O (§. 301. *Arithm.*). E. gr. ſit GE = 8, DC = 12, GH = 4, DE = 3, & revolutio rotæ M una, erit numerus revolutionum rotæ O = 96 : 12 = 8.

PROBLEMA 128.

816. *Datis revolutionibus rotæ* Tab.
velociſſime circumactæ O *interea* VI.
abſolutis, dum tardiſſime mota M Fig.
ſemel in orbem redit: invenire 71.
dentium in axibus & rotis numerum.

RESOLUTIO.

1. Numerus datarum revolutionum diſpergatur in factores.
2. Numerus dentium ſeu paxillorum in axibus pro arbitrio aſſumtus ducatur ſigillatim in ſingulos factores.

Dico, facta exhibere numeros dentium in peripheriis rotarum, quibus totidem axes occurrunt.

E. gr. Si rota velociſſime mota 40 revolutiones abſolvat, dum tardiſſime mota ſemel circumagitur; reſolvatur numerus 40 in factores 5 & 8. Hinc intelligitur, duabus opus eſſe rotis totidemque axibus dentatis, qui iſtis occurrant. Quodſi

axis

axis habuerit dentes 6; rota una habebit 30, altera 48, tertia, cui potentia applicatur, nullis inſtruenda, figuram ſortitura pro potentiæ applicandæ conditione.

DEMONSTRATIO.

Revolutiones rotæ tardisſime motæ ſunt ad revolutiones velocisſime circumactæ in ratione compoſita numerorum dentium in axibus ad numeros dentium in rotis, quibus occurrunt (§. 811). Cum itaque numeros dentium in rotis invenerimus, numeris dentium in axibus per factores multiplicatis, in quos numerus revolutionum rotæ velocisſime circumactæ reſolvitur, fitque adeo unitas ad factores hosce ut numerus dentium in axibus ad numerum dentium in rotis, quibus occurrunt (§. 66. *Arithm.*); revolutiones rotæ tardisſime motæ erunt ad revolutiones velocisſime circumactæ in ratione compoſita unitatis ad factores numeri revolutionum poſteriorum dati, conſequenter ut unitas ad ipſum hunc numerum (159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 190.

817. *Si ope plurium rotarum potentia movet pondus, ſpatium ponderis eſt ad ſpatium potentiæ ut potentia ſuſtentans ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M, N, O &c. *a*, *b*, *c* &c. axium CB, DE, GH &c. *d*, *e*, *f* &c. erit numerus revolutionum rotæ O interea peractarum, dum M ſemel in orbem redit, *ab*:*ef* (§. 812). Jam ſi rota M ſemel circumagitur, ſpatium a pondere percurſum æquatur peripheriæ axis BC, ſpatium vero potentiæ, peripheriæ rotæ O per numerum revolutionum interea abſolutarum multiplicatæ. Eſt igitur ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut *d* ad *abc* : *ef*, conſequenter ut *def* ad *abc* (§. 178. *Arithm.*). Sed *d*:*a* = CB:CD, *e*:*b* = DE : EG, *f* : *c* = GH : HK (§. 412. *Geom.*) adeoque *def*: *abc* = CB. DE. GH: CD. EG. HK (§. 218. *Arithm.*). Ergo ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut CB. DE. GH ad CD, EG. HK (§. 167. *Arithm.*) & ideo ut potentia ſuſtentans ad pondus (§. 812). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 72.

COROLLARIUM.

818. Quo major itaque potentia, eo velocior ponderis motus; quo illa minor, eo hic tardior.

THEOREMA 191.

819. *Spatia ponderis atque potentiæ ſunt in ratione compoſita revolutionum rotæ tardisſime mo-*

tæ ad revolutiones rotæ velociſſime motæ & peripheriæ axis iſtius ad peripheriam hujus.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus revolutionum rotæ tardiſſime motæ $= m$, numerus revolutionum velociſſime motæ $= n$, peripheria axis in rota priore $= a$, peripheria poſterioris $= b$. Cum in una revolutione ſpatium ponderis ſit a, potentiæ b; erit ſpatium ponderis, durantibus revolutionibus m, $= ma$; ſpatium potentiæ, durantibus revolutionibus n, $= nb$. Eſt igitur ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut ma ad nb, hoc eſt, in ratione compoſita revolutionum m & n, atque peripheriæ axis rotæ tardiſſime motæ a & peripheriæ rotæ velociſſime motæ b (§. *Arithm.* 159). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

820. Cum ſpatia ponderis & potentiæ ſint reciproce ut potentia ſuſtentans ad pondus (§. 817); potentia ſuſtentans pondus erit ad pondus in ratione compoſita revolutionum rotæ tardiſſime motæ ad revolutiones velociſſime motæ & peripheriæ axis iſtius ad peripheriam hujus.

PROBLEMA 129.

821. *Data peripheria axis rotæ tardiſſime motæ cum peripheria rotæ velociſſime motæ & ratione revolutionum rotæ iſtius ad revolutiones hujus, invenire ſpatium, quod potentia decurrit, donec pondus emetiatur ſpatium datum.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria axis rotæ tardiſſime motæ in antecedentem & peripheria rotæ velociſſime motæ in conſequentem rationis.
2. Quæratur ad hæc duo facta & ſpatium ponderis datum numerus quartus proportionalis: erit is ſpatium potentiæ quæſitum. (§. 819).

Sit e. gr. ratio revolutionum rotæ tardiſſime motæ ad revolutiones rotæ velociſſime motæ $= 2:7$, & ſpatium ponderis 30 pedum. Peripheria axis rotæ tardiſſime motæ ſit ad peripheriam velociſſime circumactæ ut 3 ad 8. Reperietur ſpatium potentiæ $= 7.8.30 : 2.3 = 7.4.10 = 280'$.

PROBLEMA 130.

822. *Data peripheria rotæ velociſſime motæ, una cum numero revolutionum ejusdem & ratione tam peripheriarum ejusdem rotæ atque axis rotæ tardiſſime motæ, quam revolutionum utriusque, invenire ſpatium ponderis.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria rotæ velociſſime motæ in numerum revolutionum ejusdem, factum erit potentiæ ſpatium.
2. Ducantur quoque in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
3. Quæratur ad hæc duo facta & ſpatium potentiæ modo inventum numerus quartus proportionalis: erit is ſpatium ponderis quæſitum (§. 819).

E. gr. Sit peripheria rotæ velociſſime motæ 10, ratio ejus ad peripheriam axis, ex quo pondus ſuſpenditur, = 8 : 3, numerus revolutionum = 28, ratio revolutionum = 7 : 2. Reperietur ſpatium ponderis = 3. 2. 28. 10 : 8. 7 = 3. 10 = 30.

PROBLEMA 131.

823. *Data ratione peripheriarum rotæ velociſſime motæ atque axis rotæ tardiſſime motæ, itemque revolutionum utriusque, una cum pondere, invenire potentiam, quæ id ſuſtentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
2. Quæratur ad factum antecedentium, factum conſequentium & pondus datum numerus quartus proportionalis; erit is potentia quæſita (§. 820).

Sit ratio peripheriarum 8 : 3, ratio revolutionum 7 : 2, pondus 2000. Reperietur potentia = 3. 2. 2000 : 8. 7 = 12000 : 56 = 214$\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

824. *Non abſimili modo pondus invenitur, ſi potentia detur & ratio tam peripheriarum axis rotæ tardiſſime motæ & rotæ velociſſime circumactæ, quam revolutionum utriusque.*

PROBLEMA 132.

825. *Datis revolutionibus rotæ velociſſime motæ interea abſolvendis, dum tardiſſime mota ſemel in orbem redit, una cum ſpatio, per quod pondus elevari debet & peripheria rotæ tardiſſime motæ, invenire tempus elevationi quæſitæ impendendum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat: ut peripheria axis rotæ tardiſſime motæ ad ſpatium ponderis datum, ita numerus revolutionum rotæ velociſſime motæ datus ad quartum proportionalem, qui erit numerus revolutionum interea abſolvendarum, dum pondus emetitur ſpatium datum.
2. Per experientiam determinetur numerus revolutionum rotæ vel-

velociſſime circumactæ intra unius horæ ſpatium aut tempus datum quodcunque abſolvendarum.

3. Per hunc dividatur numerus quartus proportionalis paulo ante inventus.

Quotus erit tempus elevationi ponderis impendendum. *Q. e. d.*

THEOREMA 192.

Tab. V. Fig. 61. 826. *Si potentia* P *ope trochleæ ſimplicis* Q *pondus ſuſtentat, ita ut linea directionis utriusque tangat peripheriam: erit huic æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lineæ directionis potentiæ atque ponderis peripheriam trochleæ tangunt, *per hypoth.* ad radios AC & CB perpendiculares ſunt (*§.* 304. *Geom.*). Jam cum ad ſuſtentationem præter rectam ACB partes reliquæ nil conferant, ſitque centrum motus in C (*§.*759); potentia erit ad pondus ut CB ad CA (*§.*765). Sed CB = CA (*§.*759). Ergo potentia ponderi æqualis. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

827. Trochlea igitur ſimplex, ſi lineæ directionis potentiæ atque ponderum peripheriam tangunt, nec juvat, nec impedit potentiam, ſed ejus directionem tantum mutat.

COROLLARIUM 2.

828. Utimur ergo trochlea, quoties potentiæ trahentis directio verticalis in horizontalem, aut ſurſum tendens in tendentem deorſum & contra mutari debet.

SCHOLION 1.

829. *Hoc ipſo ſecuritati trahentium ſæpiſſime proſpicitur. Fac enim pondus ingens eſſe ad inſignem altitudinem attollendum ab operariis funem trahentibus. Quodſi contingat funem* DE *abrumpi & operariorum capitibus imminere pondus, in extremo vitæ periculo conſtituuntur. Enimvero ſi ope trochleæ* B *directio verticalis* AB *in horizontalem* BC *mutatur rupto fune* DE *nihil metuendum periculi.* Tab. VI. Fig. 74.

SCHOLION 2.

830. *Hac ipſa mutatio lineæ directionis ope trochlearum in horizontalem hunc etiam præſtat uſum, ut, ſi potentia aliqua ſecundum unam directionem plus virium impendere poſſit, quam ſecundum alteram, vi maxima utamur, nec non ut potentiis uti liceat, quæ juxta datam directionem agere non poſſent. E. gr. equus non trahit ſecundum directionem verticalem, trahit tamen ſecundum horizontalem. Verticalis igitur tractio ſi mutatur in horizontalem, equus pondus attollere poterit.*

THEOREMA 193.

Tab. VI. Fig. 75. 831. *Si potentia in* E *applicata ſecundum lineam directionis* BE, *quæ*

quæ trochleam in B *tangit & funi* AD *parallela eſt, pondus* F *ex centro trochleæ* C *ſuſpenſum ſuſtentet; ponderis ſubdupla eſt.*

DEMONSTRATIO.

Patet enim præter rectam AB partes trochleæ reliquas nihil conferre ad ponderis F ſuſtentationem. Cum vero trochlea ſit circa centrum C mobilis (§. 759) in eo erit centrum motus. Et quia tam linea directionis ponderis CF, quam linea directionis potentiæ BE ad AB perpendicularis, *per hypoth.* erit potentia in E ad pondus F ut AC ad AB (§. 765). Eſt vero AC = $\frac{1}{2}$ AB (§. 759). Ergo potentia ponderis F ſubdupla. *Q. e. d.*

SHOLION.

832. *Cum trochlea cum unco ſuo & loculamento, quod in uſu abeſſe nequit, una attollatur a potentia ſurſum trahente ſecundum directionem* EB*, ejus gravitas ponderi* F *addenda eſt.*

THEOREMA 194.

Tab. VI. Fig. 77. 833. *Si potentia in* B *applicata ope polyſpaſti ſuſtentet pondus* F*, ita ut omnes funes* AB, HI, GF, EL, CD *ſint inter ſe paralleli; erit potentia ad pondus ut unitas ad numerum funium* HI, GF, EL, CD, *quæ a pondere* F *trahuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam funes omnes ſunt inter ſe paralleli adeoque a centris trochlearum ſuarum intervallo radiorum utrinque diſtant; nulla eſt ratio, cur a pondere F unus magis trahatur quam alter. Pondus igitur æquali vi omnes extendit adeoque æqualiter per eos dividitur, ita ut, ſi fuerint funes quatuor, perinde ſit ac ſi tantum pars quarta ponderis ex fune CD ſuſpenderetur. Potentia igitur in B applicata cum æqualis ſit ponderi ex fune CD ſuſpenſo (§. 826); quartam non niſi ponderis partem in præſenti caſu ſuſtentat, hoc eſt, in genere eam ad pondus rationem habet, quam unitas ad numerum funium, quos pondus F extendit. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

834. *Ne polyſpaſtorum altitudo in nimium excreſcat, ſi ex pluribus trochleis componantur; trochleæ ita junguntur, ut tam omnes ſuperiores, quam omnes inferiores circa communem axem verſatiles exiſtant. Tum vero omnes inter ſe æquales eſſe debent, ut funes ſint paralleli.* Tab. VI. Fig. 76.

SCHOLION 3.

835. *Uſus trochlearum inſignis eſt in ponderibus elevandis, tum quod machina ſpatium exiguum occupet & facile huc illucque transportetur, tum quod*

inſigni virium compendio pondus ſatis ingens attolli poſſit.

COROLLARIUM 1.

836. Cum numerus trochlearum inferiorum & ſuperiorum ſimul ſumtarum æqualis ſit numero funium inferiores ſuſtentantium; potentia pondus F ope polyſpaſti ſuſtentans eſt ad pondus ut unitas ad numerum trochlearum inferiorum & ſuperiorum ſimul ſumtarum.

COROLLARIUM 2.

837. Datis igitur trochlearum numero & potentia, facile invenitur pondus ſuſtentandum; potentia nempe per pondus multiplicatur. Sit e. gr. potentia 50 librarum, numerus trochlearum 5; erit pondus 250.

SCHOLION 3.

838. Dechales (a) *autor eſt, experientia conſtare, quod homo ſimpliciter ſolo inſiſtens 150 libras elevare poſſit. Cum igitur 150 librarum potentiâ ope polyſpaſti ex 6 trochleis compoſiti 900 libras ſuſtentare poſſit; evidens eſt, quod unus homo ejus ope pondus 900 fere librarum attollere poſſit.*

SCHOLION 4.

Tab. VI. Fig. 76. 839. *Mire multiplicantur trochlearum vires, ſi polyſpaſti plures conjunguntur, tum enim potentia in polyſpaſto uno ad attollendum pondus Q applicanda vicem ſubit ponderis F ex polyſpaſto altero appenſi. Ponamus igitur pondus Q eſſe 1000 librarum & trochleas in unoquoque polyſpaſto quatuor; erit ergo pondus F ex altero polyſpaſto ſuſpenſum nonniſi quarta illius pars, nempe 250, conſequenter potentia quarta pars hujus, hoc eſt, decima ſexta totius, $62\frac{1}{2}$.*

PROBLEMA 133.

840. *Datis pondere atque potentia, invenire numerum trochlearum, ex quibus componendus eſt polyſpaſtus.*

RESOLUTIO.

Pondus per potentiam dividatnr, quotus erit numerus quæſitus (§. 836).

Sit e. gr. pondus 600 librarum, potentia 150; erit numerus trochlearum 4: quarum omnium eadem diameter, ſi duæ in parte inferiore, duæ in ſuperiore circa communem axem verſatiles conſtruantur (§. 834).

THEOREMA 195.

841. *Si potentia trochlearum ope movet pondus, erit ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis ut pondus ad potentiam ſuſtentantem.* Tab. VI. Fig. 76.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim pondus F per pedem unum attolli: evidens eſt, funium omnium, ex quibus trochleæ inferiores cum pondere ſuſtentantur, longitudinem intervallo unius pedis minui debere. Po-

(a) Mechanic. lib. 4. prop. 4. Mund. Math. Tom. 2. f. m. 189.

Potentia igitur tot pedes extrahere debet, quot ſunt funes trochleas inferiores ſuſtentantes. Quare ſpatium ejus eſt ad ſpatium ponderis ut numerus funium trochleas inferiores ſuſtentantium ad unitatem, conſequenter ut pondus ad potentiam ſuſtentantem (§. 833). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

842. Quo minor itaque potentia pondus ope polyſpaſti attollit; eo tardius id movetur: ut adeo virium compendium cum temporis diſpendio conjungatur.

THEOREMA 196.

Tab. XIIX Fig. 78. 843 *Si potentia in* F *applicata ſuſpendit pondus* E *ſecundum directionem obliquam* BD *& hujus directio ſit itidem obliqua* ED *& hujus directio ſit itidem obliqua* ED, *linea vero directionis trochleæ* DG *per centrum* C *tranſit; erit potentia ponderi æqualis & tam iſta, quam hoc vim, qua trochlea in* L *retinetur, ut ſinus anguli* ADB *ad ſinum anguli dimidii.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim funes DF & DE quomodocunque extenſi trochleam in B & A tangunt, ſi ex centro C ducantur radii AC & CB; erunt anguli ad A & B recti (§. 308. *Geom.*) & AD = DB (§. 325. *Geom.*). Quare cum etiam ſit AC = CB (§. 40. *Geom.*); erit angulus ADC ipſi CDB æqualis (§. 179. *Geom.*) Jam perinde eſt ac ſi mobile aliquod ſecundum directionem CD trahens trahatur a duabus viribus ſecundum directiones AD & DB trahentibus illique æquipollentibus propter ſtatum æquilibri *ex hypotheſi*. Eſt adeo vis in F applicata ad pondus E ut ſinus anguli ADC ad ſinum anguli CDB (§. 253). Sunt vero anguli æquales *per demonſtrata*, adeoque & ſinus eorum, (§. 142. *Geom.* & §. 2. *Trigon.*). Quamobrem pondus potentiæ æquale eſt. *Quod erat unum.*

Jam potentia eſt ad vim trochleam ſecundum directionem DC ſuſtinentem ut ſinus anguli ADC ad ſinum anguli ADB & pondus E ad eandem vim ut ſinus anguli BDC ad ſinum anguli ADB (§. 253). Quare cum anguli ADC & BDC æquales ſint *per demonſtrata*, adeoque dimidii anguli ADB; erit vis trochleam ſuſtentans in ſtatu æquilibrii ponderum E & F ad horum alterutrum ut ſinus anguli ADB, quem directiones obliquæ AD & BD intercipiunt ad ſinum anguli dimidii. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 197.

Tab. XIIX Fig. 179. 344. *Si ponderis* G *linea directionis* DC *per centrum trochleæ tranſit & trochlea trahatur ſecundum directiones obliquas* ED & DF; *erunt hæ vires inter ſe æquales; earum vero alterutra ad pondus ut ſinus anguli a directionibus obliquis intercepti* ADB *ad ſinum anguli dimidii* ADC:

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ theorematis præcedentis, ita ut præcedens vix unica immutata litera huc tranſcribi tota poſſit.

COROLLARIUM.

345. Quoniam ſinus anguli dimidii non eſt dimidius totius, ſeu, quod perinde eſt, ſimpli anguli ſinus non eſt dimidius dupli (§.325. *Analyſ. fin.*); in caſu directionum obliquarum potentia pondus, cujus directio per centrum trochleæ tranſit, ſuſtentans non eſt ponderis dimidia.

SCHOLION.

346. *Ex duobus hiſce theorematis deduci poſſunt, quæ de trochleis in caſu directionum obliquarum præterea demonſtranda ſunt, quemadmodum videre eſt apud* Varignonium, *qui hanc ſtaticæ partem diffuſe pertractat* (b).

THEOREMA 198.

347. *Si pondus vel reſiſtentia cochleæ ſuperanda fuerit ad potentiam ut peripheria a potentia percurrenda ad diſtantiam binarum helicum* BI, *potentia ponderi æquipollet.* Tab. V. Fig. 61

DEMONSTRATIO.

Celeritates, quibus moventur potentia & pondus, ſunt ut ſpatia eodem tempore deſcripta, nempe ut peripheria a potentia percurrenda ad diſtantiam helicum BI (§.33). Sed vires mortuæ ſunt in ratione compoſita celeritatum & maſſarum (§. 278). Quare cum potentiæ pondus æquale ſubſtitui poſſit (§.763), ſitque ut pondus potentiæ æquale ad pondus elevandum aut deprimendum reciproce ut peripheria a potentia percurrenda ad diſtantiam helicum BI *per hypoth.* celeritates ſunt ut maſſæ reciproce. Ergo vis potentiæ eſt ad vim ponderis ut factum ex maſſa potentiæ in maſſam ponderis ad factum ex maſſa ponderis in maſſam potentiæ (§. 159. *Arithm.*). Quare cum hæc facta æqualia ſint (§. 207. *Arithm.*); vires æquales ſunt. *Q. e. d.*

CO-

(b) Nouvelle Macanique, ou Statique Tom. 1. Sect. 3, p. 283. & ſeqq.

COROLLARIUM 1.

848. Cum peripheria a potentia perſcurſa in una cochleæ converſione ſit ſpatium ejus, diſtantiæ autem duarum helicum BI reſpondeat ſpatium ponderis; erit hic quoque ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut reciproce potentia ſuſtentans ad pondus.

COROLLARIUM 2.

849. Virium itaque compendium cum temporis diſpendio denuo conjungitur.

THEOREMA 199.

850. *Si diſtantia helicum* BI *minor fuerit, potentia ad eandem reſiſtentiam ſuperandam applicata minor eſt, quam ſi illa major fuerit.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut ſpatium potentiæ ad helicum diſtantiam, ita pondus ad potentiam (§. 847). Quodſi ergo helicum diſtantia minuitur, ſpatium potentiæ ad eandem (§. 205. *Arithm.*), adeoque & pondus ad potentiam rationem majorem habet, quam ante. Eſt igitur potentia in caſu poſteriore minor, quam in priore (§. 206. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 200.

851. *Si cochlea mas intra fœminam quieſcentem convertitur, minor potentia ad eandem reſiſtentiam ſuperandam requiritur, ſi ſcytala* CD *longior, quam ſi brevior.* Tab. VI. Fig. 78.

DEMONSTRATIO.

Ut peripheria ſcytala CD tanquam radio deſcripta ad helicum diſtantiam IK ita reſiſtentia ſuperanda ad potentiam (§. 848) ſed ſi ſcytala longior, major peripheria deſcribitur, quam ſi brevior (§. 412. *Geom.*). Ergo in illo caſu ad diſtantiam helicum IK (§. 203. *Arithm.*), conſequenter & reſiſtentia ſuperanda ad potentiam, majorem rationem habet, quam in hoc caſu. Quare cum reſiſtentia eadem maneat, *per hypoth.* potentia in caſu poſteriore major, quam in priore (§. 189. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 134.

852. *Data diſtantia potentiæ a centro cochleæ* CD, *diſtantia helicum* IK *& potentia in* D *applicata, determinare reſiſtentiam ſuperandam, vel hac data invenire illam.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur paripheria circuli radio CD deſcribenda (§. 429. *Geom.*
2. Quæratur porro ad diſtantiam heli-

helicum, peripheriam modo inventam & potentiam datam; vel ad peripheriam inventam, diſtantiam helicum IK & reſiſtentiam datam numerus quartus proportionalis: erit is in priore caſu reſiſtentia ſuperanda, in altero potentia, qua ad reſiſtentiam datam vincendam utendum (§. 847).

E. gr. Sit diſtantia helicum 3″, diſtantia potentiæ a centro cochleæ CD 25″, potentia 30 librarum. Fiat

100 — 314 — 50″
50

175|00 Peripheria a potentia conficienda.

Fiat porro
3 — 157 — 30
1 10 10 (§. 316. *Arithm.*)

1570 pondus, cui reſiſtentia æqualis.

PROBLEMA 135.

Tab. VI. Fig. 78. 853. *Data reſiſtentia, quæ data potentia ſuperari debet, cochleæ diametrum, diſtantiam helicum* IK *& longitudinem ſcytalæ* CD *definire.*

RESOLUTIO.

1. Diſtantia helicum & diameter cochleæ pro arbitrio aſſumantur, ſi ope ſcytalæ convertenda eſt cochlea intra matricem.

2. Fiat ut potentia data ad reſiſtentiam, quam ſuperare debet, ita helicum diſtantia ad quartum: quæ erit peripheria a ſcytala CD in converſione cochleæ deſcribenda (§. 847).

3. Quodſi ergo quæratur ſemidiameter hujus peripheriæ (§. 429. *Geom.*); habebitur longitudo ſcytalæ CD.

4. Quodſi vero cochlea fœmina circa marem convertitur ſine ſcytala, peripheria *per n. 2.* inventa eadem fere eſt, quæ cochleæ, adeoque ſemidiameter *per n. 3.* reperta cochleæ ſemidiameter.

E. gr. Sit pondus 6000 librarum, potentia 100, diſtantia helicum 1″. Reperietur peripheria a potentia percurrenda 6000 : 100 = 60, adeoque longitudo ſcytalæ, ſi qua utaris, 1′ 9″: ſi nulla utaris, erit latus cochleæ fœminæ 19″.

COROLLARIUM.

854. Quodſi peripheria cochleæ in rectam BC transferatur, & in B perpendicularis BA erigatur, altitudini cochleæ æqualis, tandemque factis B 1, 1. 2, 2. 3 &c. diſtantiæ helicum æqualibus ducantur rectæ C 1, D 2, E 3 &c. parallelogrammum circa cylindrum, cujus peripheria rectæ BC æqualis, circumvolutum helicem, qua cylindrus ſulcandus, exhibebit.

DE-

DEFINITIO 82.

Tab. VI. Fig. 80. 855. *Cochlea infinita* ſeu *perpetua* vocatur, ſi rotam ſtellatam DF circumagit.

COROLLARIUM.

856. Dum cochlea ſemel circumvolvitur; rota nonniſi unius dentis intervallo promovetur.

SCHOLION.

857. *Dicitur autem ideo infinita, quia ſine fine circumagi poteſt.*

THEOREMA 201.

Tab. VI. Fig. 80. 858. *Si potentia manubrio cochleæ infinitæ* AB *applicata fuerit ad pondus in ratione compoſita ex peripheria axis rotæ* EH *ad peripheriam manubrio verſato a potentia deſcriptam & revolutionum rotæ* DF *ad revolutiones cochleæ* CB; *ponderi æquivalebit.*

DEMONSTRATIO.

Si peripheriam axis HE per numerum revolutionum rotæ ſtellatæ DF multiplices, prodibit ſpatium ponderis G. Sed ſi peripheria manubrio AB deſcripta multiplicetur per numerum revolutionum cochleæ CB; factum eſt ſpatium potentiæ. Sunt igitur celeritates, quibus pondus & potentia moventur, ut iſta ſpatia (§. 33). Quare cum pondus ad potentiam ſit in ratione reciproca eorundem ſpatiorum (*per hypoth. & §. 159. Arithm.*); vires ſunt in ratione compoſita earum, quas habet ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ & ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis (§. 278), hoc eſt, ut factum ex ſpatio ponderis in ſpatium potentiæ ad factum ex ſpatio potentiæ in ſpatium ponderis (§. 159. *Arithm.*), adeoque æquales (§. 207. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

859. Quoniam rotæ motus tardiſſimus (§. 569); exigua potentia ingens pondus moveri poteſt ope cochleæ infinitæ.

COROLLARIUM 2.

860. Utimur adeo cochlea infinita, vel ſi ingens admodum pondus per exiguum ſpatium movendum, vel ſi motus tardiſſimus efficiendus.

SCHOLION.

861. *Commodus igitur ejus uſus eſt in horologiis. Unde* Hugenius *eadem utitur in automato planetario.*

PROBLEMA 136.

862. *Datis dentium numero, diſtantia potentiæ a centro cochleæ* AB, *& radio axis* HE *una cum potentia invenire pondus.* Tab. VI. Fig. 80.

RESOLUTIO.

1. Ducatur diſtantia potentiæ a cen-

centro cochleæ AB in numerum dentium: factum eſt ut ſpatium potentiæ interea abſolutum, dum pondus conficit ſpatium peripheriæ axis æquale (§. 413. *Geom.* & 858. *Mech.*).

2. Quæratur numerus quartus proportionalis ad radium axis, ſpatium potentiæ modo inventum & potentiam; erit is pondus, quod potenria ſuſtentare valet (§. 858).

E. gr. Sit AB = 3, radius axis HE = 1, potentia 100 librarum, numerus dentium rotæ DF 48; erit pondus = 3. 48. 100 : 1. 1 = 14400.

SCHOLION 1.

863. *Apparet hinc, cochlearum infinitam in amplificandis potentiarum viribus reliquas omnes antecellere.*

SCHOLION 2.

864. *Solent etiam cochlea conſtrui, quæ a rotis dentatis circumaguntur, cumque cochlea a ſingulis dentibus ſemel circumvolvatur, motus efficitur velociſſimus. Hinc ejus uſus eſt in machinis, quæ ad poliendam corpora aſpera, veluti ad poliendum vitra, adhibentur.*

THEOREMA 262.

Tab. V. Fig. 64. 865. *Si potentia cuneo ita applicata, ut linea directionis* CD *ſit ad latus* AB *perpendicularis, fuerit ad reſiſtentiam ſuperandam, ut* AB *ad* CD, *reſiſtentiæ æquipollet.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus cuneum detrudi usque ad rectam GF ipſi AB parallelam: erit DE ſpatium potentiæ, FG ſpatium ponderis. Eſt vero DE : FG = DC : AB (§. 396. *Geom.*). Ergo celeritates potentiæ & ponderis ſunt ut DC ad AB (§. 33). Sed vires potentiæ ac ponderis ſunt in ratione compoſita ipſorummet atque celeritatum (§. 278), potentia vero ad pondus ut AB ad DC, *per hypoth.* Ergo vires ſunt AB. DB ad DC. AB (§. 159. *Arithm.*), adeoque æquales (§. 207. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

866. Potentia igitur dimidiæ reſiſtentiæ æquivalens eſt ad eam ut AC ad DC, hoc eſt, ut ad ſinum totum tangens anguli dimidii cunei ADC (§. 7. *Trigon.*).

COROLLARIUM 2.

867. Cum tangens anguli minoris minor ſit quam majoris (§. 7. *Trigon.*), potentia ad dimidiam reſiſtentiam majorem rationem habet, ſi angulus major, quam ſi minor (§. 203. *Arithm.*). Unde in priori caſu major eſt quam in poſteriori (§. *cit.*), hoc eſt, cunei acutiores magis porentiæ vires amplificant quam minus acuti.

SCHO-

SCHOLION.

868. *Ex natura cunei reddenda eſt ratio omnium fere inſtrumentorum, quibus ad ſcindendum aut dividendum utimur: qualia ſunt cultri, enſes, ſecures, ſciſſella aliaque inſtrumenta celatoria.*

CAPUT XVII.

DE

POTENTIARUM AD MACHINAS APPLICATIONE.

DEFINITIO 83.

869. Per *potentias animatas* intelligo homines & animantia bruta: *per inanimátas* vero aërem, aquam, ignem, gravitatem, elaterem.

DEFINITIO 84.

870. Potentia dicitur *trudendo movere*, ſi linea directionis tendit in plagam moventi oppoſitam.

DEFINITIO 85.

871. Potentia dicitur *deprimere*, ſi linea directionis tendit a movente deorſum.

DEFINITIO 86.

872. Potentia dicitur *trahere*, ſi linea directionis tendit ad moventem, ſeu ſi mobile ſequitur moventem vel ad eum accedit.

DEFINITIO 87.

873. Potentia dicitur *elevare*, ſi linea directionis tendit ſurſum, ſeu ſi mobile aſcendit.

DEFINITIO 88.

874. Potentia animata dicitur *calcando* movere, ſi pedibus deprimit vel protrudit mobile.

DEFINITIO 89.

875. Potentia animata *Verſando movere* dicitur, ſi eidem loco inſiſtentis manus per peripheriam circuli movetur.

PROBLEMA 137.

876. *Machinam conſtruere, quam homo trudendo movere poſſit.* Tab. VII. Fig. 81.

RESOLUTIO.

1. Cylindrus ligneus EF verticali-

ter erigatur, ita ut in punctis E & F circa axem EF verſari poſſit.

2. In quatuor fere pedum altitudine infigatur vectis GI.

Quodſi enim homo manibus continuo protrudat vectem GH, cylindrus EF circa axem ſuum circumagetur (§. 870).

SCHOLION.

877. *Si machina ita ſimplex ad pondera attollenda adhibeatur*, Ergata *appellari ſolet.*

COROLLARIUM 1.

Tab. VII. Fig. 82. 878. Quodſi GH fuerit temo cum libra; equus vel taurus *trahendo* machinam movebit (§. 872).

COROLLARIUM 2.

Tab. VII. Fig. 81. 879. Si annulo L alligetur funis, quem manibus prehendat homo aut corpori ſuo circumplicet; machinam *trahendo* movebit (§. 872).

PROBLEMA 138.

Tab. VI. Fig. 83. 880. *Machinam conſtruere, quam homo verſando movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Ad cylindrum horizontalem applicetur manubrium vel rectangulum BDC, vel in arcum circuli incurvatum HI. Cum enim homo manu circa centrum radium BD circumducit; verſando machinam movet (§. 875. *Mech.* & §. 131. *Geom.*).

SCHOLION.

881. *Si duo manubria eidem machinæ applicantur, neceſſe eſt, ut ſitum habeant contrarium, quia dum unus manubrium* ABDC *deprimit, alter alterum* EFGH *attollere debet.*

PROBLEMA 139.

882. *Machinam conſtruere, quam homo partim trahendo, partim deprimendo movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Talis eſt axis in peritrochio EABF. Quodſi enim ſcytalam A manu prehendas & ad te adducas, trahendo axem EF movebis (§. 872): ſed ubi ulterius eandem deorſum urgeas, deprimendo eundem axem movebis (§. 871). Tab. V. Fig. 60.

Loco peritrochii ſufficiunt ſcytalæ ſolæ GH & KI: quæ ſi duobus in locis ad axem aptentur, duo homines una eandem partim trahendo, partim deprimendo movebunt. Tab. VII. Fig. 84.

SCHOLION.

883. *Si cylindrus horizontaliter poſitus & ſolis ſcytalis inſtructus ad pondera attollenda aut attrahenda adhibetur,* ſucula *vocatur.*

PRO-

PROBLEMA 140.

884. *Machinam conſtruere, quam partim trahendo, partim protrudendo movere poſſit homo.*

RESOLUTIO.

ab. II. g. 5. 1. Vectis homodromus HFG circa punctum G mobilis trajiciatur per annulum F virgæ ferreæ EF, aut virga alio quocunque modo ad eum firmetur.

2. Per annulum E alteri extremo ejusdem virgæ affixum transeat uncus rectangulus ABCD cylindro interrupto KL infixus.

Quodſi enim manu applicata vectem HG ad te adducas, radius AB ſemiperipheriam deſctibet, ſicque trahendo movebis machinam (§. 872). Si vero manubrium ABCD, quod nunc partem ſui BC tibi obvertit, in priſtinum ſitum redigis; idem radius BA alteram ſemiperipheriam deſcribet, ſicque trudendo movebis machinam (§. 870).

Aliter.

Tab. VII. Fig 86. Idem præſtabis, ſi vectis HFG ſolo affigatur, ita tamen ut, quemadmodum ante, circa punctum G moveri libere poſſit: reliqua omnia eadem ratione ſe habeant, ut ante.

SHOLION.

885. *Uncus interdum geminatur, ut alter ſit altero ſuperior & in contrarium poſitus: ita nimirum duo ſimul machinam agitare poſſunt motibus contrariis, uno ſcilicet trahente, dum alter trudit & contra.*

PROBLEMA 141.

886. *Machinam conſtruere, quam homo calcando movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Conſtruatur tympanum AB cum cyclindro circa axem ejus mobile, & ejus altitudinis, ut homo unus vel plures intra ejus ambitum ſtare poſſint. Hanc enim calcando cylindrum cum rota circumagent (§. 874). Tab. VII. Fig. 87.

Aliter.

Conſtrui quoque poteſt rota ad horizontem inclinata AB, cujus inferior ſuperficies dentibus, ſuperior ſcalis inſtruitur: quamvis autem rationem plani inclinati habeat, ut adeo potentia non tota vi ſua in eam agat (§. 261), major tamen diſtantia a centro motus eſſe poteſt, quam in verticaliter erectis. Tab. VIII. Fig. 88.

Aliter.

Si pondus movendum ſit exiguum & motus celer requiritur, ve- Tab. VII. Fig. 89.

cte homodromo FH ad horizontem parumper inclinato & circa centrum F mobili utimur, qui virga ferrea HE cum manubrio BE connexus cylindrum GL circumducit, ſi pede deprimatur. Tornatores filum cylindro circumducunt perticæ flexili aut laminæ elaſticæ KN alligatum. Quoniam potentia in G, adeoque in minori diſtantia, applicatur, motus eſt celer, utut potentia major eſſe debeat reſiſtentia in H vincenda (§. 765. 772).

Tab. VIII. Fig. 91.

PROBLEMA 142.

887. *Machinam conſtruere, quam equus vel bos trahendo movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 82. Utendum eſt cylindro verticaliter erecto NO cum temone HG 8 minimum pedum, ut ſupra (§. 875). Præſtat autem temonem eſſe longiorem, quam breviorem, ne vertigine capiatur brutum in peripheria circuli continuo decurrens.

PROBLEMA 143.

Tab. VIII. Fig. 91. 888. *Machinam conſtruere, quam equus vel bos calcando movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Conſtruendum eſt tympanum AB ſubſcudibus transverſis munitum & ſuper eo ſtabulo includatur equus vel bos per ſolum pertuſum pedibus poſterioribus rotæ inſiſtens ſubſcudemque ad horizontem inclinatam protrudens.

Aliter.

Si pondera minora moveri debent, veluti veru cum aſſa, tympanum eum in modum conſtrui ſolet, quo majora (§. 885), ab hominibus intra earum ambitum conſiſtentibus impellenda, & canis intus collocatur, tam pedibus, quam corporis ſui mole eandem circumagens.

SCHOLION.

889. *Cum machinæ hactenus deſcriptæ omnes, ad axem in peritrochio revocentur, niſi quod nonnullæ earum ſint ex vecte & axe in peritrochio compoſitæ, ſi attendatur ad lineam directionis potentiæ & inde determinetur diſtantia a centro motus* (§. 229), *virium æſtimatio haud difficulter inſtituitur* (§. 765. 792. 793).

PROPBLEMA 144.

890. *Machinam conſtruere, quæ a pondere deſcendente moveatur.* Tab. VIII. Fig. 92.

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB horizontali-

taliter poſitum funis circumvolvatur &

2. idem circa trochleam C circumducatur in magna a pavimento diſtantia.

3. Ejusque denique extremitati alligetur pondus Q, quodque dum deſcendit, cylindrum AB circumagit.

COROLLARIUM 1.

891. Quo major eſt altitudo, per quam pondus Q deſcendit, eo diutius durat motus.

SCHOLION.

892. *Hinc horologia, quæ a pondere deſcendente moventur, in editis turribus collocantur, aut, ſi index circumagendus fuerit exiguus, in ſuprema conclavis parte.*

COROLLARIUM 2.

893. Ut pondus Q lento gradu deſcendat, nec motus ejus acceleretur (§. 70); cylindri AB motus eſſe debet quam tardiſſimus, conſequenter pondus ad movendam machinam adhiberi nequit, niſi in machinis compoſitis, ubi motus in principio tardus, ſed per plures machinæ partes propagatus fit celerior (§. 528).

COROLLARIUM 3.

894. Cum adeo pondus in minori a centro diſtantia applicandum ſit, ibi potiſſimum huic potentiæ eſt locus, ubi non magna eſt reſiſtentia.

COROLLARIUM 4.

895. Quodſi pondus P ex polyſpaſto FP ſuſpendatur, pondus celerius cylindrum LM circumagere poteſt. Dum enim per ſpatium peripheriæ cylindri deſcendit, & funes fuerint quatuor; cylindrus quater circumvolvitur, cum ſine polyſpaſto nonniſi ſemel circumageretur. Sed quia funis HI a quarta tantum ponderis Q parte trahitur (§. 831) vel etiam a minore (§. 843); perinde eſt ac ſi quarta tantum ejus pars vel etiam quarta minor ſine polyſpaſto ad machinam agitandam adhiberetur. Utendum igitur eſt polyſpaſto, ubi ſpatium non ſatis altum deſcenſui ponderis conceditur. Tab. VIII. Fig. 95.

PROBLEMA 145.

896. *Pondere appenſo adjuvare potentiam moventem.* Tab. VIII. Fig. 49.

RESOLUTIO.

1. Ponderi movendo F alligetur funis EF & circa trochleam G circumducatur.
2. Alteri ejus extremo alligetur pondus D movendo fere æquilibratum.

Quodſi ergo exigua vis applicetur ad funem HD, pondus E movebit.

PROBLEMA 146.

897. *Machinam elateris vi movere.* Tab. VIII. Fig. 95.

RESOLUTIO.

1. Lamella chalybea AB altero ſui extre-

extremo axiculo CD afferruminata in gyros contorqueatur & thecæ cylindricæ, cui altero ſui extremo afferruminata, includatur.

2. Huic affigatur catenuula, altero ſuo extremo axi coniformi GH alligata.

Quoniam enim laminæ vis elaſtica continuo minuitur, ſub initium utique utpote fortius trahens in minori a centro motus diſtantia GL applicanda; ſub finem vero, ubi ſegnius trahit, in majori IK (§. 792): quo obtinetur, ut potentia hæc in ſe ſat inæquabilis, ad motum tamen regularem, qualis eſt horologiorum portatilium, adhiberi poſſit.

SCHOLION.

898. *Equidem figura fuſi* GH *non conica, ſed alia conoidica eſſe debebat & celeberrimus* de la Hire (b) *in ejus conſtructionem inquirit. Sed cum hypotheſes aſſumere cogatur a rigore veritatis alienas; ipſemet non diffitetur, regulam, quam invenit, praxi non ſatis exacte reſpondere. Cæterum vi elaſtica animantur quoque automata culinaria.*

DEFINITIO 90.

899. *Rota directa* eſt, quæ ab aqua deſuper labente & intra cavitates palmularum collecta movetur. *Rota* vero *retrograda* vocatur, quæ ab aqua celeriter profluente & in infimam rotæ palmulam impetum faciente circumagitur.

COROLLARIUM 1.

900. Quoniam aqua rariſſime ea rapiditate fertur, ut rotas molares circumagere poſſit; ex alto præcipitata impetum acquirat neceſſe eſt (§. 79. 583).

COROLLARIUM 2.

901. Cum itaque corpus grave tamdiu deorſum tendat, quamdiu centro telluris propius fieri poteſt; locus, ubi rotæ collocantur, centro telluris vicinior eſſe debet quam is, unde aqua in eas derivatur.

COROLLARIUM 3.

902. Et cum aquæ fluentes ſucceſſive cadant, a latice ſeu origine earundem nonniſi exigua declivitas, nempe quam ſufficere experientia loquitur, ad diſtantiam 100 pedum minimum $\frac{1}{4}$ unius pedis, ad ſummum dimidii, concedenda, reliqua autem proxime ante rotam in præcipitium mutanda.

COROLLARIUM 4.

903. Inquirendum itaque quanto depreſſior ſit locus, ubi rotæ molares conſtituuntur, quam origo aquarum.

DEFI-

(c) Traite de Mecanique prop. 72. p. 233 & ſeqq.

DEFINITIO 91.

904. *Ars libellandi* eſt ars determinandi declivitatem aquarum, ſeu generalius, quanto intervallo punctum aliquod ſit terræ centro propius quam alterum.

COROLLARIUM.

905. Quoniam lineæ horizontalis puncta ſingula a centro Telluris æqualiter diſtant (§. 207); aquæ libellantur, ſi linea horizontalis in datorum locorum ſuperiore inventa usque ad inferiorem continuetur & ejus a ſuperficie aquarum diſtantia utrobique inveſtigetur. Diſtantiarum enim differentia declivitatem metitur.

DEFINITIO 92.

906. *Libella* eſt inſtrumentum, quo invenitur linea horizontalis & ad datum quodcunque intervallum continuatur.

PROBLEMA 147.

907. *Libellam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. 1. Ex centro ſemicirculi C ſuſpendatur ponduſculum H.

2. Diametro AB infigantur unci E & F.

Quodſi enim funis per uncos E & F ita extendatur, ut filum CD ſemicirculum appenſum bifariam ſecet; lineam horizontalem apparentem repræſentabit.

DEMONSTRATIO.

Quia ponduſculum H filum CD extendit; erit CD linea directionis ejus (§. 17). Et quia ſemicirculum bifariam ſecat *per hyp.* ad AB perpendicularis eſt (§. 143. 78. *Geom.*). Ergo AB eſt linea horizontalis apparens (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Regulæ orichalceæ AB afferruminentur dioptræ & inferius in C lamina cochlea E inſtructa. Tab. VIII. Fig. 98.

2. Laminæ vero huic afferruminentur priſma excavatum FG cum ſtylo GHIK bifurcato.

3. Inferius afferruminetur annulus cum anſula, ut, ſi opus fuerit, pondus appendi poſſit.

4. Paretur denique fulcrum ſemicirculare aut ſemiellipticum NO ſuperius in P cochlea PQ inſtructum, ut inſtrumentum cruribus IK in cuſpides acutas deſinentibus in punctis S & T inſiſtere queat.

Quodſi enim fulcimentum mediante cochlea ad arborem aut baculum erectum firmetur, inſtrumentum eidem inſiſtens vi gravitatis in eum ſitum ſeſe diſponet, ut regula cum dioptris ſit horizonti parallela (§. 215).

Aliter.

Tab. IX. Fig. 98. *Ricciolus* propria experientia fretus hanc libellam (c) commendat

1. Super regula AB pedum 12 aut ad ſummam 20 canaliculo excavato inſeratur tubus CD ex laminis ferreis ſtanno obductis, vel cupreis paratus, cruribus CA & BD ad angulos rectos reclinatis.
2. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ fœminæ, quibus aliæ mares inſerantur, ut tubus quam arctiſſime claudi poſſit.
3. Glutine quodam in cochleis maribus firmentur tubi vitrei EC & FD ad AB normales.
4. Denique in G afferruminetur globus orichalceus, isque cavus, ne gravitate moleſtus ſit, & intra matricem fulcro affixam ita reponatur, ut libere huc illucque libella moveri & in ſitu eodem, ſi neceſſe ſit, immota ſervari poſſit. Orificia vero tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere poſſit inter transferendum.

Quodſi enim inſtrumentum aqua repleas & tubum ita conſtituas, ut aqua utrobique in tubis vitreis eandem altitudinem AH & BI attingat; erit HI linea horizontalis apparens, cum fluidorum quieſcentium partes omnes eandem a centro telluris diſtantiam habeant: alias enim remotiores vi gravitatis ruerent verſus locum inferiorem, qui conceditur.

5. Conſultum quoque eſt, ut ad tubos BD & AC afferruminentur dioptræ K & L ad juvandam collineationem, quamvis etiam ſine iisdem per utriusque aquæ ſuperficiem collineatio in omni ſitu tubi fieri poſſit.

Aliter.

1. Tubus vitreus, cujus longitudo IL ultra pedis longitudinem excreſcere poteſt, glutine quodam firmetur intra tubulos orichalceos IP & QL, ſitque tubus in altero extremo L apertus, ſed obturaculo quodam ex ſubere parato & capite orichalceo inſtructo claudendus. Tab. IX. Fig. 99.
2. Tubus ita paratus firmetur ſuper regulam ST, ad quam etiam
3. Firmentur dioptræ M & N.
5. Infra hanc regulam firmetur alia minor CD circa axiculum in

C mo-

(d) Geograph. Reformatæ lib. 6. c. 26. §. 8. f. 230.

C mobilem, mediante cochlea G nunc attollenda, nunc deprimenda.

5. Intra has regulas ſit lamina elaſtica H ex orichalco aut chalybe parata, ut inſtrumentum tanto accuratius ad ſitum horizontalem diſponi poſſit.

6. In medio denique regulæ inferioris afferruminetur matrix ſeu cochlea fœmina, ut libella ad fulcrum quoddam, quoties ea utendum, firmari poſſit.

Quodſi tubum vel aqua, vel ſpiritu vini colorato repleas, ita tamen ut pauculum aeris remaneat, bullulam in ſuperficie fluidi formaturum; aſcendet bullula in partem ſuperiorem, ſi tubus fuerit inclinatus, ſed datum ſitum e. gr. in F tuebitur, ſi horizontalis fuerit. Levia enim ſurſum aſcendunt, quantum datur.

SCHOLION 1.

907. *Alia libellarum genera a viris celeberrimis* Philippo de la Hire, Roemero, Hugenio, Picardo *inventa deſcribuntur a modo laudato* Picardo (e). *Adhuc alia dederunt* viri Cl. Couplerus (f) & Harſœkerus (g). *Ego eas deſcripſi, quas mea inſtrumentorum ſuppellex mihi ſuppeditavit. Omnium fere, quæ paſſim proſtant, deſcriptionem dedit* Jacobus Leupoldus (h).

SCHOLION 2.

908. *Prima libellarum, quam exhibui, non ſatis fida.* Ricciolus *enim jam obſervavit, facile aberrari ſ minutis, immo gradu dimidio, niſi ingens fuerit. Sed moles uſum moleſtum reddit. Facile tamen medela paratur, ſi ſcilicet loco ſemicirculi utamur regula* AB *trium pedum cum altera longiore* CD *quatuor pedum ad angulos rectos priori inſiſtente: quæ ſi dioptris inſtruatur & libere ſuſpendatur, fulcro conveniente adhibito, exactiſſimam libellam conſtituit.* Tab. IX. Fig. 100.

SCHOLION 3.

909. *Solent quoque a nonnullis in libellationibus præſertim longioribus dioptrarum loco adhiberi teleſcopia: ſed multa circumſpectione opus eſt, ut rite ad inſtrumenta applicentur. Enimvero ea de re in Aſtronomia ex principiis opticis dicetur.*

PROBLEMA 148.

910. *Rectificare libellam.*

RESOLUTIO.

Ut certus ſis, libellam eſſe revera in ſitu horizontali

1. Inſtrumento in A collocato col- Tab. IX. Fig. 101.

 linea-

(e) Traité du nivellement c. 2. p. 37 & ſeqq.
(f) Memoires de l' Academie Royale des Sciences A. 1699. p. 172.
(g) in Miſcellan. Berolinenſ. p. 318. & in Actis Eruditorum A. 1712. p. 34.
(h) in Theatro Horizontoſtatico ſive libellationis, quod eſt pars quarta Theatri Statici univerſalis.

lineatio fiat in C centrum tabulæ in B erectæ.

2. Libella, quæ eum in finem duplicibus dioptris inſtrui debet, invertatur & denuo collineatio fiat in tabulam eandem,

3. Quodſi idem punctum C ſit in linea viſuali, libella convenientem habet ſitum; ſin in puncto altiori aut depreſſiori deſinat, pauliſper attollenda vel deprimenda eſt (quo ſpectant regulæ cum cochleis in libellis paulo ante deſcriptis), donec linea viſualis punctum inter duas collineationes medium attingat.

DEMONSTRATIO.

Tab. IX. Fig. 101. Ponamus inſtrumentum eſſe in linea horizontali AC & viſu attingi punctum C. Si ſitus inſtrumenti mutetur, ut B in A & A in B conſtituatur, cum linea horizontalis non ſit niſi unica, adhuc linea viſualis AB ultra dioptras continuata in puncto C terminabitur. *Quod erat unum.*

Quodſi inſtrumentum non ſit horizonti parallelum, linea viſiva in centro ejus G ſecabit horizontalem AB, eritque HGB = AGF (§. 156. *Geom.*), & collineanti per F & H occurret punctum altius D. Quodſi libella invertatur, ut H in *h* & F in *f* conſtituatur; erit *h*GA = BG*f* (§. 156. *Geom.*). Eſt vero *h*GA = HGB, quia inſtrumentum ſitu reſpectu lineæ horizontalis immutato inverſum. Ergo BG*f* = HGB. Quare cum porro, ob rectam D*d*, in quo ſunt puncta D & *d*, ad lineam horizontalem perpendicularem anguli recti ad C æquales ſint (§. 245. *Geom.*;) erit CD = C*d* (§. 267. *Geom.*), hoc eſt, linea horizontalis cadit in punctum C intra duo collineata D & *d* medium. *Q. e. d.*

PROBLEMA 149.

911. *Aquas libellare.*

RESOLUTIO.

1. Eo in loco, ubi origo declivitatis ſtatuitur, ope ponderis ex fune ſuſpenſi exploretur, quanto intervallo ſuperficies aquæ a ripa abſit. Tab. IX. Fig. 101.

2. Idem fiat altero in loco, ubi declivitatis terminus ſtatuitur.

3. Erectis in A & B baculis ad horizontem perpendicularibus cum tabulis D & C nigro colore tinctis, ſed cruce alba notatis, atque ope cochleæ in quocunque ſitu ad baculos firmandis, libella EF collocetur in P.

4. Tabula utraque D & C nunc attollatur, nunc deprimatur, do-

donec per EF collineanti punctum medium; in quo lineæ albæ ſeſe mutuo interſecant, occurrat.

5. Inveſtigentur exactisſime altitudines punctorum D & C, nempe AD & BC atque in ſchedula notentur.

6. Tum inſtrumento in Q & baculo AG in M translato, fiat ut ante collineatio in O & P, notenturque altitudines OB & PM. Et ita operatio continuetur, donec terminum declivitatis M attigeris.

7. Addantur in unam ſummam altitudines AD & BO &c. itemque BC & MP &c. & priori adjiciatur altitudo ripæ in origine declivitatis A, poſteriori vero altitudo ripæ in fine declivitatis M.

8. Quodſi enim aggregatum poſterius e priori auferas, relinquetur declivitas aquarum a termino A uſque ad alterum M fluentium reſpectu lineæ horizontalis apparentis.

9. Quare ſi tractus AM fuerit longus; quod ab ea ſubtrahendum eſt, ut habeatur declivitas reſpectu lineæ horizontalis veræ, invenitur per problema 39 (§. 216) aut ſine novo calculo in tabula ſuperius exhibita (§. 227). Sit e. gr.

altit. ripæ AL	64	altit. ripæ MN	58
AD	34″	BC	57″
BO	68	PM	102
Summa	166	Summa	217
			166
		declivitas LI	51

Sit LK 900 pedum, erit declivitas LI mulctanda 3 lineis, ut relinquatur vera 5′0″7‴.

DEMONSTRATIO.

Ducantur IN & LK itemque OG parallelæ; erit DG = OC, PN = GI DL = PC, OB = GL (§. 226. *Geom.*). Ergo DA + AL + OB = GL + BC & PM + MN + BC = GI + BC, conſequenter GI + BC − GL − BC = LI *Q. e. d.*

SCHOLION.

912. *Quoniam in hac operatione facile aberrari poteſt, conſultum eſt, ut libellatio bis inſtituatur, nempe primum a termino* A *usque ad terminum* M, *deinde retro a termino* M *usque ad terminum* A.

DEFINITIO 93.

913. *Sectio fluminis* eſt planum ad angulos rectos ſecans aquam in alveo fluentem, cujus fundus horizontalis, ripæ autem inter ſe parallelæ.

COROLLARIUM 1.

914. Quoniam linea directionis particularum aquæ tanquam corporis gravis eſt ad horizontalem perpendicularis (§. 215) & fundus alvei atque ſuperficies aquæ horizontalis, ripæ vero inter ſe parallelæ, *per hypoth.* latera plani ſecantis erunt ad baſin perpendicularia & inter ſe parallela, conſequenter oppoſita æqualia (§. 226. 238. *Geom.*), adeoque ſectio rectangulum eſt (§. 100. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

915. Invenitur adeo, ſi latitudo alvei in profunditatem aquæ ducatur (§. 375. *Geom.*)

COROLLARIUM 3.

916. Sunt etiam ſectiones diverſæ in ratione compoſita latitudinum alveorum & profunditatum aquarum (§. 376).

SCHOLION 1.

917. *Cum aquæ fluentes nunc intumeſcant, nunc tabeſcant, eo potiſſimum tempore ſectionem fluminis dimetiri debet molendina exſtructurus, quo mediocrem habet altitudinem.*

SCHOLION 2.

918. *Quodſi aquæ copia non abundamus, conſultum eſt, ut aqua in ſtagno colligatur inde per alveum in rotas deducenda, ne minimum ejus pereat. Quærendi etiam ſunt fontes in vicinia ſiti & aqua ex iis in ſtagnum derivanda.*

SCHOLION 3.

919. *Cum ex ſuperioribus conſtet, in conflictu corporum non modo habendam eſſe rationem maſſæ, ſed etiam celeritatis, qua corpus in aliud quieſcens impingens movetur (§. 532); in molendinis aquarum vi agitandis conſideranda eſt; & ſectio earum & declivitatis in præcipitium mutanda, unde celeritas ejus dependet. Quodſi declivitas fuerit inſignis, plurimorum ſcilicet pedum, e.gr. 10 aut 12, & ſectio aquæ exigua, rota conſtruitur directa: aſt ſi declivitas exigua & ſectio ingens, rota utendum eſt retrograda.*

PROBLEMA 150.

920. *Aquam fluentem in rotam directam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ut declivitas in præcipitium mutari poſſit, aqua per alveum aut canalem ex ligno conſtructum deducatur ad rotam, & diſtantiæ 100 pedum concedatur declivitas $\frac{1}{4}$ unius pedis, ne aqua nimis ſegniter fluat.
2. Rota ratione decente conſtructa ſub canali ita conſtituatur, ut aqua deorſum ruens per planum declive in capſulam ab axe ſecundam irruat, ipſa vero aquæ effuſæ ſuperficiem non attingat, ne motus retardetur.

COROLLARIUM 1.

921. Quodſi a declivitate integra ſubducatur pars, quæ aquæ concedenda, ut intra alveum ſuum fluere poſſit & in rotam

tam præcipitanda impetum acquirat; nec non ut aqua effuſa defluat; diameter rotæ relinquitur.

COROLLARIUM 2.

922. Ut aqua omnis in palmulas incidat, eas canale latiores eſſe præſtat.

PROBLEMA 151.

923. ***Rotam directam conſtruere.***

RESOLUTIO.

ib. Totum artificium huc redit, ut
i. ſitus palmularum determinetur:
g. id quod ſequentem in modum fie-
03. ri ſolet.

1. Semidiametro rotæ (quæ eſt dimidia altitudo ejus) in ſcala modica ſumta deſcribatur circulus AIKA & ſemidiametro minore CE, quæ differat a priori quantitate latitudinis orbium AE, quibus palmulæ infiguntur, alius.
2. Recta AE dividatur in tres partes æquales, ita ut DE ſit $\frac{1}{3}$ AE.
3. Ex centro C per D deſcribatur circulus in tot partes æquales dividendus, quot palmulis inſtruenda eſt rota.
4. Applicata regula ad duo diviſionis puncta H & F, tertio intermedio D relicto, ducatur recta HI &
5. in H excitetur perpendicularis HG.

Recta HI ſitum palmulæ unius; recta vero HG ſitum alterius determinat. Et eodem modo ſitus binarum quarumcunque aliarum palmularum determinatur.

PROBLEMA 152.

924. ***Aquam ad rotam retrogradam deducere.***

RESOLUTIO.

1. Ne aqua ſuperflua in rotam incidat & tota ejus declivitas, parte demta, quæ ipſi ut fluere poſſit concedenda, in præcipitium mutari queat; foſſa effodiatur a flumine, ex quo aqua deducitur, tanto intervallo diſtans, quanto conceditur, tum ut aqua impetu in rotam facto promptius defluat, tum ne aqua intumeſcens ripis foſſæ atque molendino facile damnum inferat.
2. Ne autem aqua intumeſcens agros vicinos inundet, riparum ſufficiens eſſe debet altitudo. Conſultum quoque eſt, ut fundus foſſæ arena complanetur.
3. Quo aquæ ſufficiens copia in foſſam deducatur, per transverſum fluminis excitandus eſt agger,

ger, tantæ altitudinis, quanta permittitur ad aquam citra damnum alterius in motu ſuo retardandam.

4. In fine foſſæ trabs horizontaliter ſternatur, quæ *arboris molinariæ* fert nomen, ejus ſuperficies cum fundo foſſæ ſit in eodem plano, ut aqua omnis in rotas præceps dari poſſit.

5. Super arbore molinaria perpendiculariter erigantut duæ trabeculæ tertia transverſa jungendæ & canaliculis excavandæ, ut tabula nunc elevata, nunc depreſſa aqua a rota arceri, vel ad eandem demitti poſſit.

6. Ut igitur aqua tabula depreſſa impedita, quo minus ad rotam præcipitetur, aliorſum fluere poſſit, & ne aqua intumeſcens ripas foſſæ egrediatur; alicubi foſſæ molinariæ a latere jugenda eſt alia, ad arbitrium claudenda & aperienda, aquæ ſuperfluæ tranſitum conceſſura.

Tab. IX. Fig. 204. 7. Alveus denique declivis in fine foſſæ excitetur profunditatis AB, quanta eſt declivitas in præcipitium mutanda, utque in rotam directe impingat aqua, ſuperficies per quam delabitur ſternenda eſt: juxta arcum DC ex centro rotæ E intervallo radio ejus paulo majore deſcriptum.

8. Quodſi foſſæ molinariæ locus nullus concedatur, agger per transverſum fluminis prope rotam conſtruendus, ut aqua in motu ratardata in alveum derivetur.

COROLLARIUM 1.

925. Si ea fuerit foſſæ latitudo, ut duabus rotis juxta ſe invicem conſtituendis locus concedatur; duo quoque conſtruendi ſunt alvei cum tertio intermndio, vel a latere poſito, per quem aqua ſuperflua a molendino arceatur,

COROLLARIUM 2.

926. Quodſi declivitas aquæ in præcipitium mutanda ea fuerit, ut ejus dimidium, vel ſubtriplum &c. rotæ agitandæ ſufficiat; intra unum alveum duæ vel tres &c. rotæ conſtituuntur, declivitate inter eas diviſa, ita tamen ut præcipitium majus ſit ante poſteriores, quam anteriores rotas.

SCHOLION 1.

927. *Aggeres excitantur, palis in fundum fluminis adactis, quarum anteriores altiores, poſteriores humiliores, differentia altitudinis primarum & ultimarum exiſtente æquali altitudinis, ad quam aquam in motu retardare libet. Spatia palis interjecta arena & ſabulo replentur & ſuperius ſtratum paratur vel ex aſſeribus, vel ex lapidibus. Fundus fluminis ante aggerem ad 6 vel 7* pedum

pedum diſtantiam complanantur, ne aqua vim ipſi inferre poſſit.

SCHOLION 2.

928. *Rotarum retrogradarum conſtructio nihil habet difficultatis: palmularum enim ſitus determinatur per radios ex centro rotæ eductos, ſive intra orbes collocentur, ſive in fronte conſtituantur. Altitudo illarum variat, quemadmodum & aquæ ſectio. Minoris altitudo (quam Germani* ein Staber-Rad *appellant) eſt 12 pedum; majoris vero (quæ nobis* ein Panſter-Rad *nuncupatur) ordinarie 16 pedum. In illa diſtantia palmularum digitorum 12 & 13; in hac 16 vel ad ſummum 19. Sectio aquæ in illa duorum pedum quadratarum; in hac pedum quinque. Quodſi palmulæ ad perıpheriam rotæ ſint perpendiculares, ultra eam eminentes (quales rotas* Straub-Räder *dicimus); altitudo rotæ & diſtantia palmularum variat pro diverſa fundi declivitate & ſectionis magnitudine.*

PROBLEMA 153.

Tab. IX. Fig. 105. 929. *Vi venti machinam movere.*

RESOLUTIO.

1. Axi infigantur virgæ AB & CD ſe mutuo ad angulos rectos in E ſecantes, quarum longitudo 32 pedum fieri ſolet.
2. Ad has virgas ex ſcandulis conſtruantur alæ figuram trapezii parallelarum baſium habentes, quarum latitudo HI ſit 6 circiter pedum, inferior FG per radios ex centro E ad C & H ductos determinatur.
3. Ita autem alæ aptandæ ſunt, ut FG cum axe FL efficiat angulum 54°.
4. Denique ut alæ vento ſemper obverti poſſint; tota machina circa axem NK verſatilis eſſe debet, ut ope vectis PQ huc illucque verſari atque in omnes plagas dirigi queat.

Aliter.

Alii turriculam ex lapidibus vel lateribus conſtruunt, ita ut tantummodo tectum cum axe alato verſatilis exiſtat. Eum ſcilicet in finem Tab. IX. Fig. 106.

1. Turricula annulo ligneo cingitur & in eo canaliculus effoditur, in cujus fundo hinc inde trochleæ orichalceæ ita immittuntur, ut exiguum ſegmentum ultra eum promineat.
2. Intra canaliculum aliis annulus reponitur, cui tectum ſuperſtructum.
3. In exteriori circa turriculam area defiguntur unci ferrei G &
4. Cum annulo mobili connectuntur trabes AB & FC, quarum alte-

altera priorem tecto firmius affigit.

5. Denique in D alligetur funis trabi AD in F circumducendus & altero ſui extremo axi in peritrochio aut ſuculæ alligandus.

Quodſi enim funis per uncum G ducatur & ſucula convertatur, trabs AB ad illum adducitur, conſequenter alæ in plagam ipſi oppoſitam diriguntur.

SCHOLION 1.

930. *Prior modus noſtris in oris uſitatus, poſteriore in Batavia utuntur. Et poſterior quidem priori præſtat, quia alæ conſtrui poſſunt majores, conſequenter machina a vento agitata, ubi major reſiſtentia ſuperanda. Quodſi vero ad hanc vincendam minores ſufficiunt, prior ideo antefertur, quia ſumtibus longe minoribus exſtruitur.*

SCHOLION 2.

931. *De machinis vi ignis movendis cogitarunt* Thomas Savery (i) Amontons (k), Dionyſius Papinus (l) & deinceps alii (m): *ſed valde vereor, ne inventa ipſorum praxi parum reſpondeant. Hactenus cum ſucceſſu eadem non uſi ſunt, niſi automata culinaria huc referre velis, quæ a fumo agitantur: in aliis caſibus vis motrix nimis ſumtuoſa.*

SCHOLION GENERALE.

932. *Quæ hactenus de potentiarum ad machinas applicatione diximus, eum unice in finem propoſuimus, ut in machinis inveniendis uſui eſſent, quoniam earum ſtructura externa, ex parte etiam interna inde pendet. Mathematica horum omnium tractatio & plus temporis requirit, quam huic operæ impendere conceditur, cum pleraque adhuc in deſideratis habeantur, nec ad ſcopum noſtrum apprime facere videtur. Neque operas manuarias hic exponere viſum eſt, cum eadem ad Matheſin non ſpectent, ſed ab eadem ſupponantur. Matheſis enim in dimetiendis iis occupatur, quæ ſub menſuram cadunt; manuarias vero artes non docet: quamvis utile judicemus, ut a theoria ad praxin progreſſurus earum non ſit ignarus, ne (de quo vulgo conqueruntur) in theoria pro veris habeantur, quæ non ſuccedere in praxi experientia loquitur. Ne igitur in hunc ſcopulum impingas, nihil aſſumendum eſt tanquam arte parabile, quod arte parari poſſe non jam ante experientia cognoveris aut ex iis, quæ experientia conſtant, legitima conſequentia deduxeris.*

(i) in Transact. Anglican. n. 252. p. 228.
(k) Mémoires de l' Academie Royale de Sciences Anno 1699. edit. Bár. p. 154.
(l) in Arte nova ad aquam ignis adminiculo efficaciſſime elevandam,
(m) Stephani Svvitzer Introduction to a general ſyſteme of Hydroſtaticks and Hydraulicks c. 28. 29. p. 325 & ſeqq.

CAPUT XVIII.

DE RESISTENTIA IN MACHINIS SEU FRICTIONE.

DEFINITIO 94.

933. *Frictio* eſt reſiſtentia ſuperficiei, per quam inceditur.

SCHOLION.

934. *Ita perſpicaciſſimus* Leibnitius (n) *frictionem definit, qui primus hanc materiam diſtincte evolvit.*

DEFINITIO 95.

935. *Corpus* dicitur *aſperum*, in cujus ſuperficie eminentiæ & cavitates alternantur.

DEFINITIO 96.

936. *Superinceſſus radens* eſt, ſi punctum idem ſuperincedentis lineam in ſuperficie deſcribit, per quam inceditur.

E. gr. Talis eſt ſuperinceſſus parallelepipedi ſuper plano protruſi.

DEFINITIO 97.

937. *Superinceſſus volvens* eſt, ſi punctum contactus continuo mutatur.

E. gr. Talis eſt rotæ in curru tam reſpectu axis, quam reſpectu ſoli.

DEFINITIO 98.

938. *Motus mixtus* eſt, ſi volutioni admiſcetur motus radens elementaris ſeu inſtantaneus.

SCHOLION.

939. *Hunc motum diſtinctius explicat* Leibnitius (o); *ſed nos eodem nunc non utemur.*

THEOREMA 203.

940. *Si ſuperficies, per quam inceditur, & ſuperficies corporis, quod per illam incedit, fuerint aſperæ, frictio oritur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim in ſuperficie corporis aſperi eminentiæ & cavitates ubique alternentur (§. 933); ſi tam ſuperficies corporis incedentis, quam ea, per quam inceditur, aſperæ fuerint, eminentiæ vel ſunt intra cavitates deprimendæ, vel prorſus abradendæ, vel eminentiæ unius ex cavitatibus alterius attollendæ. Sed nihil eorum fieri pot-

(n) in Miſcellaneis Berolinenſibus p. 307.
(o) in Miſcellan. Berolinenſ. p. 312. 313.

eſt ſine motu, nec motus produci ſine vi impreſſa. Vis igitur, qua corpus movetur, vel tota, vel ex parte his effectibus impendenda, adeoque motui corporis reſiſtitur (§.20), conſequenter frictio oritur (§.935). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

941. Quo aſperiores itaque ſunt ſuperficies, eo reſiſtentia major.

SCHOLION 1.

942. *Aſperitas æſtimanda eſt non modo ex numero eminentiarum abradendarum vel deprimendarum; verum & ex difficultate eas abradendi vel deprimendi, nec non ex mole cavitatum. Fieri namque poteſt, ut eminentiæ aliæ minori vi abradantur, vel deprimantur, aliæ autem nonniſi majori vincantur.*

COROLLARIUM 2.

943. Si corpora frictione continuata politiora fiunt, frictio minuitur.

SCHOLION 2.

944. *Id ipſum experientia clariſſime loquitur.*

COROLLARIUM 3.

945. Superficies adeo partium in machinis, quæ ſe mutuo tangunt, quantum fieri poteſt, poliri debent.

COROLLARIUM 4.

946. Quoniam tamen corpus nullum adeo poliri poteſt, ut omnis aſperitas tollatur, microſcopiis teſtibus; conſultum eſt (quod & dudum in praxi receptum) ut partes ſe mutuo tangentes oleo aut alio unguine illinantur.

THEOREMA 204.

947. *Dum pondus corporis incedentis ſuperficiem ejus ad ſuperficiem, per quam inceditur, apprimit; frictio augetur.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim pondus corporis incedentis ſuperficiem ejus apprimit ad ſuperficiem, per quam inceditur; eminentiæ unius tanto profundius in cavitates alterius deſcendunt, adeoque majori vi inde rurſus attollutur (§.265), vel etiam deprimuntur aut abraduntur. Major itaque vis requiritur ad hæc obſtacula vincenda, quam ſi non adeo valide corpus incedens apprimeretur. Unde patet, quod appreſſio ex pondere ſuperincedentis augeat reſiſtentiam ſuperficiei, per quam inceditur (§. 20), hoc eſt, frictio augetur (§. 933). Q. e. d.

COROLLARIUM.

948. Creſcente adeo pondere corporis incedentis aut inſiſtentis, frictio creſcit.

SCHOLION.

949. *Hinc libra exiguis ponderibus*

onu-

onuſta exigua vi ab æquilibrio dimovetur; pluribus autem onuſta, majori vix dimovetur.

THEOREMA 205.

950. *Si linea directionis corporis incedentis ad ſuperficiem, per quam incedit, fuerit obliqua; frictio intenditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim linea directionis corporis incedentis ad ſuperficiem, per quam inceditur, obliqua; vis, qua movetur, verſus ſuperficiem, per quam inceditur, nititur adeoque perinde eſt, ac ſi ſuperficies incedentis a pondere ad eam apprimeretur. Sed appreſſio ex pondere incedentis frictionem intendit (§. 947). Ergo eadem intenditur, ſi linea directionis incedentis ad ſuperficiem, per quam inceditur, fuerit obliqua. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

951. Quoniam ictus perpendicularis eſt ad obliquum ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ (§. 552), ſinus autem anguli majoris major eſt, minoris contra minor (*§. 2. Trigon.*); niſus corporis ſuperincedentis in ſuperficiem, per quam inceditur, conſequenter frictio major eſt, quo propius ad perpendiculum accedit linea directionis corporis incedentis.

SCHOLION.

952. *Hæc denuo experientiæ valde conſona ſunt & præcipue in dentibus rotarum obſervantur, ut ſæpiſſime hac de cauſa prorſus frangantur.*

COROLLARIUM 2.

953. Tollitur adeo hæc frictio, ſi linea directionis corporis incedentis fuerit parallela ſuperficiei, per quam inceditur: tum enim niſus ſuperincedentis in eam nullus eſt.

THEOREMA 205.

954. *Si ſuperinceſſus volvens, longe minor eſt frictio, quam ſi radens extiterit.*

DEMONSTRATIO.

Sit regula dentata A B & ſuper ea incedat rota DE, cujus dentes ſint ad peripheriam normales. Quodſi ſuperinceſſus fuerit radens, dens F, qui regulam tangit, lineam rectam in ſuperficie regulæ deſcribere debet (§. 936). Cum adeo ipſi reſiſtat dens regulæ H, progredi omnino nequit, niſi hic frangatur, aut deprimatur, vel dens rotæ F curvetur aut prorſus abradatur. Idem ergo cum contingat, ſi corporis cujuscunque alterius aſperi ſuper ſuperficie aſpera incedentis ſuperinceſſus radens fuerit; frictio omnis locum habet, quæ ab aſperitate ſuperficiei oriri poteſt. Enimvero ſi rota ED ſuper Tab. IX. Fig. 107.

per regula provolvatur, tum dens regulæ H inceſſui ejus non amplius reſiſtit, niſi quatenus ex cavitate F ſupra eminentiam dentis H attollendus. Idem cum valeat, ſi corpus quodcunque aſperum ſuper aſpera ſuperficie volvitur, frictio minor eſt, ſi ſuperinceſſus volvens, quam ſi radens extiterit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

955. Ne igitur in machinis frictio magnam vis moticis partem abſumat, cum cura diſpiciendum eſt, ut, quantum fieri poteſt, nulla pars machinæ alteram radat, quin potius una ſuper altera volvatur.

COROLLARIUM 2.

956. Hinc conſultum eſt, ut axiculi cylindrorum non (quod vulgo fieri ſolet) matrici concavæ, ſed rotulis A, B, C, D circa axiculos verſatilibus imponantur.

SCHOLION I.

957. *Suaſit hoc dudum* Paulus Caſatus (p) *& experientia confirmat, quantum virium hoc artificio lucremur. Quodſi metuas, ne axiculus cylindri ſatis tuto duobus rotulis* A *&* B *incumbat, tertiam addere licet.*

SCHOLION 2.

958. *Hinc etiam, ſi trochlea circa centrum mobilis, tractioni minus reſiſtitur, quam ſi eadem fixa foret. Eadem eſt ratio, cur rota curruum circa axem verſatiles ſint.*

SCHOLION 3.

959. *Patet quoque ratio, cur trabæ difficillime trahantur in plateis lapidibus ſtratis; facillime autem, ſi nive via obtegatur, ut planitiem probe politam exhibeat.*

[SCHOLION 4.]

960. *Ex eodem fonte* Olaus Roemerus, *cum Pariſiis commoraretur, quamvis non ſine ſubſidio Geometriæ ſublimioris deduxit, figuram dentium in rotis epicycloidalem eſſe debere: id quod poſt eum quoque oſtendit* Philippus de la Hire (q); *ſed, quod dolendum, hactenus in praxin recepta non eſt.*]

COROLLARIUM 3.

961. Quoniam rotulæ circa axiculum fixum verſatiles volvuntur, dum in ſuperficie corporis alterius incedunt; earum ope ſuperinceſſus radens in volventem transmutari poteſt, quotieſcunque datur.

SCHOLION 5.

962. *Ita in machinis, quæ ſerrarum reciprocatione, ligna ſecant, rectanguli lignei, cui ſerræ inſeruntur, latera iſtiusmodi rotulis inſtrui deberent. Minuta enim frictione, plures ſerræ una ſecare poſſent. Similiter brachia piſtillorum* Tab. X. Fig. 109.

(p) Mechanicornm lib. 2. c. 1. p. 130.

(q) Memoires de Mathemat. & de Phyſique p. 51 & ſeqq.

lorum attollendorum CD *rotulis inſtruere juvat, ut ſuper pinnulis curvis* EF *axis* FH *ſine frictione incedant. Pinnulis figuram epicycloidicam aſſignat* Cl. de la Hire (r).

COROLLARIUM 4.

963. Et quia axes curvati ſuperinceſſum plane tollunt (§.597); iis rotarum loco utendum, quotiescunque datur.

SCHOLION 6.

964. *Equidem nec hic ceſſat frictio in* E & G. *Enimvero ea perexigua eſt, ſi comparetur cum frictione, qua ex ſuperinceſſu rotarum oriri ſolet.*

SCHOLION 7.

965. *Equidem* Amonton *regulam univerſalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet caſu ſuperandam requiſitam* (s); *ſed cum omnem frictionem a ſola appreſſione ex pondere ſuperincedentis derivet, ex antecedentibus ſatis apparet, quod propoſito ſatisfacere nequeat.*

CAPUT XIX.

DE MACHINIS COMPOSITIS.

DEFINITIO 99.

966. *Machina compoſita* eſt, quæ ex pluribus ſimplicibus tanquam partibus conſtat.

SCHOLION.

967. *Machinarum compoſitarum nullus eſt numerus. Conſtruuntur autem tum ad onera ingentia attollenda, tum ad motus varios producendos, qui in uſum vitæ humanæ redundant. Omnia nimirum hominum opera a machinis perfici poſſunt, ad quæ idem ſemper motus vel continuo, vel juxta certam periodum repetitur. Ita ad frumentum in farinam conterendum rotatione continua ſaxi molaris opus eſt: unde hæc opera machinis demandatur. Similiter ad contuſionem granorum, ex quibus oleum exprimitur, piſtillorum elevatione continuo iteranda opus eſt: hinc a machinis contuſio iſta perficitur. Ut arbor proſtrata in aſſeres diſſecetur, continua ſerrarum reciprocatione opus eſt. Quare denuo machinarum vires ad hunc uſum transferuntur. Noſtrum equidem non eſt, theatrum quoddam machinarum in præſenti aperire; ſed ut compoſitionis earundem quandam ideam animo comprehendant tyrones, unum ſaltem alterumque exemplum in medium*

(r) loc. cit. p. 72. & ſeqq.

(s) Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1699. p. 260. & ſeqq. edit. Bat.

um afferemus, additis regulis quibusdam generalibus, quibus de machinis inveniendis ſolliciti juvantur.

PROBLEMA 154.

968. *Dato opere perficiendo, machinam componere.*

RESOLUTIO.

1. Ante omnia opus eſt, ut operis perficiendi notionem diſtinctam &, quantum licet, adæquatam habeamus: ad quam quomodo perveniatur, ex commentatione de methodo §. 8 & 10 colligitur, & alibi diſtinctius explicavi (t). Scilicet ſingula, quæ in opere perficiendo, ulla ratione diſtingui poſſunt, tum ſigillatim expendenda, tum inter ſe conferenda.

2. Ex hac operis perficiendi idea colligendum, quali motu opus ſit ad id præſtandum, quod requiritur: qui eſt effectus a machina producendus.

3. Ex eadem quoque conſtabit quantitas virium ad reſiſtentiam in motu ſuperandam requiſitarum: ubi

4. inprimis conſideranda eſt frictio ex ſuperincelsu mobilis oriunda & de remediis mechanicis capite ſuperiori expoſitis deliberandum.

5. Antequam vero conſilium ineatur, quibusnam machinis ſimplicibus combinatis motus deſideratus produci queat; de potentia machinam agitatura cogitandum eſt, quoniam pro ejus conditione variat interna quoque machinæ ſtructura. Quam primum igitur certus fueris de potentia ad machinam applicanda: externa ejus ſtructura ſtatim conſtabit ex capite decimo quarto.

6. Unde quantitate virium, quæ ad motum ultimum producendum requiruntur, una expenſa, vi capitis undecimi non difficulter determinantur machinæ ſimplices in compoſita combinandæ.

E. gr. Sit conſtruenda machina, qua onus ingens U in altum attolli poſſit & quæ commode de loco in locum transferri queat. Cum onus attollendum ſit corpus grave, ſtatim apparet, lineam directionis eſſe ad horizontem perpendicularem. Talis ergo conſtruenda eſt machina, quæ pondus ſurſum trahat ſecundum lineam directionis ad horizontem perpendicularem. Quoniam vero pondus oneris non determinatur, ſed Tab. X. Fig. 113.

(t) in Philoſ. ration. ſeu Logica §. 678.

ſed ſaltem ingens ſupponitur; machinam conſtruere ſufficit, qua homo pondus aliquod viribus ſuis longe ſuperius elevare poſſit, tempore tamen non nimis longo. Et quia machina compendioſa eſſe debet, ut commode huc illucque transferri poſſit; moveri optime poterit verſando, adeoque axe incurvato ABC inſtruenda (§. 175). Enimvero ut pondus ingens moveri poſſit, axis curvatus ſolus non ſufficit, ſed cum rota dentata GF axi horizontali GH infixa combinandus. Denique ut funis pondus ſurſum trahens circa cylindrum inferiore loco conſtitutum circumvolvi queat, ſupra trochleis I & K ad axem GH adducendus. Conſtat ergo machina ex axe GH cum rota ſtellata GF & axe dentato LC atque incurvato CBA duabusque trochleis I & K. Trochleæ ad virium incrementum nil conferunt, ſed ſola rota FG & axis incurvatus CBA. Eſt nimirum ſepoſita frictione potentia ſuſtentans ad pondus in ratione compoſita radii axis dentati LC ad BC & radii axis GH ad ſemidiametrum rotæ F (§. 812).

PROBLEMA 155.

969. *Machinam conſtruere, qua ingens admodum pondus ad altitudinem mediocrem attolli poteſt.*

RESOLUTIO.

ab. 1. Erigatur vectis AB, cujus centrum C, & in D infigatur uncus, cui onus attollendum G
g. 11. alligari poſſit.

2. Alteri vectis extremo B affigatur annulus E, qui cochleæ fœminæ F ſeu matrici afferruminetur.

3. Matrici inſeratur cochlea HI, quæ ergatæ IL circa axem ſuum in L mobili firmiter inſiſtat.

Quodſi enim mediantibus ſcytalis M, N, O, P, cylindrus IL cum cochlea HI circumagitur; matrix EF deſcendit & vectem AB deprimit, conſequenter pondus G attollit.

Quod vero exigua admodum vi pondus admodum ingens attolli poſſit, patet ex theor. 178. (§. 765) & theor. 198. (§. 847). Eſt nimirum potentia ad pondus in ratione compoſita AC ad CB, ſi AB fuerit horizontalis, & diſtantiæ duarum helicum in cochlea ad peripheriam ſcytala deſcriptam. Sit e. gr. diſtantia helicum 3''', longituto ſcytalæ 3', erit peripheria, quæ eadem deſcribitur 942''', adeoque potentia in N eſt ad reſiſtentiam in E ut 3 ad 942, hoc eſt, ut 1 ad 314. Sit jam AC : CB = 1 : 3; erit ergo reſiſtentia in E $\frac{1}{3}$ ponderis G, conſequenter potentia ad ſcytalam M applicata $\frac{1}{942}$ ponderis. Quodſi ſingulis ſcytalis ſingulæ potentiæ appli-

centur; erit una earundem $\frac{1}{3780}$ ponderis.

COROLLARIUM.

970. Si cochlea cum ergata remota funis ET alligetur in B, pondus G ſimiliter cum virium compendio attolletur, quamvis multo minore (§. 765).

SCHOLION.

971. *Machina poſteriore utuntur ad onera ex navi una in alteram contiguam transponenda.*

PROBLEMA 156.

972. *Molam acuminariam conſtruere, hoc eſt, machinam, qua inſtrumenta ferrea aut chalybea acuuntur.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. III. 1. Cotes aquariæ A & B axi CD curriculo F inſtructo infigantur ad acuendum.

2. Axi alteri EG infigantur duo orbes lignei H & I, ſuper quorum primo H arena politura inchoatur, ſuper altero vero I ſmyride continuatur. Addantur duo alii minores K & L corio ſuperinducti, ſuper quibus ſmyridis pulvere ſubtiliori politura perficitur.

3. Utrique axi DC & GE infigatur etiam rotula M in peripheria crena inſtructa, ut loro circa utriusque peripheriam circumducto una alteram movere poſſit.

4. Ad curriculum F circumagendum adhibeatur rota ſtellata N, quæ communem cum rota molari PQ, e. gr. retrograda, palmulas in fronte gerente, axem habet, ac pro diverſo aquæ impetu pluribus vel paucioribus dentibus inſtruitur, ut motus cotium ſit ſatis celer.

5. Denique cum cotes continuo madidæ eſſe debeant; ad rotam molarem applicanda ſunt duo hauſtra, quæ aquam in canalem ST effundunt per declive ex V & Z in cotes delabentem.

SCHOLION.

973. *Solent quoque molæ unice ad poliendum conſtrui, tumque orbes axi* GE *infixi aptantur ad primarium* DC, *ipſi vero* GE *alii minores inſeruntur.*

COROLLARIUM.

974. Si tam aquæ copia, quam declivitas ſufficiens fuerit; cotes axi rotæ molaris NY infigere licet.

PROBLEMA 157.

975. *Molam frumentariam ab aqua agitandam conſtruere.* Tab. X. Fig. II.

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur rota molaris ſive dire-

directa, ſive retrograda, prout caſus tulerit, nunc major, nunc minor, prout major vel minor aquæ copia & declivitas fuerit. Sit e. gr. rota retrograda AB 18 pedum eaque 33 palmulis inſtructa.

2. Ejusdem axi infigatur rota DE, cujus diameter illius ſubdupla, vel etiam major, pro diverſa aquarum moventium vi, & quæ dentes, in noſtro caſu numero 48, in plano gerat.

3. Per curriculum FI 6, 7, 8, immo 9 bacillis inſtruendum, pro diverſa celeritate, qua rota molaris movetur, virga tranſeat ferrea, cujus capiti pyramidem fere truncatam figura ſua referenti incumbat *meta* (ſeu lapis molaris ſuperior) *catimum* (ſeu lapidem infariorem) fixum 4 fere digitis circumcirca ſuperans atque in medio excavatus, ut frumentum inter lapides demitti & comminutum ad circumferentiam propelli poſſit.

4. Ex ſcala ſuſpendatur infundibulum *pq* mediante axe in peritrochio *st* pro arbitrio attollendum ac deprimendum. Inde

5. bacillus propendeat in foramen metæ annulo ferreo cum unco M munitum, quo illum propellens infundibulum agitet, ut frumentum in lapidem molarem demittatur.

6. Infundibulo fere inſiſtat capſa H pyramidem truncatam referens & tam ſuperius, quam inferius aperta, cui frumentum indatur.

7. Lapides cingantur ciſta cylindrica, ſpatio inter eam & metam nonniſi duorum digitorum relicto.

8. Arbor farinaria NO prope contactum metæ atque catini foramine pertundatur, ut per id frumentum contritum in ſacculum tremulum ex peculiari linteo (noſtrates Beuteltuch appellant) confectum devolvatur & farina ſurfure ſeparetur.

9. Sacci, cujus latera loris aſſuta, extremis vero P & Q annuli ferrei inſuti ſunt, longitudo in tres partes æquales dividatur & in fine partis tertiæ aſſuantur annuli coriacei *a* & *b*, qui infigantur bacillis ad cylindrum *cd* circa axem mobilem affixis.

10. Eidem cylindro *cd* affigatur forcipula *ef*, intra quam ope clavi lignei firmetur regula *hf* alteri *ik* cylindrulo *lm* circa

axem ſuum verſatili infixæ in *i* incumbens.

11. Curriculo FI ſub angulo obliquo infigantur tres bacilli æqualiter a ſe invicem diſtantes, qui regulam *ki* impellentes alteram *hf* protrudunt & ſic ſaccum attollunt, mox iterum relapſurum, regula *ik* in ſitum priſtinum recidente.

Tab. XI. Fig. 113. 12. Quodſi aquæ impetus tantus fuerit, ut molam duplicem circumagere poſſit; axi rotæ molaris infigitur rota ſtellata LM, quæ duas rotas radiatas NO ab utroque latere adjacentes impellit, quarum ſaltem unam ab uno latere in ſchemate exprimere libuit: reliqua omnia ſunt ut ante. Ratio diametri rotæ LM ad diametrum rotæ molaris AB ſit ut 1 ad 2, ad diametrum vero radiatæ ut 3 ad 2: quamvis eidem ſtricte inhærendum non ſit, ſi aliæ circumſtantiæ aliam ſuadeant.

SCHOLION I.

976. *Rotarum dimenſiones dentiumque numeri variant pro varietate impetus aquæ in rotam molarem impingentis, quæ partim ab ejus ſectione, partim a declivitate, per quam ad illam delabitur, pendet. Conſtat vero ex ſuperioribus* (§. 792), *rotas fieri debere majores, ubi minor fuerit aquæ vis; minores vero, ubi hæc major.* Bœcklerus (u) *diametrum rotæ vel ſolo impetu fluminis ſine declivitate in præcipitium mutata, vel ab exigua copia aquæ per declive delapſa agitandæ fieri præcipit* 48 *pedum, numerum palmularum* 86; *diametrum rotæ ſtellatæ* LM 18 *pedum, numerum dentium* 180, *numerum bacillorum in rota* DE 60. Caſatus (x) *annotat, in Pado communiter longitudinem rotæ molaris* AB *eſſe cubitorum* 10, *diametrum totam cubitorum* 6, *inferiorem rotam* DE *diametrum habere cubitorum* $5\frac{1}{2}$, *dentes* 108 *plano infixos & curriculum* FI *in fuſos* 9 *diſtingui; lapidem molarem in craſſitudine numerare uncias 6 aut 7, in diametro cubitos* $2\frac{1}{2}$. Franciſcus Philippus Florinus (y) *rotæ retrogradæ ab aqua rivuli* 4 *vel* 5 *pedum declivitatis agitandæ diametrum conſtituit* 18 *pedum, numerum palmularum* 30 *vel* 36, *latitudinem palmularum* 10 *vel* 14 *digitorum, altitudinem unius pedis. Rota dentata* DE *dentes aſſignat* 72, *curriculo bacillos* 6, 8 *vel* 9, *prout rota externa vel tardius, vel celerius movetur. In fluvio Halam Saxonum alluente rotarum retrogradarum molam duplicem circumagentium altitudo non excedit* 16 *pedes.* Tab. X. Fig. 131.

COROLLARIUM.

977. Quodſi ſitus rotæ verticalis LM mute- Tab. XI. Fig. 113.

(u) In der Hauß- und Feld-Schule part. 3. Claſſ. 6. p. 500 & 501.
(x) Mechan. lib. 5. c. 7. p. 560.
(y) Im klugen Hauß-Vater lib. 2. c. 42. §. 308. & ſeqq.

mutetur in horizontalem & dentes in plano infigantur; rotæ vero molari ſubſtituatur vectis veluti in ergata, reliquis omnibus manentibus ut ante: molendinum habebimus manuarium, a duobus hominibus in loco ſuperiore deambulantibus commode agitandum. Eſt vero longitudo vectis ex una parte 8 pedum, ex altera totidem pedum, rotæ dentatæ LM diameter $8\frac{1}{2}$ pedum, alterius DE 10 pedum & 2 digitorum, numerus dentium in priore 72, in poſteriore 40, numerus bacillorum in curriculo 6.

SCHOLION 2.

978. *Multis adhuc modis aliis mola manuaria conſtrui poſſunt. Eminet vero inter eas quoddam genus, quod vi exigua moveri poteſt, ſuperincesſu rotarum penitus ſublato. Id igitur ut deſcribatur, e re noſtra judicamus.*

PROBLEMA 158.

979. *Molam manuariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

b. 1. Conſtruatur duæ rotæ AB & CD, quarum diameter 5 vel 6
. pedum, & inferius ad conſer-
4. vandum impetum plumbo infuſo oneretur.

2. Per centrum utriusque defigatur axis incurvatus HG per vectes IK & IL convertendus, ut ſupra docuimus (§. 884).

3. In rotæ ſuperioris AB ambitu canaliculus excavatur, ut funis ceratus commode circumduci queat: qui idem

4. Circumducendus circa peripheriam alterius rotulæ minoris MN infixi virgæ ferreæ PQ, cui eidem

5. infigatur crux ex brachiis ferreis conſtans RSTV, quibus ſingulis affixum eſt pondus plumbeum, ad impetum conſervandum.

6. Reliqua fiant, ut in problemate præcedente (§. 979).

SCHOLION.

980. *Axiculi rotarum ferrei ſuſtentaculo orichalceo incumbere debent, quod & affrictum minuit, & ad durabilitatem conducit. In omni autem molarum genere ſuſtentaculum virga ferrea, cui lapis molaris incumbit, ita conſtruendum, ut ad arbitrium attolli ac deprimi posſit, prout uſus poſtulaverit. Major enim lapidum diſtantia requiritur, ſi grana integra conterenda, quam ſi jam contrita in farinam convertenda.*

PROBLEMA 159.

981. *Molam jumentariam conſtruere.* Tab. VII. Fig. 82.

RESOLUTIO.

1. Erigatur cylindrus verticalis DN, cujus diameter 14 digitorum cum temone GH quatuor virgis ferreis ad rotam firmando.

do. Immo temo geminari poteſt.

2. Circa eundem cylindrum conſtruatur rota ſtellata IK, cujus diameter $14\frac{1}{2}$ pedum, 16 lignis transverſus (quale IL) quorum latitudo 7, craſſities 2 digitorum, connectenda, & adhuc aliis 16 (quale IO) quorum longitudo 7 pedum, latitudo 4 & craſſities $8\frac{1}{2}$ digitorum firmanda.

3. Dentes ex ligno quercino probe ſicco parati ita infigendi, ut axes eorundem diſtent $4\frac{1}{2}$ digitis.

4. Curriculi P diameter 22 digitorum & numerus fuſorum ſeu bacillorum 11, quorum longitudo 18, diameter duorum digitorum.

5. Reliqua fiant ut in probl. 157. (§. 975).

Aliter.

Tab. XI. Fig. 113. Quodſi rota adeo ingens non commoda viſa fuerit, conſtruere licet minorem, cujus diameter nonniſi 7 pedum, $1\frac{1}{3}$ digitorum, dentes 64 in plano gerentem. Hæc rota ut ſuperius (§. 975) circumagit aliam rotam radiatam NO, cujus diameter $21\frac{1}{3}$ digitorum, numerus babillorum 16. Cum eodem eidem axi infigitur rota DE, cujus diameter 6 pedum, dentes 72 in plano gerens & curriculum FE 6 fuſis inſtructum circumagens. In rota priore craſſities dentis 2, in poſteriore $1\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo temonis 5 pedum.

PROBLEMA 160.

982. *Molam alatam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Structuram externam docuimus ſupra (§. 929). Interna conſtat ex rota dentes in plano habente atque curriculo, ut in molis frumentariis, quæ ab aqua moventur (§. 975). Numerus dentium in rota dentata eſt 72, vel 80: numerus fuſorum in curriculo 9 vel 8. Quælibet ala eſt pedum 30 vel 32.

PROBLEMA 161.

983. *Molam oleariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Mola olearia ita conſtruenda, ut tum materiam contundere, tum ex contuſa atque toſta oleum exprimere valeat. Utrumque igitur ut præſtetur, Tab. XI. Fig. 115.

1. Axi rotæ molaris infigatur rota ſtellata AB, quæ circumagat

2. rotam radiatam AE axi EF inſertam, cui hinc inde pinnulæ G

læ G infiguntur piſtilla HI attollentes.

3. Piſtillorum baſes itemque fundi vaſorum K in trunco LM excavatorum lamina ferrea obducantur, ut ſemina lini, rapicia, amygdalæ, nuces, nuclei prunorum, vel quæcunque detur materia, probe contundantur, piſtillis proprio pondere relabentibus.

4. In parallelepipedo LM excaventur duo minora, quorum baſis inferior ſit perforata, ut oleum expreſſum inde in vaſa ſubjecta deſtillare poſſit. Intra ea reponitur materia contuſa & in aheno ſuper igne toſta, panno ex pilis contexto involuta atque inter duas tabulas P & Q, in quarum una hemiſphærium cavum, in altera convexum, compreheuſa. A parte poſtica intruditur cuneus acie ſua prominens in H & ab antica infigitur alius N.

5. Ut cuneus alter N vi adigi ſicque oleum exprimi poſſit, malleus P cum vecte PQ cylindro RL circa axem ſuum mobili affigatur, mediante ligno transverſo TV ad cuneum dirigendus.

6. Ad eundem cylindrum RS in oppoſito latere aptetur forceps *ab*, intra quem continetur contus *bd* cum pinnula *ef*, quæ a pinnula cylindro EF infixa deprimitur & malleum P attollit proprio pondere cum impetu in cuneum N mox relabentem.

COROLLARIUM 1.

984. Quoniam rota radiata AE cum ſtellata AB ideo adhibentur, ut cylindrus EF celerius circumagatur; ſi aquæ ſufficiens copia atque declivitas, vel numerus piſtillorum exiguus fuerit; ipſi cylindro EF rota molaris ab aqua agitanda infigi poteſt. Et tales ſunt molæ metallicæ, quæ malleis ferreis 57 librarum piſtillis 12 pedum affixis materiam metallicam crudam comminuunt.

COROLLARIUM 2.

985. Si vis aquæ ſufficiens adfuerit, duo cylindri pinnulis ſuis piſtilla elevantes a rota ſtellata circumagi ſolent.

COROLLARIUM 3.

986. Et quia perinde eſt, quæcunque materia contundatur; eadem manet ſtructura, ſi mola conſtruatur, ad materiam pulveris pyrii contundendam. Sint e. gr. piſtilla 16 in duas ſeries diſtributa: rotæ molaris ab aqua convertendæ altitudo erit 18 pedum, numerus palmularum, quarum latitudo 2 pedum, altitudo unius, 48; diameter rotæ AB 7′ 3″, numerus dentium 60; longitudo

tudo cylindri EF 15′ 10″, diameter 14″; diameter rotæ radiatæ 3′ 2″, numerus fuſorum 24; integra piſtilli altitudo 9′ 2″, craſſities & latitudo 4″. Sed ſi rota externa calcando movetur (§. 886), diameter ejus eſſe poteſt 16 pedum, rotæ ſtellatæ AB $5\frac{1}{2}$, numerus dentium 60, numerus fuſorum in rota radiata 20; longitudo cylindri EF 16 pedum, numerus piſtillorum 9.

SCHOLION 1.

987. *Structura molarum chartariarum eadem eſt, quam in corollario primo (§. 984) expoſuimus, niſi quod tudicula AB ferro obducta in B vecti homodromo DC circa baculum EF mobilem ad angulos rectos infigantur, a pinnulis axi rotæ molaris infixis in C impellendo, & per canalem vel ope antliæ, vel ope hauſtrorum ad rotam molarem applicatorum aqua continuo in linamenta contundenda deduci debeat.*

Tab. XI. Fig. 116.

SCHOLION 2.

988. *Cum ſtructura molæ oleariæ prorſus convenit ſtructura trituratoria, quæ anno* 1700. *Erzæ in ditione Electorali Brunſwicenſi inventa & cum inſigni fructu ad frumenta ſtraminibus ejicienda adhibetur, niſi quod peculiari artificio opus ſit ad flagella dextre applicanda & rota verticularis addatur. Deſcribitur in Miſcellaneis Berolinenſibus* (z).

PROBLEMA 162.

989. *Machinam conſtruere, quæ materiam pulveris pyrii ſine piſtillis conterat.*

RESOLUTIO.

1. Rota dentata AB communem axem cum aquaria habens impellat radiatam CD, ad cujus axem. Tab. XI. Fig. 117.
2. Aptentur duo cylindri plumbei lamina orichalcea obducti aut (quod melius judicatur) marmorei DE, quorum diameter 6, 7 vel 8 pedum, craſſities 6 digitorum.
3. Cylindri, axe HI circumacto, vel in vaſe cylindrico orichalceo, ſi plumbei fuerint; vel ſuper ſaxo mormoreo ad profunditatem duorum digitorum excavato, ſi marmorei fuerint, incedant.

SCHOLION 1.

990. *Ideo ex orichalco aut potius e marmore machina conſtruitur, quia ex hac materia per frictionem nulla ſcintillula eliciuntur, unde non ſine ingenti damno in aliis molendinis materia pulveris pyrii ignem concipere ſolet:*

SCHOLION 2.

991. *Ceterum cylindris verticaliter erectis utuntur etiam ad materias alias conterendas.*

PRO-

(z) pag. 325.

PROBLEMA 163.

Tab. XII. Fig. 118. 992. *Molam ſerrariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

In molis ſerrariis duplex motus conſiderandus, quorum altero ſerra reciprocatur, altero veto lignum ad ſerram continuo promovetur. Ad motum ſerrarum producendum

1. Axi rotæ aquariæ, cujus diameter 17 vel 18 pedum, infigatur rota ſtellara AB, cujus diameter ſine dentibus 8 pedum, numerus dentium 72. Hæc
2. Incedat ſuper rota radiata CD 12 vel 8 (pro diverſa vi aquarum) bacillis inſtucta & communem axem habente cum rota verticulari EF, cujus diameter 4 vel 5 pedum.
3. Alteri hujus axis extremo infigatur axis ferreus curvatus G, eique mediante bacillo GH jungatur tendicula lignea IK cum ſerra HL, intra duas pilas ita conſtricta, ut nonniſi ſurſum protrudi ac deorſum trahi poſſit.
4. Ad motum ligni efficiendum conſtruendus eſt currus *abcd*, cujus longitudo longitudini ligni ſecandi proportionata, e. gr. 18 pedibus major, latus vero alterum dentibus inſtructum.
5. Ut ergo lignum uncis ferreis ad currum firmatum ad ſerram continuo promoveatur, axi *gh* infigatur baculus *ik*, cujus alterum extremum *k* inditum eſt annulo ad rendiculam IK firmato & prope alterum extremum forreps *m* contineat furcam *ml* usque ad dentes rotæ ſerratæ *ln* extenſam, cujus diameter duorum pedum.
6. Porro axi rotæ ſerratæ ferreæ infigenda eſt alia radiata *pq* 6 bacillis inſtructa, qua circumagitur rota ſtellata *rſ* dentes 36 & axem communem cum alia radiata *tv* habens, quæ 6 bacillis inſtructa currum propellit.

SCHOLION.

993. *Dantur & adhuc alii modi currum propellendi, quos repræſentat* Bœcklerus (a). *Nos eum deſcripſimus, quo ordinarie utuntur. Cæterum idem* Bœcklerus (b) *molam ſerrariam manuariam accurate delineat.*

PROBLEMA 164.

994. *Horologium oſcillatorium Hugenianum conſtruere.* Tab. XII. Fig. 116.

Wolfii Math. Tom. 2. Rr *RE-*

(a) in Theatro Machinarum f. 60 & ſeqq.

(b) in der Hauß- und Feld-Schule Tom. 1. claſſ. 6. p. 512 & 513.

RESOLUTIO.

1. Fiant laminæ AA & BB ſemipedali longitudine, pollices duos & ſemis latæ, quibus rotarum præcipuarum axes inſerantur.

2. Rota infima CC 80 dentibus incidatur in convexo & eidem axi affigatur orbiculus aculeatus DD. ex quo pondera ſuſpendantur.

3. Rota CC impellat tympanum E dentium octo & una rotam ſtellatam F dentium 48.

4. Rota F circumagat tympanum G dentium 8 & una rotam coronariam H dentes 48 in plano habentem.

5. Hæc agitet tympanum I dentium 24 & rotam ſerratam K dentium 15.

6. Supra eam collocetur axis pinnatus LL eique affigatur clavula S, ima ſui parte reflexa aciforamine oblongo penduli intra duas laminas cycloidicas duplici filo ſuſpenſi virgam ferream cum appenſo pondere plumbeo X complexa.

7. A lamina AA quarta digiti parte diſtet alia YY, in qua deſcribentur circuli horarii ex centro axis rotæ infimæ CC. Interior in 12 horas; exterior in 60 ſcrupula prima dividatur.

8. Axi rotæ C aptetur rota *bb* tubulo ultra laminam YY continuato cohærens, ita ut una cum axe circumagatur, ſine eodem tamen converti poſſit, ubi è re fuerit.

9. In tubuli prædicti extremo *e* applicetur index. horæ ſpatio circuitum abſoluturus atque ita minuta horaria indicaturus.

10. Rota *bb* impellat aliam *gg* 30 itidem dentium, cujus axi cohæreat tympanum ſex dentium *d*: quod tandem

11. Convertat rotam dentium 72 indicem horarium minutario breviorem circumferentem.

12. Axi rotæ H affigatur orbis *ll* & in eo circulus in 60 partes æquales diviſus deſcribatur, qui per inciſum in lamina YY foramen minuta ſecunda monſtret.

13. Longitudinem penduli, ut jam ſupra notatum eſt, *Hugenius* (c) inventor experimentis factis deprehendit eſſe partium trium, quarum una eſt ad pedem Pariſinum ut 864 ad 881 (§. 470).

14. Pondus perpendiculi X trilibre eſſe debet & ne occurſu aëris motus impediatur, optima ejus forma eſt lenticularis. Ponderis *b*, quo horologium movetur, magnitudo certo definiri ne-

(c) in Horologio oſcillatorio f. 7.

nequit, ſed per experientiam determinanda. *Hugenius* pondere 6 librarum uſus eſt, diametro orbiculi D unius digiti exiſtente, longitudine autem penduli ea, quam diximus.

15. Cæterum ne motus horologii interrumpatur, dum pondus ſurſum trahitur; peculiari hoc artificio ſuſpendendum, quod à laudato *Hugenio* repertum. Funis ſcilicet in ſe rediens orbiculum D amplectatur & inde deſcendens altera ſui parte trochleam *c* ſubeat, cui pondus *b* appenſum. Hinc ſuper orbiculum D extrinſecus horologio affixum aſcendit iterumque ad trochleam alteram F deſcendit, cui pondus G appenſum majus *b* retinens, ne aliter quam orbiculo D revoluto deſcendat. Hic autem ſerratis dentibus ita aptatur, ut tracto fune E volvatur, in partem vero contrariam revolvi nequeat. ab. II. g. 10.

SCHOLION 1.

995. *Horologia hac oſcillatoria Hugeniana adeo accurate conſtrui poſſunt, ut tempus æquale accuratius dimetiantur quam motus ſolis diurnus inæqualis, ceu in chronologicis oſtendetur. Unde in Aſtronomia, ubi accurata temporis menſura requiritur, ingens eorum eſt uſus. Sane Vir* Cl. Philippus de la Hire (d) *teſtatur, ſe ſæpius expertum eſſe, quod intra octiduum à medio ſolis motu vel minuto ſecundo non aberrent.*

SCHOLION 2.

996. *Cum pleraque machinæ ex ligno conſtrui ſoleant, non incongruum videtur epilogi loco rotarum dentatarum lignearum conſtructionem edocere.*

PROBLEMA 165.

997. *Rotas dentatas & radiatas ligneas conſtruere.* Tab. XI. Fig. 120.

RESOLUTIO.

1. Orbes rotarum, quibus dentes inſiguntur, ex diverſis partibus componuntur. Si dentes in plano inſiguntur, aliæ partes ſunt ſegmenta circuli A, aliæ ſegmenta annulorum circularium B. Poſteriores ita ſuperimponuntur prioribus, ut juncturæ D partium A medio partium B & contra juncturæ C partium B medio partium A respondeant. Foraminibus perforatæ clavis ligneis junguntur. Quot vero partes in uno plano habuerit orbis, tot lignis transverſis F F firmantur. Quodſi dentes in convexo inſigendi; partes in utroque plano ſunt ſegmenta annularia B.

 2. Pe-

(d) In epiſtola dedicatoria Tabulis Aſtronomicis præmiſſa.

2. Peripheria circuli, in qua centra dentium infigendorum exiſtunt, in tot partes æquales diviſa, quot dentes rota habere debet, intervallum unum dividitur in 16 partes æquales, quales 7 tribuuntur denti, 9 vero interſtitio inter binos relinquuntur, quarum & cedunt diametro bacilli. Vel idem dividitur in 7 partes æquales, quarum 3 ſpisſitudini dentis IK, $3\frac{2}{3}$ ſpisſitudini ſeu diametro bacilli tribuuntur.

Tab. XII. Fig. 121. 3. Idem intervallum dividitur in 5 partes æquales & 2 tribuntur altitudini dentis HG. Sunt & qui HG fere $\frac{1}{4}$ faciunt.

4. Anguli dentium ſecundum convexitatem arcus prope contactum bacilli terminati reſecantur, ut ſuperineesſus ſuper bacillo volvens (§. 937) frictionem imminuat (§. 954).

5. Foramina, quibus dentes infiguntur, esſe debent quadrata & axiculi ferrei in centris rotarum exacte conſtituendi, eo meliores, quo minores, quia minorum minor eſt frictio, eadem de cauſa imponendi concavo orichalceo aut ſaltem ligneo, nequaquam ferreo.

6. Rotæ radiatæ duplicem plerumque habent orbem, niſi bacilli exiguæ fuerint longitudinis, & ſi numerus bacillorum exiguus & reſiſtentia ingens, cylindro ligneo inciduntur: id quod in molis ſerrariis fieri conſuevit.

SCHOLION 1.

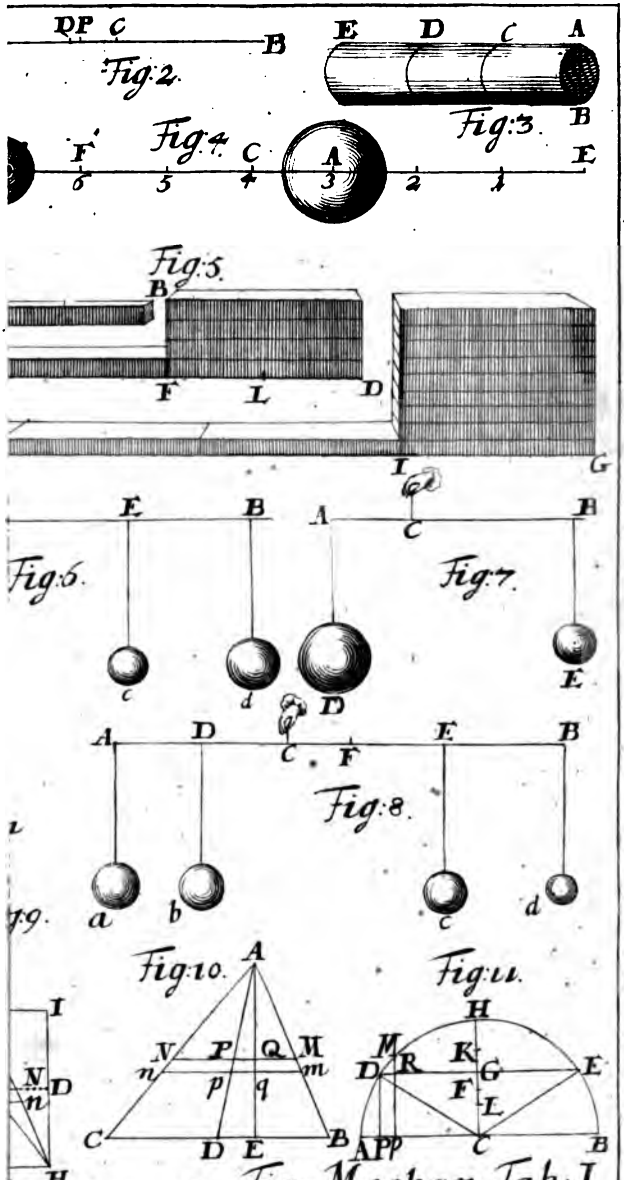
998. *Diſtantia dentium in rotis, quorum uſus in molendinis eſt, intra ſpatium 4 & 5 digitorum fere continetur.*

SCHOLION 2.

999. *Rota horologiorum metallica accuratam inprimis exigunt diviſionem, ad quam abſolvendam peculiaribus inſtrumentis opus eſt* a Leupoldo (e) *deſcriptis.*

(e) in Theatro Machinarum generali c. 5. §. 93. 94.

FINIS MECHANICÆ.



II. Lit. A. Fig: Mechan: Tab: I.

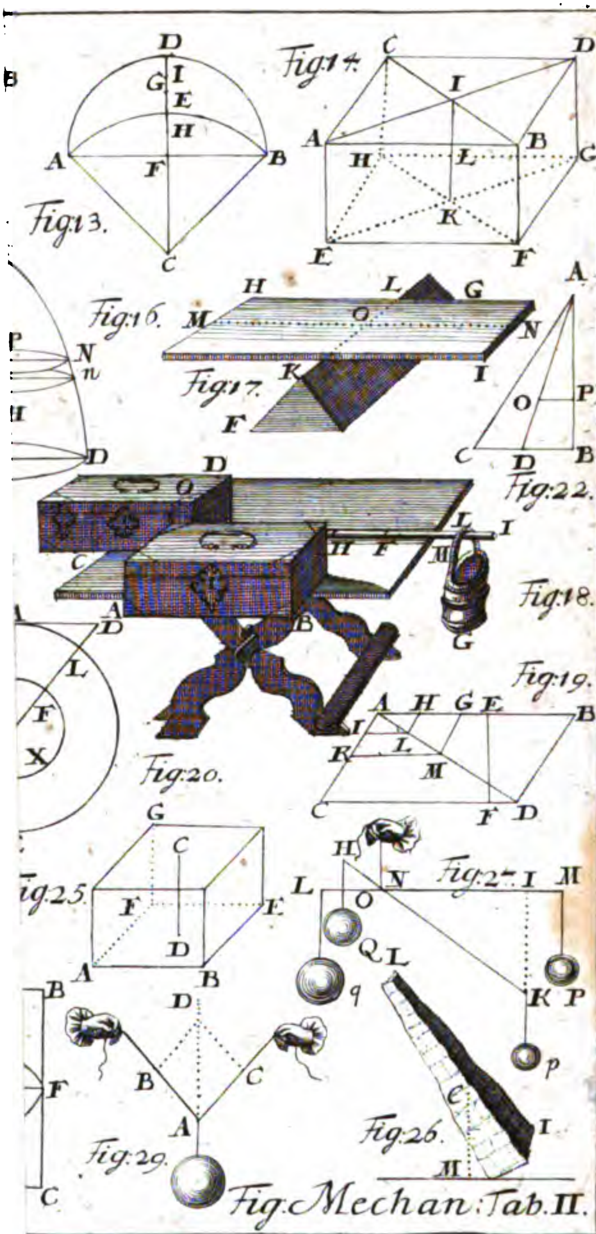
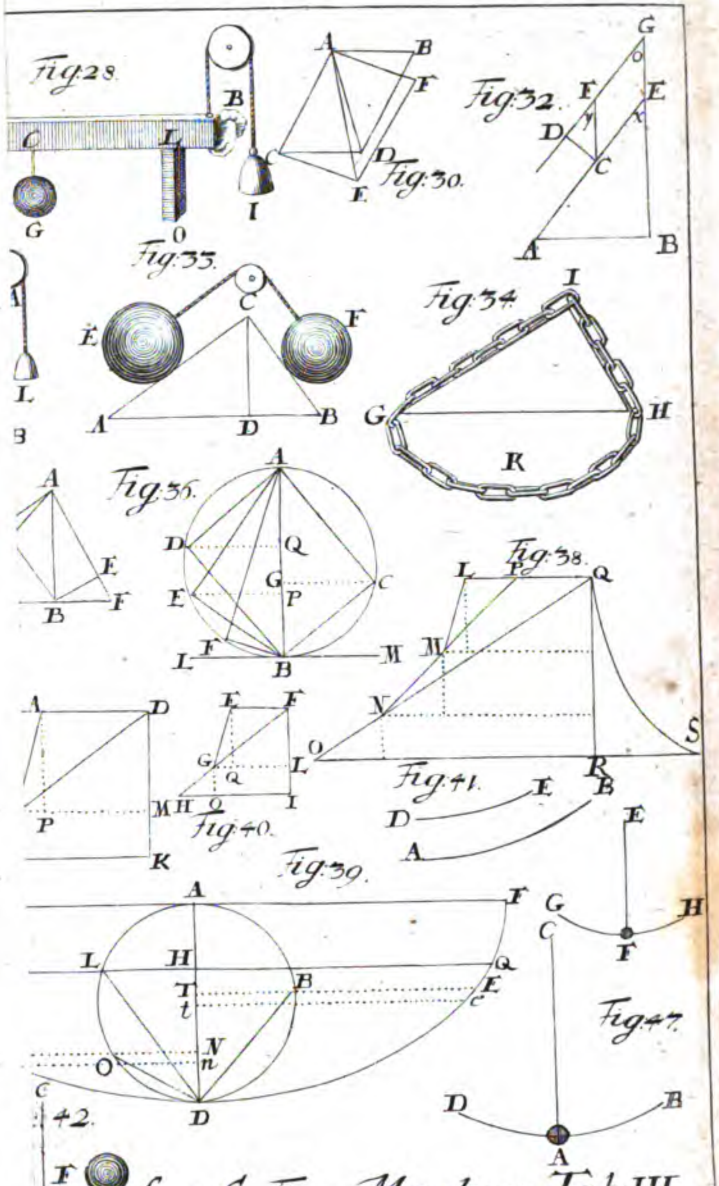
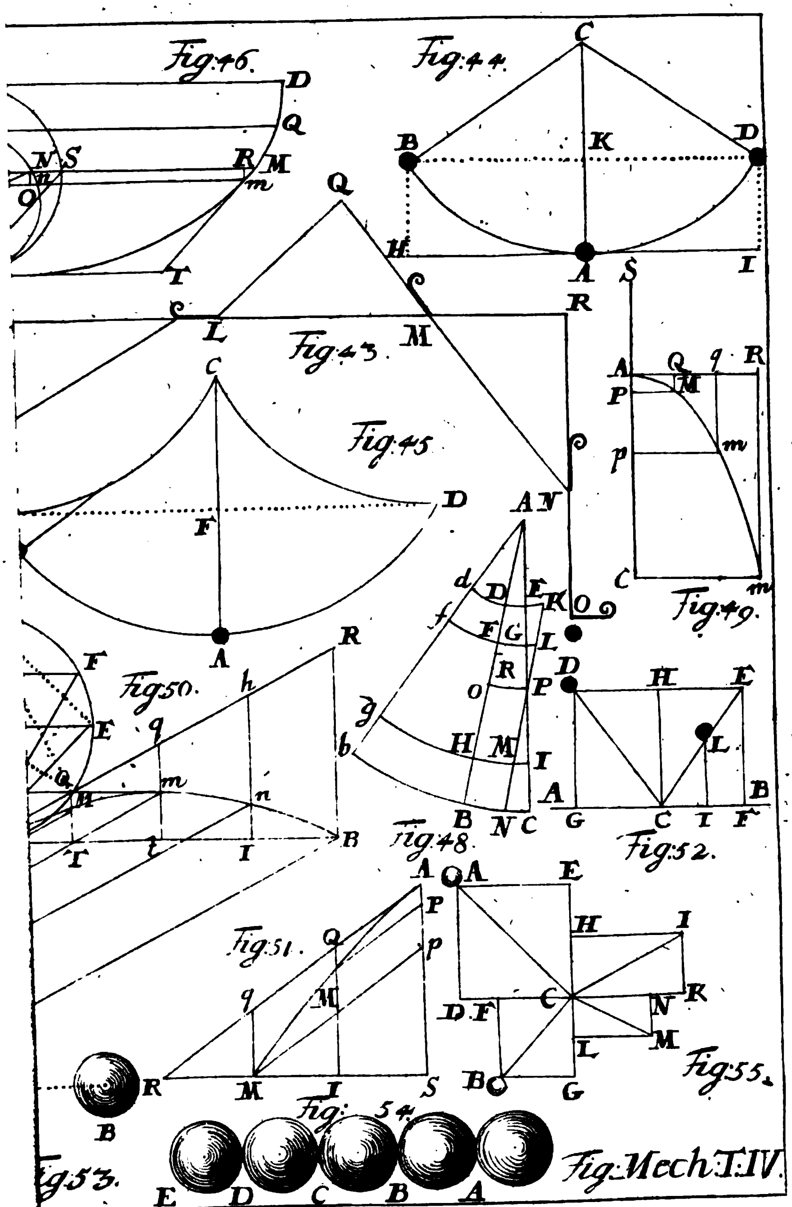
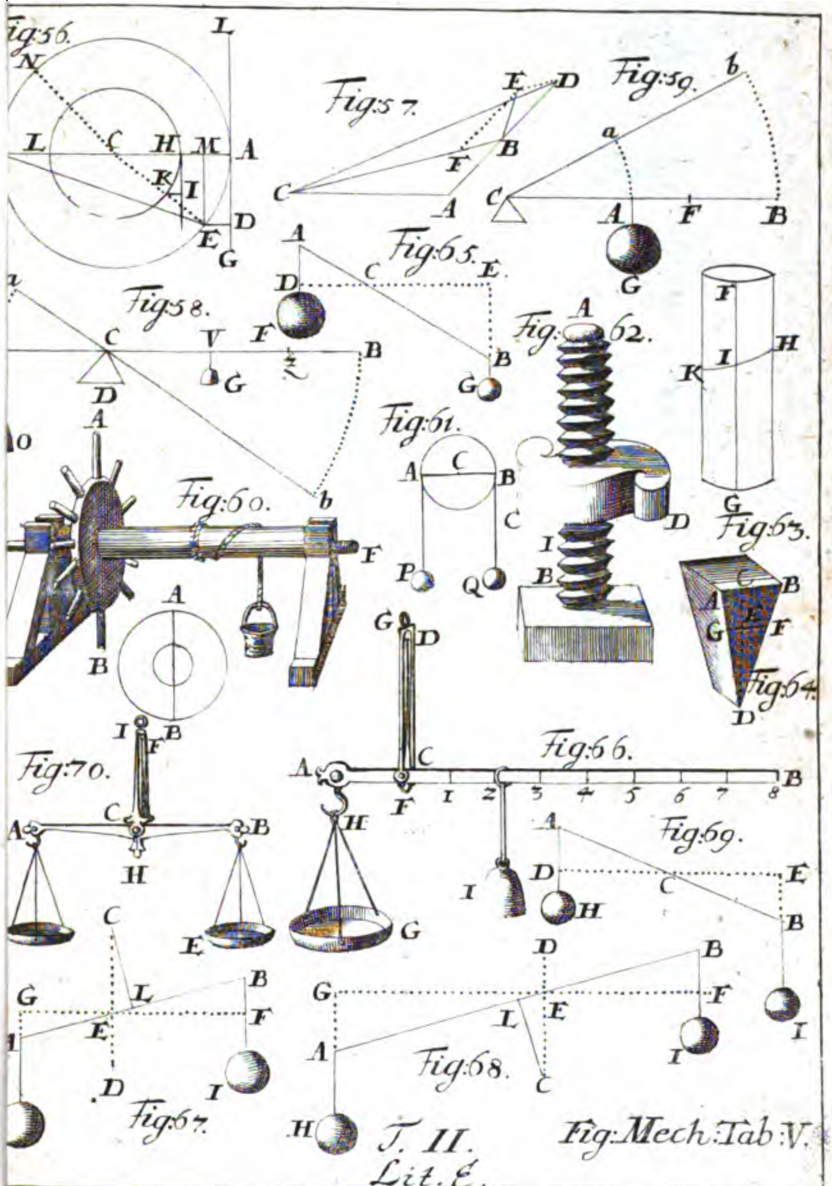


Fig. Mechan: Tab. II.



II. Lit. C. Fig. Mechan: Tab: III.


Fig. 46.
Fig. 44.
Fig. 43.
Fig. 45.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 48.
Fig. 52.
Fig. 51.
Fig. 55.
Fig. 54.
Fig. 53.
Fig. Mech. T. IV.


Fig:56.
Fig:57.
Fig:58.
Fig:59.
Fig:60.
Fig:61.
Fig:62.
Fig:63.
Fig:64.
Fig:65.
Fig:66.
Fig:67.
Fig:68.
Fig:69.
Fig:70.
T. II.
Lit. E.
Fig: Mech: Tab: V.

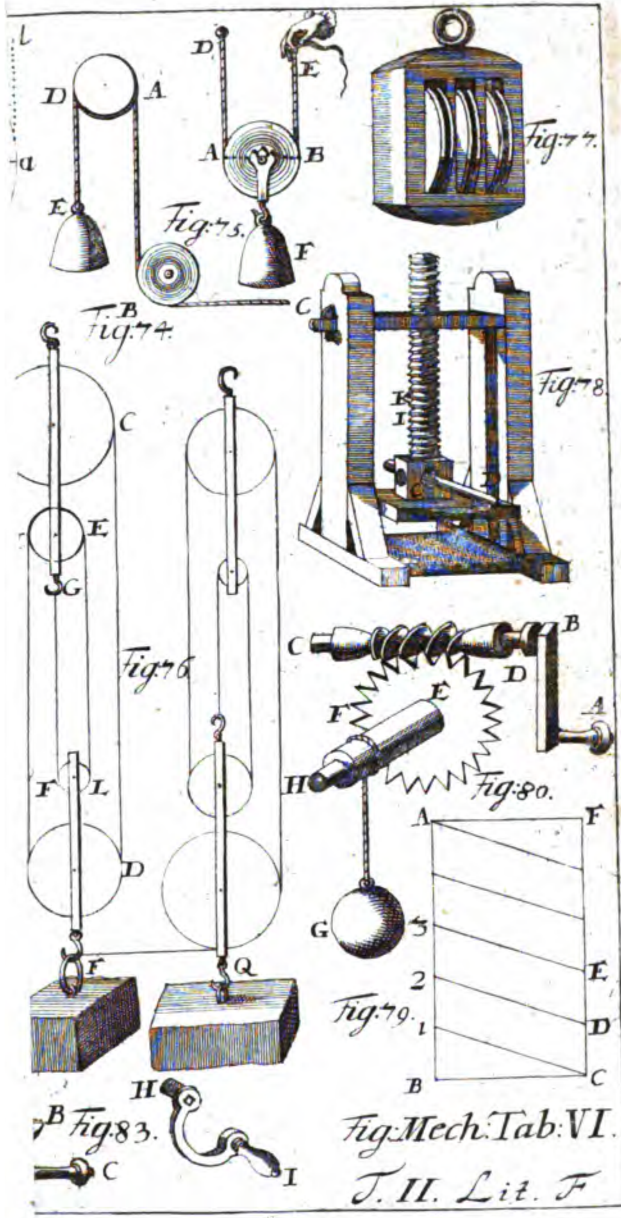


Fig: Mech: Tab: VI.

T. II. Lit. F

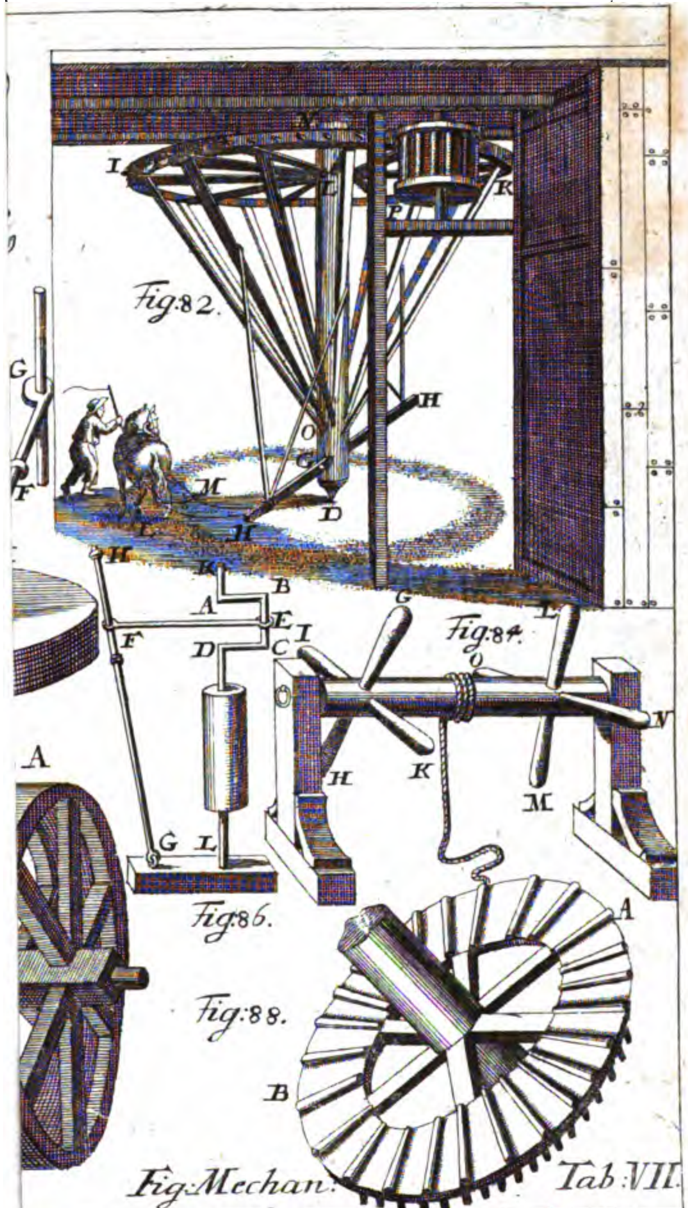
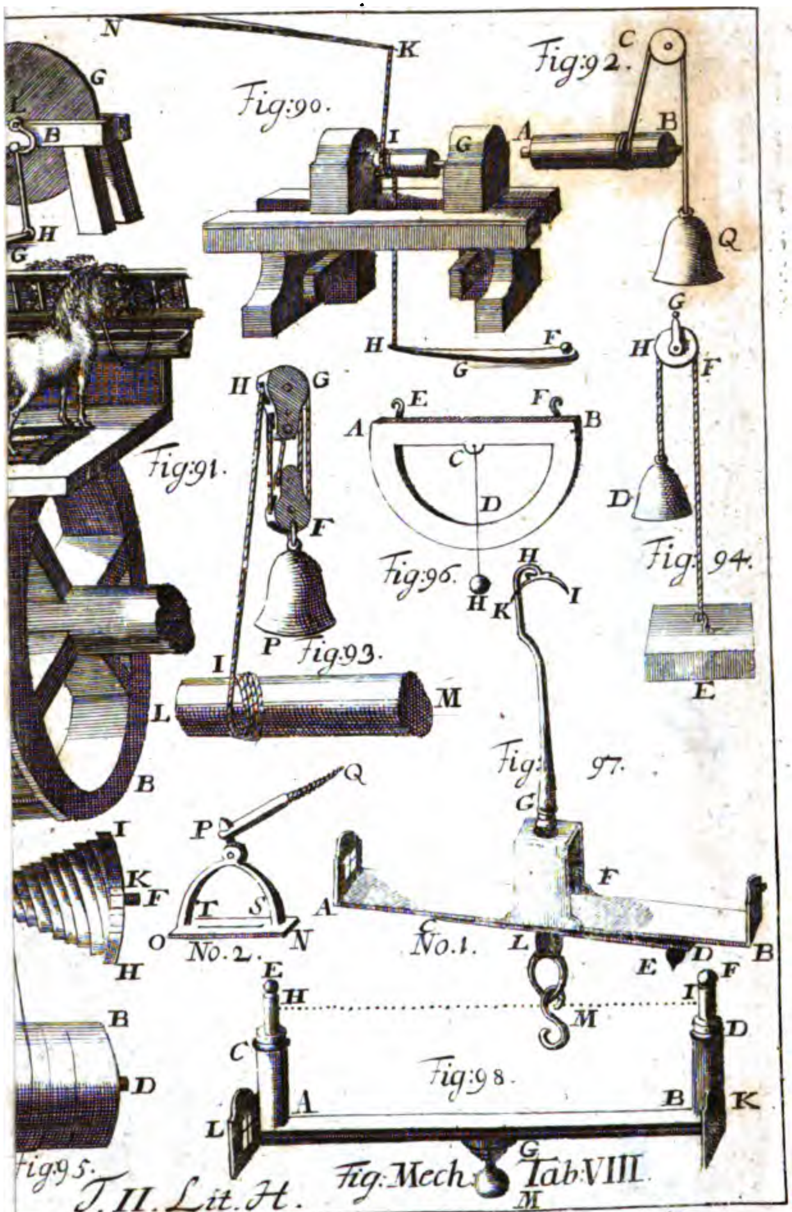
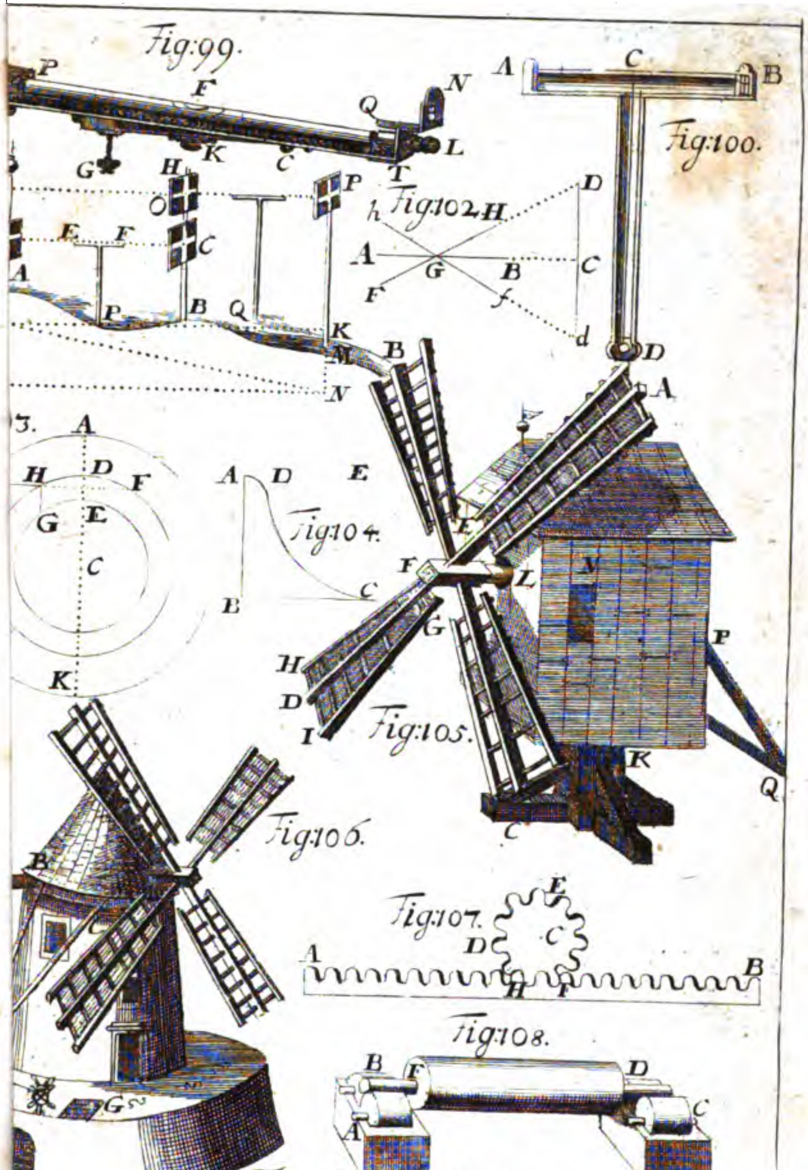
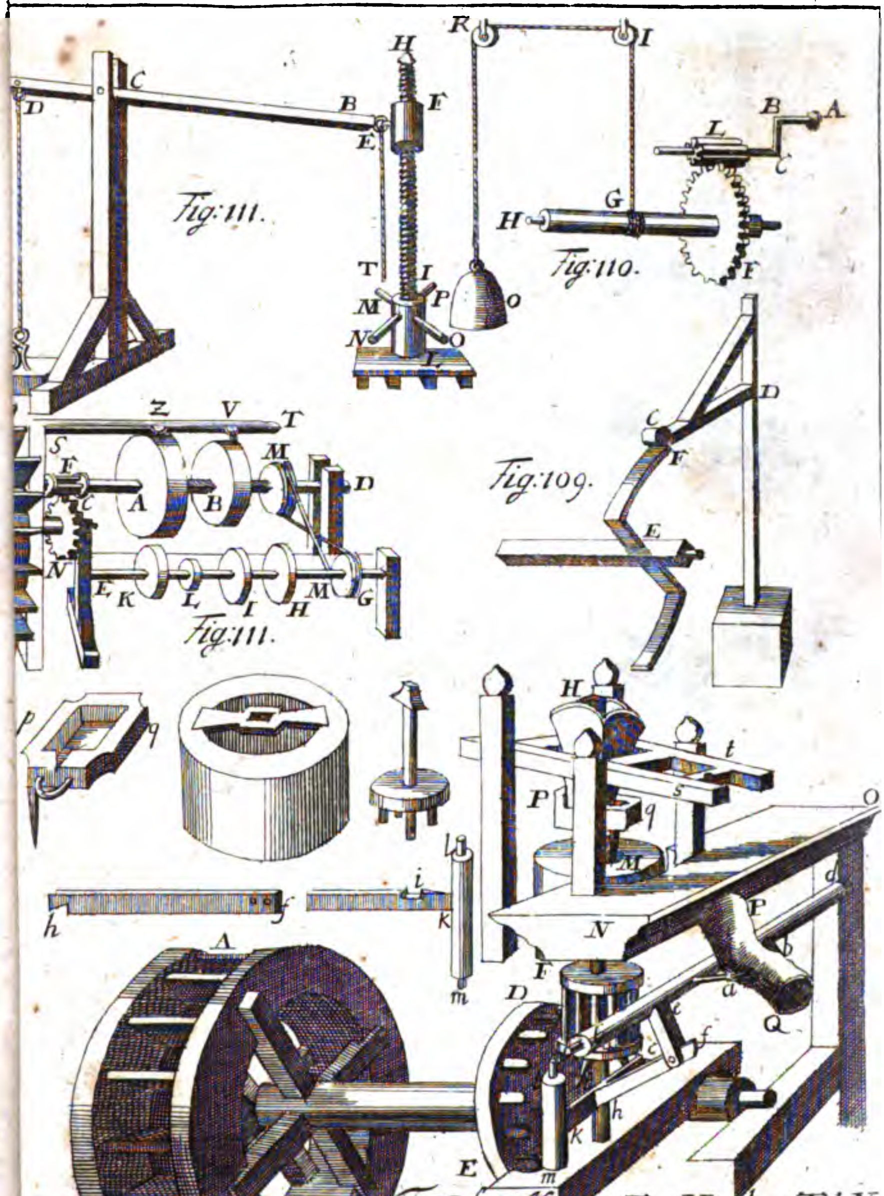


Fig: Mechan: Tab: VII.

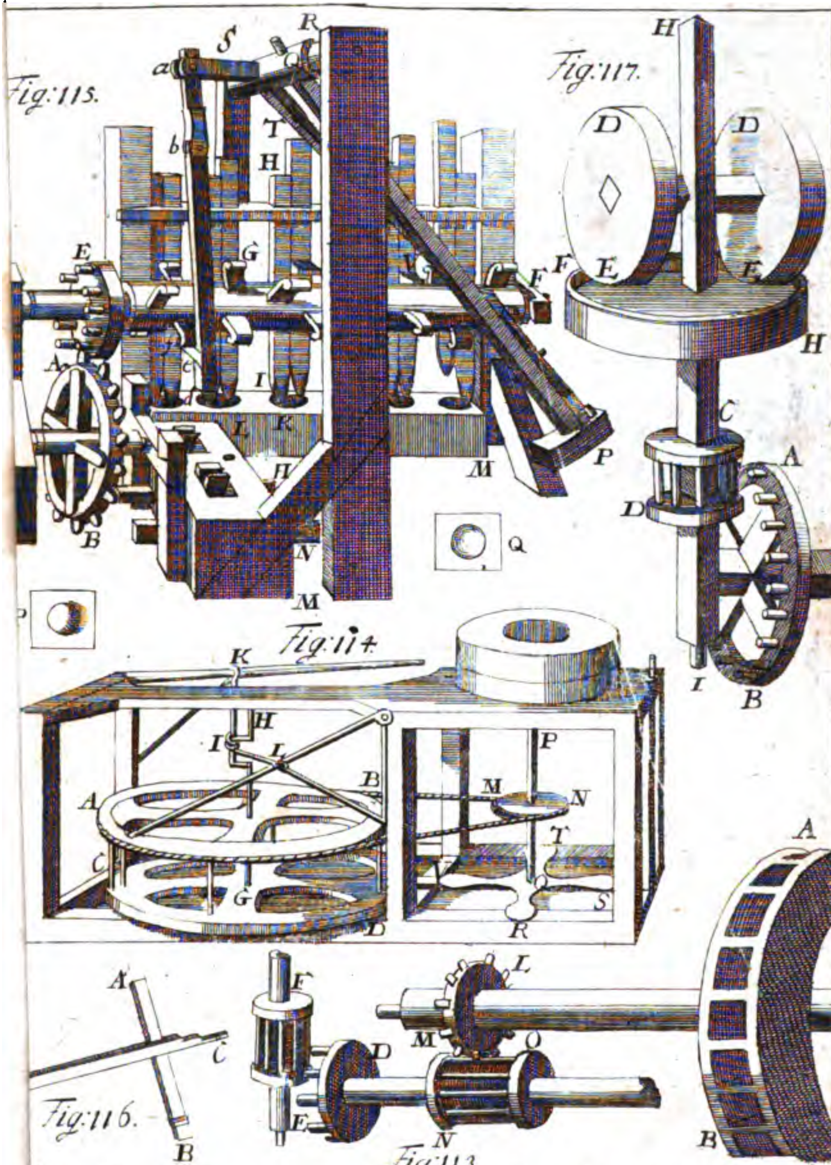

Fig:90.
Fig:91.
Fig:92.
fig.93.
Fig: 94.
fig:95.
fig:96.
Fig: 97.
No.1.
No.2.
Fig:98.
T. II. Lit. H.
Fig: Mech. Tab: VIII.



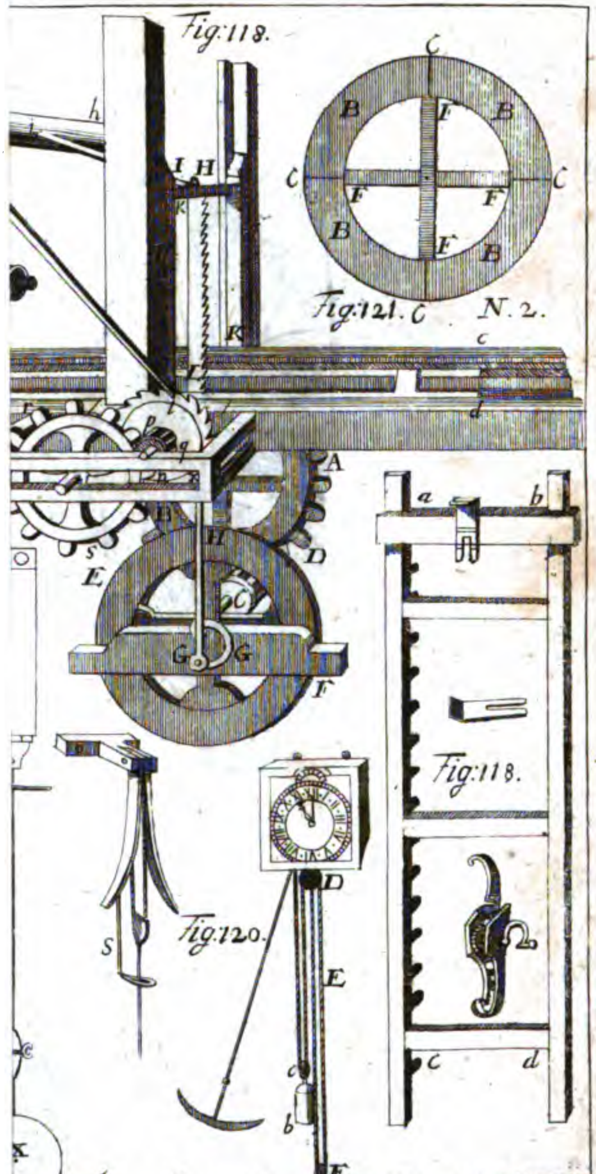
T.II. Lit. I. Fig: Mechan Tab: IX.



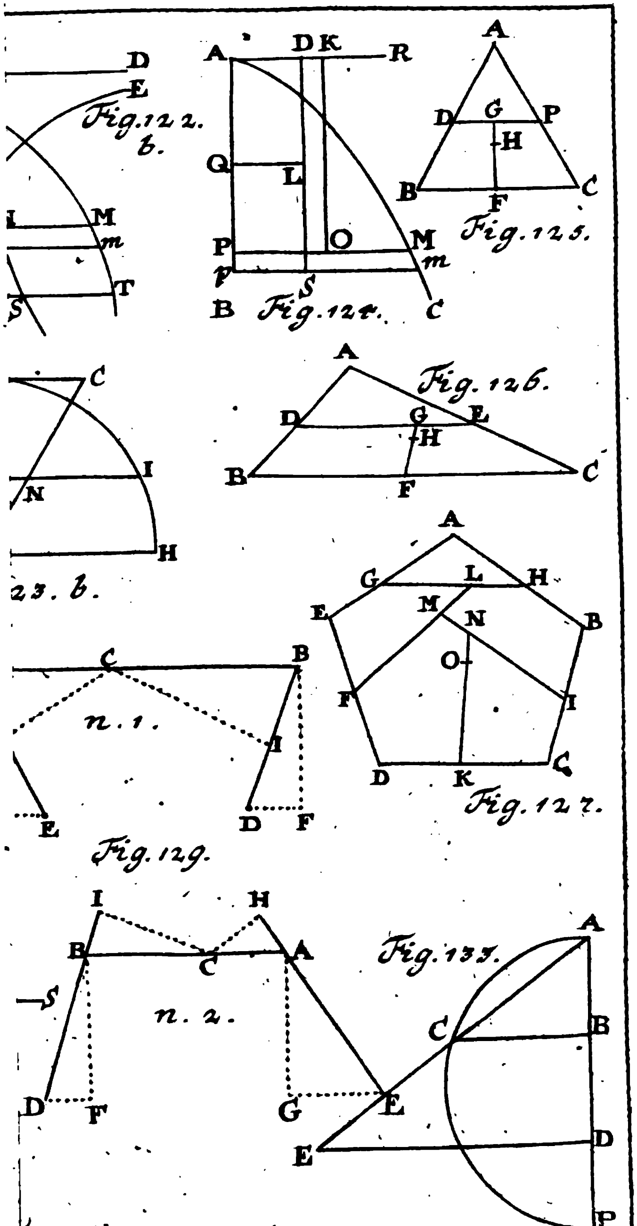
T. II. Lit. K. Fig: Mechan: Tab: X.



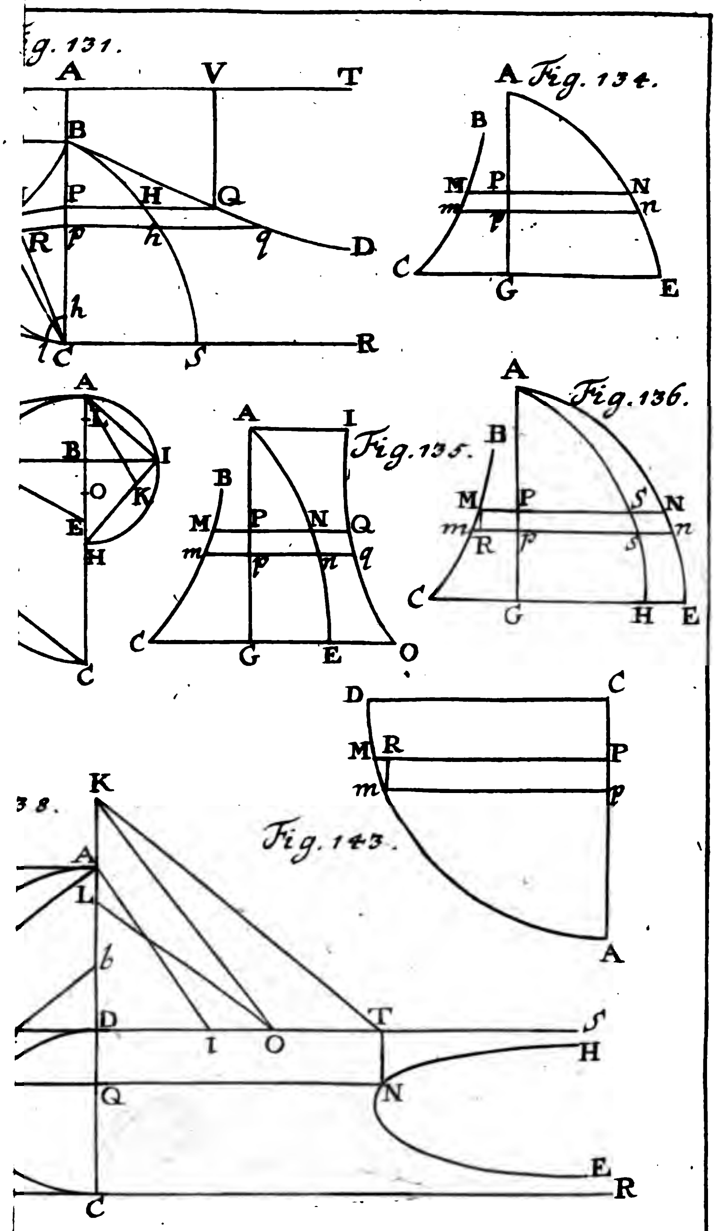
II. Lit. L. Fig: Mechan: Tab: XI



T. II. Lit. M. Fig: Mech: Tab: XII



g. Mechan. Tab. XIII. lit. N.



n. Tab. XIV. a. lit. O.

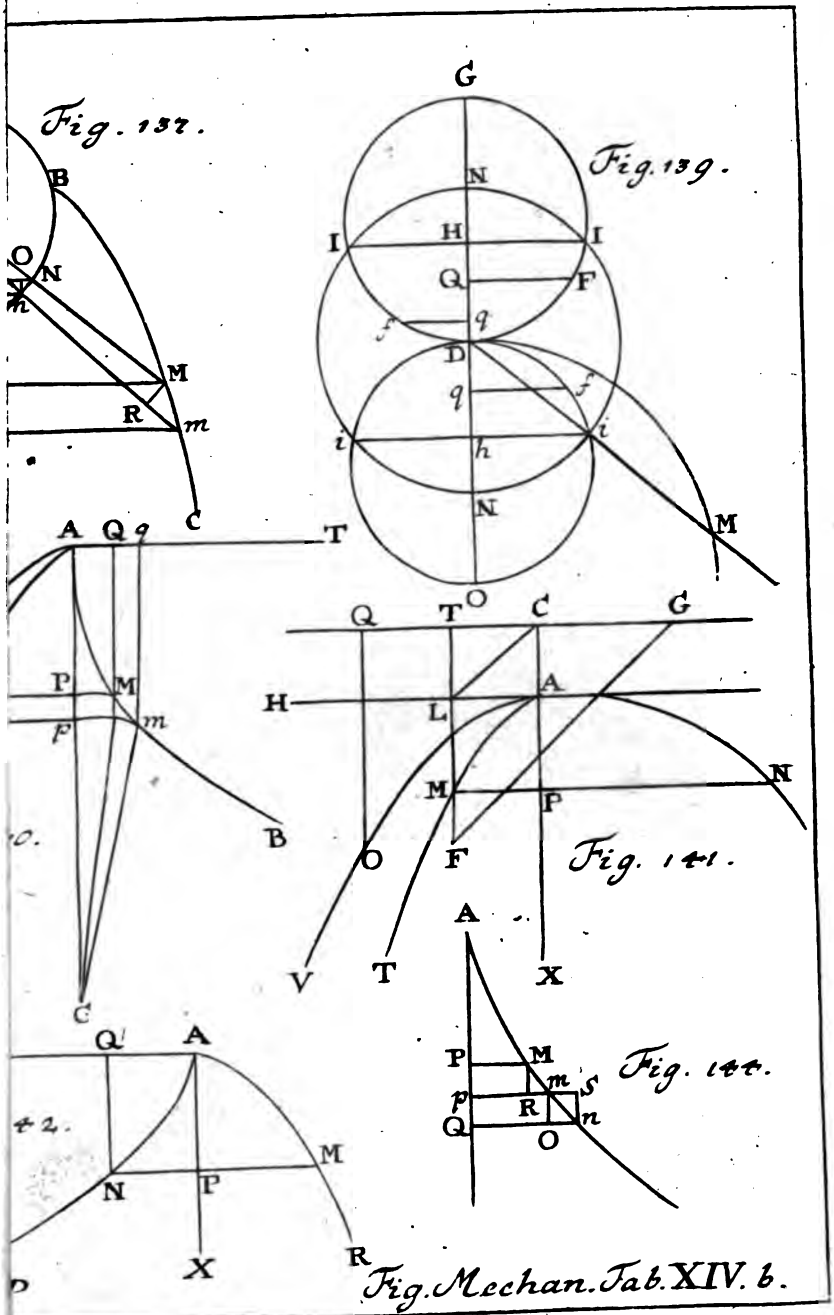


Fig. Mechan. Tab. XIV. b.

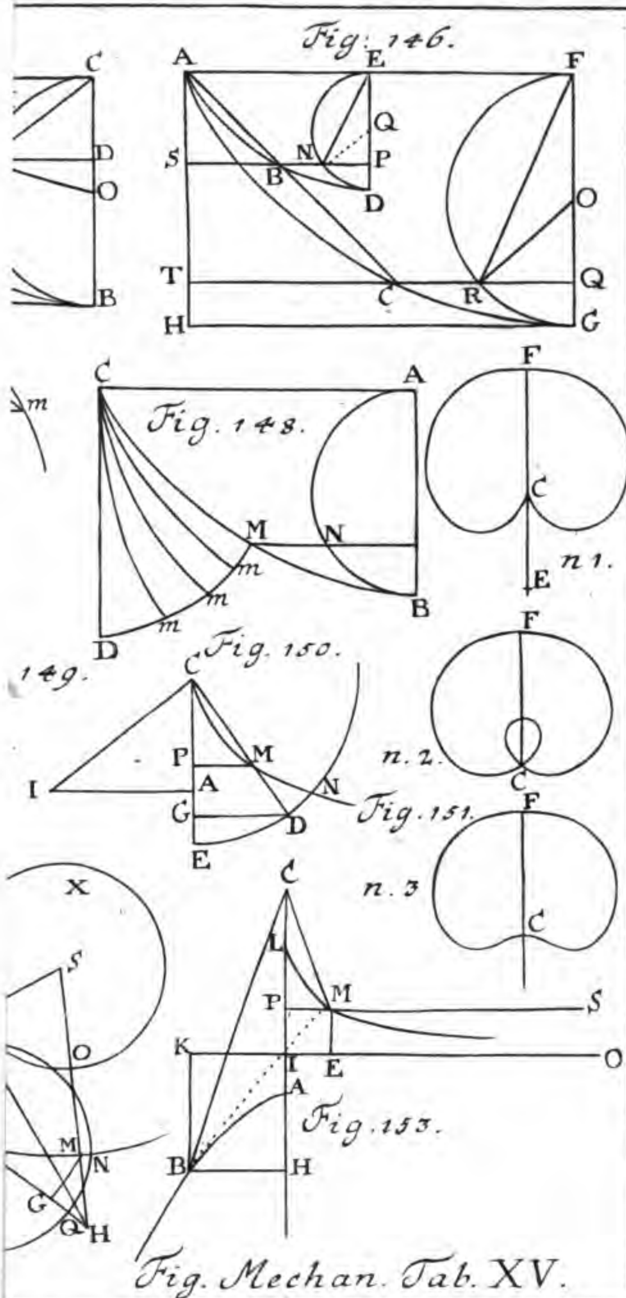
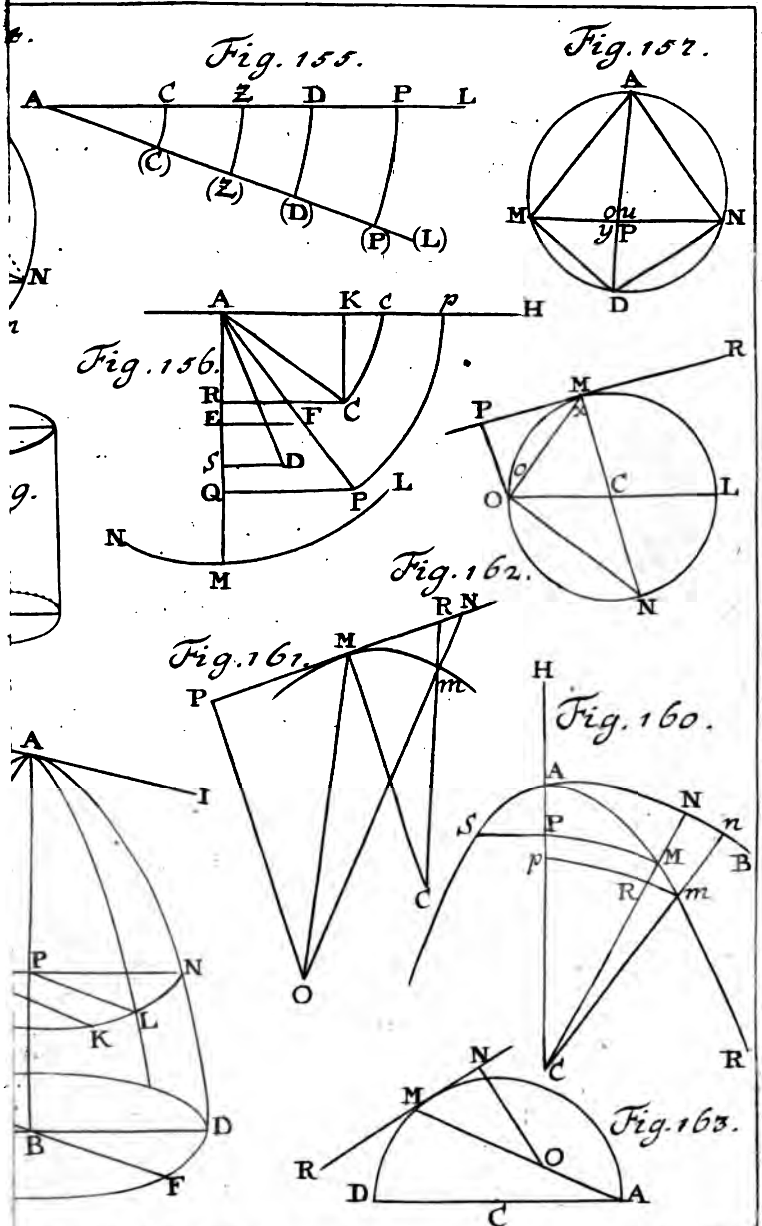
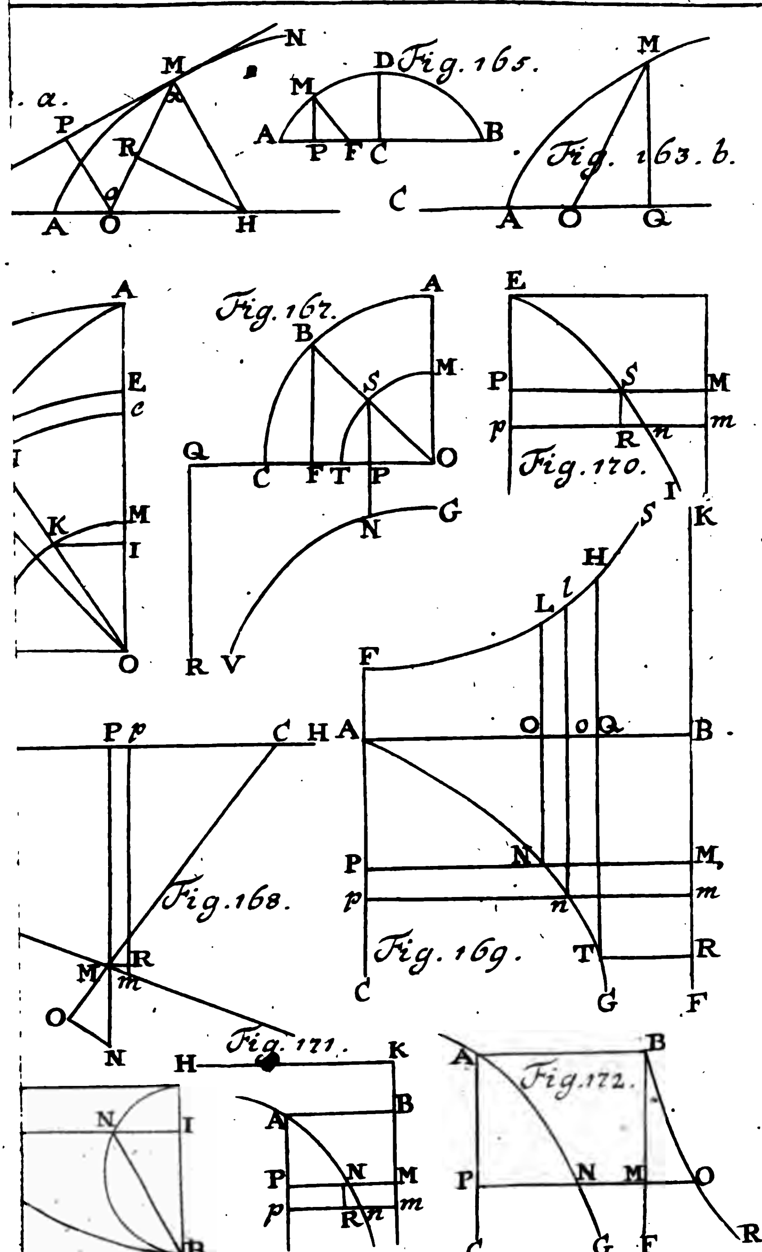


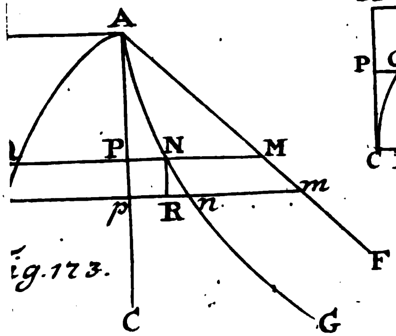
Fig. Mechan. Tab. XV.



an. Tab. XVI. lit. R.



...an. Tab. XVII. lit. S.



ig.173.

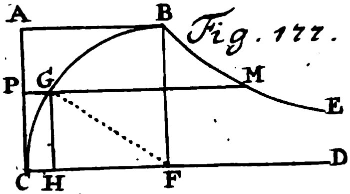


Fig. 177.

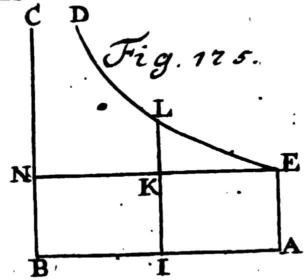
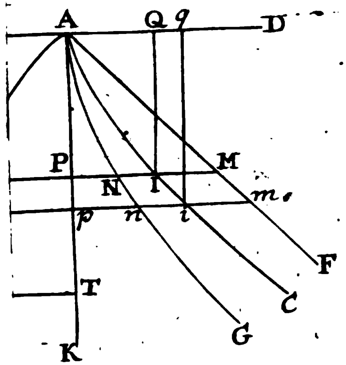
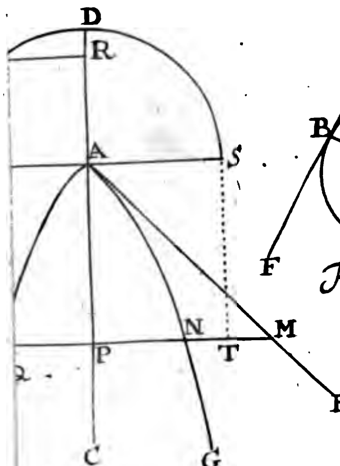


Fig. 175.





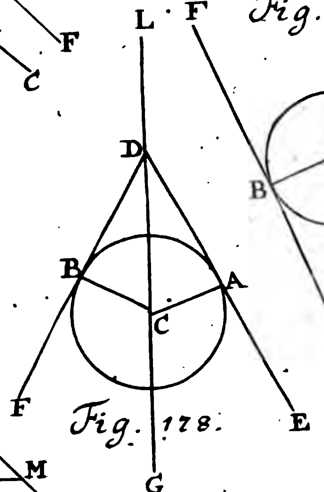


Fig. 178.

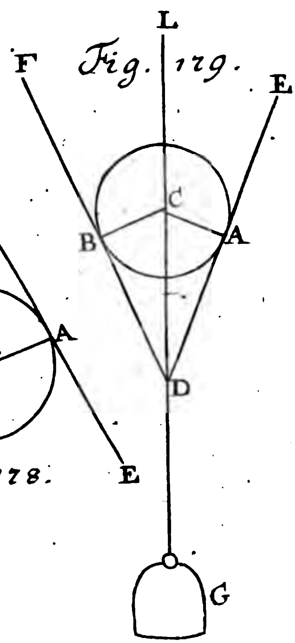


Fig. 179.

an. Tab. XVIII.

lit. T

ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

PRÆFATIO.

Non dubito fore multos, quibus leges hydroſtaticæ paradoxæ videbuntur. Cum enim gravitatem ſibi imaginentur tanquam vim in materia perſiſtentem, quæ mutari nequeat, corpore immutato; fluida vero, quamdiu intra eosdem terminos concluſa quieſcunt, omnis actionis in corpora alia prorſus expertia judicent; rationem ſane non capiunt cur partem gravitatis corpori demerſo veluti adimant, vel etiam totum ingenti ſæpius impetu ſurſum propellant. Enimvero quemadmodum leges hydroſtaticæ admodum evidenter demonſtrantur; ita non minus experientia ſingulæ confirmantur. Hinc diſcant velim, qui in rebus naturalibus cognoſcendis ſenſui ac imaginationi nimium tribuunt, res naturales alias plane eſſe in intellectu, quam in ſenſu: cujus veritatis plenior convictio ab Optica ſperanda. Quodſi hunc ſolum ſui uſum hydroſtatica præberet, digna profecto

foret,

foret, quā meditarentur interiora Naturæ contemplaturi; verum enim vero ipſa quoque clavem continet, qua multa abdita reſerantur. Non exiguus eſt phænomenorum numerus, quorum ratio in Hydroſtatica continetur, & quæ nec ſine ea intelligi, nedum comprehendi poſſunt. Hydroſtaticæ uſum in examinanda bonitate metallorum, mineralium, aliorumque corporum ſolidorum, inprimis autem fluidorum, in *Medicina hydroſtatica* oſtendit celeberrimus *Boylius*. Varios eosque præclaros in vita humana uſus in ipſa pertractatione paſſim indicavi. Sine ea nec Aerometria intelligi, nec Hydraulica exacte tradi poteſt. Sat ergo rationis apparet, cur Hydroſtaticæ elementa inter elementa Matheſeos præcipium quendam locum ſibi vendicent, & cur digna ſint, quæ ulterius excolantur & ad varios in vita humana uſus applicentur. Agite itaque, quotquot natura melioris ingenii ac animi dotibus ditavit, quam ut de pane lucrando ſolum cogitent, evolvite hæc Hydroſtaticæ elementa, legite, relegite, meditamini, ut genuinam Phyſicæ pertractandæ ideam animo comprehendatis.

ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

CAPUT I.

DE CORPORUM SPECIFICA GRAVITATE ET LEVITATE.

DEFINITIO I.

1\. *Hydroſtatica* eſt ſcientia gravitationis in fluido.

SCHOLION.

2\. *Docetur nempe in Hydroſtatica non modo ratio gravitatis fluidorum, ſed & inprimis actio eorum in ſolida demerſa.*

DEFINITIO 2.

3\. *Corpus fluidum* eſt, cujus maſſulæ quantælibet, ſunt inconnexæ, mutua cohæſione a cauſa quacunque impedita.

DEFINITIO 3.

4\. *Corpus ſolidum* eſt, cujus maſſulæ quantælibet ſunt connexæ.

DEFINITIO 4.

5\. *Corpus ſpecifice levius* eſt, quod ſub eodem volumine minus pondus continet, quam alterum.

DEFINITIO 5.

6\. *Corpus ſpecifice gravius* eſt, quod ſub eodem volumine majus pondus continet, quam alterum.

SCHOLION.

7\. *Sint duo globi æquales, quorum ſcilicet diameter unius pedis, alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus gravior ligneo; dicetur ſpecifice gravior, ligneus autem ſpecifice levior.*

DEFINITIO 6.

8\. *Corpus denſius* eſt quod plus maſſæ ſub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

9\. Cum maſſa ſit gravitati proportionalis (§. 112. *Mechan.*); corpus ſpecifice gravius denſius eſt ſpecifice leviori, & corpus denſius ſpecifice gravius eſt rariori (§. 5. 6).

DEFINITIO 7.

10\. *Corpus rarius* eſt, quod minus maſſæ ſub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

11\. Quare cum maſſa ſit gravitati pro-

proportionalis (§. 112. *Mechan.*), corpus rarius eſt ſpecifice levius denſiori & ſpecifice levius rarius ſpecifice graviori (§. 5. 6).

AXIOMA I.

12. *Corpora ejusdem denſitatis ſub eodem volumine æqualem maſſam continent.*

COROLLARIUM.

13. Quare ſi volumina eorundem æqualia fuerint, ejusdem quoque ponderis erunt ſeu gravitatem eandem habebunt (§. 112. *Mechan.*).

AXIOMA 2.

14. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, denſitates ſunt ut maſſæ.*

SCHOLION.

15. *Nempe vi defin.* (§. 8) *corpus dicendum eſt duplo denſius, ſi duplum maſſa ſub eodem volumine continet; triplo denſius, ſi triplum, & ita porro.*

COROLLARIUM.

16. Sunt igitur denſitates corporum æqualium ut pondera ſeu ut gravitates (§. 112. *Mechan.*).

THEOREMA 1.

17. *Si duo corpora eandem denſitatem habuerint, maſſæ ſunt ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sub eodem enim volumine æqualem maſſam continent (§. 12), adeoque in volumine duplo continetur maſſa dupla, in triplo tripla, in quadruplo quadrupla & ita porro. Sunt igitur maſſæ ut volumina. Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

18. Quoniam etiam gravitates ſunt ut maſſæ (§. 112. *Mechan.*); corporum ejusdem denſitatis gravitates ſunt in ratione voluminum (§. 167. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

19. Ergo corpora ejusdem denſitatis ſunt etiam ejusdem gravitatis ſpecificæ & contra (§. 6).

COROLLARIUM 3.

20. Quare corpora diverſæ denſitatis ſunt diverſæ gravitatis ſpecificæ & contra.

THEOREMA 2.

21. *Maſſæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita denſitatum atque voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint trium corporum maſſæ a, b, c, volumina primi & ſecundi d, tertii e, denſitas primi f, ſecundi & tertii g: ſint nempe primum & ſecundum ejusdem voluminis, ſecundum & tertium ejusdem denſitatis. Quoniam

$a:b$

$a : b = f : g$ (§. 14)
$b : c = d : e$ (§. 17)

erit $ab : bc = fd : ge$ (§. 213. *Arithm.*) conſequenter $a : c = fd : ge$ (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

22. Quoniam gravitates ſunt ut maſſæ (§. 112. *Mechan.*); eædem etiam ſunt in ratione compoſita denſitatum & voluminum (§. 167. *Arithm.*).

THEOREMA 3.

23. *Si duorum corporum maſſæ vel gravitates fuerint æquales; denſitates ſunt reciproce ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim omnia ut in theorematis præcedentis demonſtratione, erit $a : c = fd : ge$ (§. 21). Jam $a = c$ *per hypoth.* adeoque $fd = ge$. Eſt igitur $f : g = e : d$ (§. 299. *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Quoniam gravitates ſunt ut maſſæ (§. 112. *Mechan.*). Si maſſæ æquales ſunt, etiam gravitates æquales ſunt. Sed ſi maſſæ æquales ſunt, denſitates ſunt reciproce ut volumina *per demonſtrata.* Ergo etiam, ſi gravitates æquales ſunt, denſitates reciproce ſunt ut volumina. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

24. *Duorum corporum quorumcunque denſitates ſunt in ratione compoſita ex directa maſſarum & voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonſtratione theorematis ſecundi. erit

$$a : c = fd : ge \text{ (§. 21).}$$

Ergo $age = cfd$ (§. 297. *Arithm.*)

conſequenter $f : g = ae : cd$ (§. 299. *Arithm.* *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

25. Quoniam gravitates corporum ſunt ut maſſæ eorundem (§. 112. *Mechan.*); denſitates corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum & reciproca voluminum (§. 15. *Arithm.*)

AXIOMA 3.

26. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, gravitates ſpecificæ ſunt ut gravitates abſolutæ.*

SCHOLION.

27. *Corpus enim duplo gravius ſpecifice dicitur altero, ſi duplam gravitatem ſub eodem volumine continet; triplo dicitur gravius, ſi triplam &c.* (§. 6).

COROLLARIUM.

28. Quoniam corporum gravitates

abſolutæ ſunt ut maſsæ (§.112. *Mech.*); corporum æqualium gravitates ſpecificæ ſunt ut maſsæ (167. *Arithm.*).

THEOREMA 5.

29. *Corporum ejusdem ponderis gravitates ſpecificæ ſunt in ratione voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sit gravitas communis $= g$, volumen corporis A $= a$, volumen alterius B $= b$. Quoniam B ſupponitur eſſe homogeneum; gravitates voluminibus proportionales ſunt (§. 130. *Mechan.*) adeoque gravitas ipſius B ſub volumine a, reperitur $ag:b$ (§.301. *Arith.*). Sunt igitur gravitates ſpecificæ corporum A & B ut g ad $ag:b$ (§. 26), hoc eſt, ut bg ad ag (§.181. *Arithm.*) conſequenter ut b ad a (§. 178. *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

30. Quodſi ergo volumina fuerint æqualia, etiam gravitates ſpecificæ æquales erunt, hoc eſt, corpora ejusdem ponderis & voluminis eandem gravitatem ſpecificam habent.

THEOREMA 6.

31. *Gravitates abſolutæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita voluminum & gravitatum ſpecificarum (hoc eſt, gravitatum ſub eodem volumine).*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum ejusdem voluminis c gravitates abſolutæ a & b, ſpecificæ f & g; corporum ejusdem ponderis a volumina c & d, gravitates ſpecificæ f & e. Erit

$$a:b = f:g \text{ (§.26)}$$
$$f:e = d:c \text{ (§.29).}$$

Ergo $af:be = fd:gc$ (§.213. *Arith.*)
Unde $a:b = d:\frac{gc}{e}$ (§.185. *Arithm.*)
& $a:b = ed:gc$ (§.178. *Arithm.*)
Q.e.d.

THEOREMA 7.

32. *Gravitates ſpecificæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum abſolutarum & reciproca voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonſtratione theorematis præcedentis; erit

$$a:b = ed:gc \text{ (§.31).}$$

Ergo $\frac{a}{d}:\frac{b}{c} = e:g$ (§.185. *Arithm.*)
conſequenter $ac:bd = e:g$ (§.181. *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROL-

COROLLARIUM.

33. Quoniam denſitates ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum abſolutarum & reciproca voluminum (§. 25); erunt etiam gravitates ſpecificæ ſunt ut denſitates (§. 167. *Arithm.*).

CAPUT II.

DE

ÆQUILIBRIO ET PRESSIONE FLUIDORUM.

THEOREMA 8.

34. *Si in tubis communicantibus fluidi homogenei eadem altitudo fuerit, fluidum in tubo uno æquiponderat fluido in altero.*

DEMONSTRATIO.

g. 4. I. Si tuborum AB & DC diametri æquales fuerint; columnæ fluidi BE & FD eandem baſin & altitudinem habent, adeoque æquales ſunt (§. 535. *Geom.*). Quare cum etiam gravitates æquales ſint (§. 131. *Mechan.*) fluidum in BE eadem vi premit fluidum in BD, qua idem urgetur a fluido in DF. Fluida ergo in utroque tubo quieſcunt & neutrum alterum movet (§. 75. *Mechan.*). *Quod erat unum.*

g. a. II. Quodſi baſis tubi GI fuerit quadrupla baſis alterius HK & aqua deſcenderet ex L usque ad O, e. gr. per intervallum unius digiti; in tubo altero NK aſcenderet ex M in N per altitudinem 4 digitorum (§. 580. *Geom.*). Quare celeritas, qua moveretur fluidum in tubo HK eſt ad celeritatem, qua idem moveretur in GI, ut baſis tubi GI ad baſin alterius HK (§. 33. *Mechan.*). Sed quia eadem fluidi in utroque tubo altitudo ipſumque fluidum homogeneum *per hypoth.* maſſa fluidi in tubo GI eſt ad maſſam fluidi in altero HK ut baſis tubi GI ad baſin alterius HK (§. 573. *Geom.*). Eſt ergo vis fluidi in tubo LI ad vim fluidi in tubo HK ut factum ex baſi tubi GI in baſin alterius HK ad factum ex baſi tubi HK in baſin alterius GI (§. 278. *Mech.*). Quare cum hæc facta æqualia ſint (§. 207. *Arithm.*) vires etiam æquales ſunt, adeoque neutrum fluidorum alterum movet (§.

75. *Mechan.*). *Quod erat ſecundum.*

Fig. 3. III. Si tubus unus SR fuerit ad alterum QR inclinatus, utriusque vero diameter eadem, & QR ad horizontem perpendicularis; gravitas abſoluta fluidi in tubo inclinato SR eſt ad gravitatem reſpectivam ejusdem, quam nititur juxta directionem plani TR, ut longitudo plani TR ad altitudinem ejus TZ (§. 261. *Mechan.*). Non alia igitur vi urget fluidum in tubo QR, quam quantitas contenta in tubo perpendiculari TZ eandem baſin & altitudinem habente cum inclinato TR, conſequenter fluido in tubo QR æquiponderat, *per caſ.* 1. *Quod erat tertium.*

Fig. 4. IV. Eodem modo oſtenditur fluida æquiponderare in tubis inclinatis AB & CD inæqualium diametrorum, ſi ad eandem altitudinem conſtituantur. *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM.

35. In tubis communicantibus fluidum homogeneum præponderat, cujus major eſt altitudo.

THEOREMA 9.

36. *In tubis communicantibus quibuscunque fluida diverſæ gravitatis ſpecificæ æquiponderant, ſi altitudines habuerint rationem gravitatum ſpecificarum reciprocam.*

DEMONSTRATIO.

E. gr. Sint tuborum AB & DC diametri æquales & in tubo AB aqua, in tubo DC argentum vivum. Et quia gravitas ſpecifica aquæ eſt ad gravitatem ſpecificam argenti vivi ut 1 ad 14; ſit reciproce altitudo aquæ in tubo AB 14 digitorum, altitudo vero Mercurii in tubo DC digiti unius. Fig. 1.

Quoniam baſes cylindrorum aquei & mercurialis æquales ſunt *per hypoth.* altitudinum rationem habent (§. 573. *Geom.*), conſequenter cum tam aqua, quam mercurius ſit fluidum homogeneum, licet inter ſe heterogenea, gravitates abſolutæ eorundem erunt in ratione compoſita ex directa tam gravitatum ſpecificarum 1 : 4, quam altitudinum EB & DH 4 : 1 (§. 31), hoc eſt æquales ſunt (§. 159. *Arithm.*). Pro mercuriali itaque cylindro ſubſtituere licet aqueum, cujus altitudo eſt altitudinis ipſius quadrupla (§. 15. *Arithm.*). Sed hic alteri aqueo in BA æquiponderat (§. 34). Ergo etiam mercurialis eidem æquiponderat.

Idem non abſimili modo oſtenditur,

ditur, ſi tuborum diametri fuerint inæquales & tubi quomodocunque inclinati.

COROLLARIUM I.

37. Inveniri adeo poteſt fluidorum duorum quorumcunque gravitas ſpecifica, ſi in tuborum communicantium unum AB infundatur fluidum unum, in alterum vero CD alterum & altitudines EB & FD, ad quas ſubſiſtunt æquilibrata, ex eadem menſura accurate æſtimentur. Eſt enim gravitas fluidi in AB ad gravitatem in DC ut DH ad BG (§. 36).

SCHOLION.

38. *Quodſi fluida facile commiſceantur, tubum horizontalem BD Mercurio replere debemus, commixtionem impedituri. Etſi autem fluida non facile commiſceri ſoleant, ſpecifice tamen gravius primo loco infundendum, ne concepto impetu ruat in alterum & fluida turbentur.*

COROLLARIUM 2.

39. Quoniam denſitates fluidorum ſunt ut gravitates ſpecificæ (§. 33); eædem erunt reciproce ut altitudines fluidorum DH & BG in tubis communicantibus æquilibratorum.

COROLLARIUM 3.

40. Eadem ergo methodo, quam in Cor. 1. (§. 37) expoſuimus, ratio denſitatum fluidorum determinatur.

THEOREMA 10.

41. *In vaſis perpendicularibus* ABCD & EGFH *æquales baſes* BD & GH *habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione altitudinum* AB & EG. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Quoniam vaſa ſunt perpendicularia, hoc eſt, baſes eorundem in plano horizontali collocatæ, *per hypoth.* fluida adverſus fundos nituntur ſecundum lineas perpendiculares (215. *Mechan.*), adeoque tota gravitate ſua, cum nihil reſiſtat. Premuntur adeo fundi in ratione gravitatum. Sed gravitates ſunt ut volumina (§. 130. *Mechan.*), volumina ſunt ut altitudines (§. 573. *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione altitudinum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

42. Quodſi ergo etiam altitudines æquales ſunt, fundi æqualiter premuntur.

COROLLARIUM 2.

43. In vaſe igitur perpendiculari æquales partes fundi a fluido homogeneo ad libellam conſiſtente æquali vi premuntur. Altitudines enim fluidi æquales ſunt ſuper parte qualibet fundi (§. 36).

COROLLARIUM 3.

44. In uno eodemque vaſe fluidum ad diverſas altitudines ſucceſſive conſti-

tutum fundum premit in ratione altitudinum, ad quas conſiſtit.

COROLLARIUM 4.

45. Decreſcente adeo altitudine, decreſcit preſſio, ſuntque hujus decrementa in ratione decrementorum altitudinis.

THEOREMA 11.

Fig. 6. 46. *In vaſis perpendicularibus* ABDC *&* EGHF, *baſes* BD *&* GH *utcunque inæquales habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione compoſita baſium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Ex demonſtratione theorematis præcedentis (§. 41) patet, fundos premi in ratione gravitatum. Gravitates vero fluidorum ſunt ut volumina (§. 130. *Mechan.*), volumina ſunt in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 572. *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

Fig. 7. 47. *Si vas inclinatum* ABCD *eandem altitudinem & baſin habuerit cum perpendiculari* BEFG, *fundus utriusque æqualiter premitur.*

DEMONSTRATIO.

In vaſe inclinato ABCD fundus CD premitur ſecundum directionem BD. Eſt autem vis gravitatis ſecundum BD ad gravitatem abſolutam ut BE ad BD (§. 261. *Mechan.*). Ergo fundus CD eodem modo premitur, ac ſi a fluido ad altitudinem BE conſiſtente perpendiculariter premeretur. Fundus igitur vaſis perpendicularis BEFG & inclinati ABDC æqualiter premuntur (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA 13.

48. *Si baſes vaſis* ABDC *inæquales fuerint, fundus eodem modo premitur, ac ſi inferior ſuperiori æquales exiſteret.* Fig.

DEMONSTRATIO.

I. Sit baſis inferior CD minor ſuperiore AB. Quoniam fluidum fundum CD, quem in plano horizontali ſupponimus, ſecundum lineas perpendiculares EC premit (§. 215. *Mechan.*), nonniſi fluidum intra cylindrum ECDF comprehenſum adverſus eum nititur, reliqua maſſa contra latera vaſis nitente. Eodem ergo modo premitur, ac ſi baſis ſuperior inferiori æqualis eſſet. *Quod erat unum.*

II. Sit vaſis inferior baſis CD Fig. 9.
mul-

multo major ſuperiore FG. Nempe ut demonſtratio facilior evadat, cylindro ABDC infixus intelligatur tubus FE. Quodſi ponamus fundum CD attolli in L, ut fluidum moveatur per intervallum CL: in tubo FE per altitudinem EM aſcendet, quæ eſt ad CL ut baſis CD ad baſin GF (§. 580. *Geom.*). Eſt vero celeritas fluidi in tubo FE ad celeritatem in vaſe AD ut EM ad CL (§. 33. *Mechan*), conſequenter ut baſis CD ad baſin FG (§. 167. *Arith.*) Vis ergo, qua aqua in tubo deorſum nititur, prodit ſi baſis cylindri CD ducatur in altitudinem FK (§. 280 *Mech.*) Summando ſcilicet vires elementares æquales ad altitudinem FK applicatas (§. 95. *Analyſ. in fin.*). conſequenter fundus CD eadem vi premitur, qua a cylindro HCDI premeretur (§. 541. *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

50. Vaſorum igitur fundi æquales eadem vi premuntur a fluido ad eandem altitudinem conſiſtente, quæcunque ſit figura vaſis.

SCHOLION 1.

51. *Hinc ratio apparet, cur tanta vi fundus ſuperior dolii* AD *attollatur ab aqua in tubo* CD *plurium pedum contenta. Ipſemet experimentum aliquoties iteravi in vaſe ligneo* AB *intus pice probe obducto & tubo* CD *ex lamina ferrea ſtanno obducta parato altitudinis* 14 *fere pedum, nec* 800 *libra baſi ſuperiori impoſita impedire potuerunt, quo minus attolleretur.* Fig. 10.

SCHOLION 2.

52. *Ab hoc principio derivavi ſi*phonem *meum* anatomicum, *ab aliquot jam annis cum amicis communicatum. Fieri ſcilicet curavi ex lamina ferrea ſtanno obducta vas cylindricum* DGEF *& eidem afferruminari juſſi tubum* FIH. *Quodſi jam veſica, aut ventriculus, aut pellis animantium brutorum, aut alia quæcunque partes membranaceæ corporis animalis inverſa baſi ſuperiori ſuperinducantur, eas non modo ingenti vi in hemiſphæricam figuram expandit, ſed & poros ſubintrans omnes membranas & vaſa ita dividit, ut, levi inciſura facta, ſolis digitis multo accuratius ſeparentur, quam cultro anatomico. Jucundum ſane eſt ſpectaculum, dum non modo ſubſtantia membranacea mire intumeſcit, ſed & vaſorum per eam diſperſorum ramificationes & inſertiones minimas diſtincte ſpectare tunicasque, quæ vulgo pro una habentur, in plures diſcerpere licet. Probe autem notandum eſt, quod ſi interior veſica aut reliquarum partium corporis animalis ſuper vaſe* DG *expanſarum ſuperficies aquam lambat, aqua per ſubſtantiam earum penetrare nequeat. Cæterum ſi veſica ingens pondus imponas, ab aqua in tubo* HI *vix duarum librarum attollitur.* Fig. 11.

SCHOLION 3.

53. *Veritatem hujus doctrinæ de preſſione fluidorum in ratione baſis ac altitudinis exploraturus vas metallicum* Fig. 9.

ACDB ita conſtrui curet, ut fundus CD ſit mobilis, annulo coriaceo madefacto apprimendus, dum experimentum capitur, & baſi ſuperiori AB ſucceſſive tubi æquealti ſed diverſarum diametrorum applicari poſſint. Quodſi enim funiculi per tubum FE trajecti alterius extremum annulo K baſi mobili afferruminati, alterum vero brachio alicujus libræ alliges & in lance alteri appenſa pondus colloces idque adjectis minoribus tamdiu augeas, donec fundus CD attollatur, non modo hinc diſces, eodem ſemper pondere opus eſſe ad fundum attollendum, quæcunque ſit tubi FE amplitudo, modo aqua conſtanter ad eandem altitudinem conſiſtat, ſed & pondus æquale deprehendes gravitati cylindri aquei eandem cum vaſe baſin CD, ſed altitudinem FK habentis.

SCHOLION 4.

54. *Cum iis, quæ de æquilibrio fluidorum demonſtrata ſunt, non conſentire videtur, quod in tubis capillaribus, ſeu fiſtulis gracilioribus utrinque patulis unaque ſua extremitate ſub aquam demerſis, aqua ultra libellam aſſurgat, eo quidem magis, quo minor tubuli diameter. Enimvero facile colligitur, phænomenon hoc alteri cuidam cauſæ adſcribendum eſſe, licet ſine principiis aerometricis definiri nequeat.*

CAPUT III.

DE GRAVITATIONE CORPORUM SPECIFICE GRAVIORUM IN FLUIDIS LEVIORIBUS.

THEOREMA 14.

55. *Corpus ſpecifice gravius in fluido leviori eam ponderis ſui partem amittit, quantum eſt pondus fluidi ſub eodem volumine.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. cubum pollicarem plumbeum F ſub aqua demergi. Expelletur adeo ex eo, quem occupat, loco cubus pollicaris aquæ. Sed pondus hujus aquæ a reſiſtentia ambientis ſuſtentabatur. Ergo a reſiſtentia æquæ ambientis tanta quoque ponderis cubi plumbei pars ſuſtentari debet, quantum eſt pondus aquæ expulſæ. Hac igitur parte gravi-

tas corporis demerſi deprehendetur imminuta. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

56. Cum fluidum ſpecifice gravius ſub eodem volumine majus pondus poſſideat, quam levius (§. 6); idem corpus in fluido ſpecifice graviori majorem ponderis ſui partem amittit, quam in leviori, adeoque in leviori magis ponderat quam in graviori.

SCHOLION.

57. *Ita globus plumbeus minus ponderat in aqua, quam in ſpiritu vini.*

COROLLARIUM 2.

58. Gravium igitur homogeneorum æqualium in aëre æquiponderantium æquilibrium tollitur, ſi unum fluido graviori, alterum leviori immergatur.

COROLLARIUM 3.

59. Cum gravitates ſpecificæ ſint ut abſolutæ ſub eodem volumine (§. 26); & gravitas fluidi ſolido immerſo mole æqualis ſit ad gravitatem ſolidi ut pars ponderis in fluido amiſſa ad pondus ipſius integrum (§. 55); erit gravitas fluidi ſpecifica ad gravitatem ſolidi demerſi ut pars ponderis a ſolido amiſſa ad pondus ejus integrum (§. 167. *Arithm*).

COROLLARIUM 4.

60. Duo ſolida mole æqualia idem pondus in eodem fluido amittunt (§. 55). Sed ſpecifice gravioris pondus majus eſt, quam ſpecifice levioris (§. 6). Ergo majorem ſui ponderis partem amittit ſpecifice levius, quam gravius (§. 205. *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

61. Quia corporum pondere æqualium volumina ſunt reciproce ut gravitates ſpecificæ (§. 29); ſpecifice levius ejusdem cum graviori ponderis in eodem fluido majus pondus amittit, quam gravius (§. 55). Quare ſi in uno fluido æquiponderant, in alio non æquiponderabunt, ſed ſpecifice gravius præponderabit eo magis, quo fluidum denſius.

PROBLEMA 1.

62. *Invenire pondus fluidi cujuscunque, e. gr. vini in dolio contenti.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur volumen fluidi per regulas ſtereometricas.
2. Cubus plumbeus pollicaris ex crine equino ſuſpenſus fluido immergatur & ope bilancis exactæ notetur pondus amiſſum: quod erit pondus fluidi ſub volumine unius digiti cubici (§. 55).
3. Quare cum in fluido homogeneo pondus ſit volumini proportionale (§. 130. *Mechan.*); pondus fluidi quæſitum per regulam trium (§. 302. *Arithm.*) invenietur.

E. gr. Sit capacitas dolii 88 pedum cubicorum, pes cubicus vini 68 librarum: erit gravitas vini in integro dolio 88. 68 : 1 = 5984 librarum.

COROLLARIUM.

63. Eodem ergo modo determinari poteſt pondus unius pedis cubici fluidi cujuscunque & iu uſus futuros annotari.

SCHOLION.

64. *Pondus pedis cubici aquæ investigarunt multi; ſed cum in diverſis fluviis ac fontibus non eadem ſit gravitas ſpecifica aquæ, immo nec omni tempore eadem detur in eodem fluvio: mirum non eſt, obſervationes diverſorum Autorum inter ſe admodum diſcrepare.* Morlandus (a) *experimentis ſæpius iteratis didicit aquæ pedem cubicum juxta menſuram Pariſinam eſſe 70 librarum cum duabus unciis.*

THEOREMA 15.

65. *Gravitates ſpecificæ fluidorum ſunt ut pondera ab eodem ſolido in utroque amiſſa.*

DEMONSRATIO.

Gravitates ſpecificæ ſunt ut abſolutæ ſub eodem volumine (§. 26). Sed pondera ab eodem ſolido in diverſis fluidis amiſſa ſunt gravitates abſolutæ fluidorum ſub eodem volumine (§. 55). Ergo gravitates ſpecificæ fluidorum ſunt ut pondera ab eodem ſolido in iis amiſſa. *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

66. *Invenire gravitatem ſpecificam fluidorum quorumcunque.*

RESOLUTIO.

1. Ex uno brachio libræ ſuſpendatur globus plumbeus & ad alterum appendatur pondus D, quod cum ipſo in aëre æquilibrium ſervet.
2. Globus ſucceſſive immittatur diverſis fluidis, quorum ſpecifica gravitas determinanda, noteturque pondus, quod in ſingulis fluidis demerſo æquiponderat.
3. Singula hæc pondera ſubducantur a pondere D: ita relinquentur partes in quolibet fluido amiſſæ & una ratio gravitatis ſpecificæ fluidorum conſtabit (§. 65).

COROLLARIUM.

67. Cum denſitates ſint ut gravitates ſpecificæ (§. 13); eodem modo invenitur ratio denſitatis fluidorum.

SCHOLION 1.

68. *Maximi uſus eſt hoc problema, per id enim gradus puritatis ac bonitatis fluidorum inveſtigantur: quod ſcire non ſolum in ſcientia naturali excolenda, ſed & in vita civili ac praxi Medica proſicuum exiſtit.*

SCHOLION 2.

69. *Quodſi diverſo tempore gravitatem ſpecificam fluidorum inveſtiges; hieme majorem, quam æſtate deprehendes.* Joan. Caſp. Eiſenſchmidius (b) *experimenta hanc in rem complura exhibet, ex quibus potiora in hanc tabulam referre libet.*

(a) Elevation des Eaux p. 7.

(b) in Diſquiſitione Nova de ponderibus & menſuris p. 174 & 175.

Tabula gravitatis Liquorum in pondere Pariſino.

Pollex cubicus Pariſ.	Æſtate Unc.	Æſtate Groſſ.	Æſtate Gran.	Hieme Unc.	Hieme Groſſ.	Hieme Gran.
Mercurii	7	1	66	7	2	14
Olei vitrioli	-	7	59	-	7	71
Spiritus vitrioli	-	5	33	-	5	38
Spiritus nitri	-	6	24	-	6	44
Spiritus ſalis	-	5	49	-	5	55
Aquæ fortis	-	6	23	-	6	35
Aceti	-	5	15	-	5	21
Aceti deſtillati	-	5	11	-	5	15
Vini Burgundici	-	4	67	-	4	75
Spiritus vini	-	4	32	-	4	42
Cereviſiæ albæ	-	5	1	-	5	9
Cereviſiæ fuſcæ	-	5	2	-	5	7
Lactis bubuli	-	5	20	-	5	25
Lactis caprini	-	5	24	-	5	28
Urinæ	-	5	14	-	5	19
Spiritus urinæ	-	5	45	-	5	53
Olei Tartari	-	7	27	-	7	43
Olei olivarum	-	4	53	hieme congelatur.		
Olei terebinthinæ	-	4	39	-	4	46
Aquæ marinæ	-	6	12	-	6	18
Aquæ fluvialis	-	5	10	-	5	13
Aquæ putealis	-	5	11	-	5	14
Aquæ deſtillatæ	-	5	8	-	5	11

SCHOLION 3.

70. Ut accuratiſſime omnia peragantur, gravitas fili extra fluidum conſtituti ſubtrahenda eſt ponderi ſolidi in aëre, vis vero, qua requiritur, ad filum ſub fluido demergendum, ſi ſpecifice levius, addenda eſt ponderi amiſſo. Quodſi vero filum, ex quo pendet ſolidum, fluido gravius fuerit, integrum pondus fili in aëre ſubtrahendum eſt a pondere ſolidi in aere, & pondus, quod filum amittit, a pondere in fluido amiſſo. Enimvero quoniam filum cum ſolido immerſo idem totum conſtituit, hac cautione opus non eſt, ſi in omnibus fluidis, quorum gravitates ſpecificas inter ſe conferre volueris, eandem fili portionem una cum ſolido immergas. Quia crinis equinus can-

eandem fere cum aqua gravitatem ſpecificam habet; experimenta hydroſtatica in aqua inſtituturi ex eodem ſolida ſuſpendunt.

PROBLEMA 3.

71. *Invenire, utrum partes fluidi inferiores comprimantur a ſuperioribus, nec ne.*

RESOLUTIO.

Exploretur *per probl. 2.* (§. 66), quamnam ponderis ſui partem amittat idem ſolidum in diverſis ejusdem fluidi profunditatibus, ita ut ratio habeatur cautionis modo commendatæ (§. 70). Quodſi enim pondus a ſolido ſolo in diverſis profunditatibus amiſſum idem fuerit, eadem erit gravitas fluidi ſpecifica in partibus inferioribus, quæ in ſuperioribus (§. 55), conſequenter eadem denſitas (§. 33). Quodſi vero in profunditate majore pondus majus amittitur, quam in minore; in priore caſu gravitas ſpecifica (§. 6), conſequenter & denſitas (§. 33), major erit quam in altero. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

72. *Tentavit hoc in aqua* Franciſcus Tertius de Lanis (c). *Accepto autem vaſe duorum pedum altitudinis cum globum vitreum eidem immitteret, qui pondus aquæ 18 granis excedebat, eundem quoque cum æquipondio 18 granorum perfectiſſimum facere æquilibrium expertus eſt. Cum eandem ex crine equino pendulum ad infimam aquæ profunditatem deſcendere permitteret, ponderi ejus dimidium inſuper granum decedere obſervavit: quod tamen decrementum quia in crinem equinum aquæ nunc totum immerſum conjici debet, quippe extra aquam grani ſemiſſi æquiponderantem, aquæ partes inferiores a ſuperioribus nullam pati compreſſionem agnovit. Non inutile foret idem experimentum in profunditatibus majoribus inſtituere.*

PROBLEMA 4.

73. *Determinare rationem, quam habet gravitas ſpecifica fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi quod fluido ſpecifice gravius exiſtit.*

RESOLUTIO.

Ponderetur maſſa quantalibet ſolidi in fluido & notetur accurate pondus in eodem amiſſum, non neglecta cautione (§. 70) commendata: erit enim gravitas ſpecifica fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi in ipſo demerſi, ut pars ponderis a ſolido amiſſa ad pondus ejus integrum (§. 59). *Q. e. d.*

SCHOLION.

74. *Si fluidum ſpecifice gravius ſolido, propoſito ſatisfiet per ea, quæ in capite ſubſequente traduntur.*

THE-

(c) in Magiſterio Naturæ & Artis Tom. 3. lib. 25. c. 1. exper. 7. f. 492.

THEOREMA 16.

75. *Corporum pondere æqualium gravitates ſpecificæ ſunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido amiſſæ.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates ſpecificæ corporum pondere æqualium ſunt reciproce ut volumina (§. 29.). Quare cum partes ponderis in eodem fluido amiſſæ voluminum rationem habeant (§. 18); gravitates corporum ſpecificæ ſunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido ab iis amiſſæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

76. Invenitur adeo ratio, quam habent gravitates ſpecificæ ſolidorum, ſi eorum maſſæ in aëre æquiponderantes in eodem fluido ponderentur & pondera a ſingulis amiſſa notentur.

SCHOLION.

77. *Gravitatem ſpecificam plurimorum corporum ſolidorum inveſtigarunt multi. Inprimis prolixæ ſunt tabulæ, quæ in hanc rem exhibentur in Transactionibus Anglicanis* (d). *Variorum quoque corporum, præſertim metallorum, gravitatem ſpecificam, jam ante dedit* Marinus Ghetaldus (e) *& ex eo* Guilielmus Oughtredus (f): *dederunt poſtea alii. Nobis ſufficerit annotaſſe metallorum & aliorum quorundam corporum gravitatem ſpecificam a* Petito *multa ſolertia inveſtigatam, prout eam exhibuit* Merſennus (g) *& ex ipſo poſtea alii. Nempe ſi fuerit gravitas*

Auri librarum 100

erit ſub eodem volumine gravitas

Mercurii	lib. 71½	Stanni puri	38¼
Plumbi	60½	Magnetis	26
Argenti	54½	Marmoris	21
Cupri	47⅓	Lapidis	14
Æris cyprii	45	Sulphuris	12½
Ferri	42	Ceræ	5
Stanni communis	39	Aquæ	5⅓

PROBLEMA 5.

78. *Data gravitate fluidi, invenire gravitatem ſolidi mole ipſi æqualis.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ac ſolidi (§. 73).
2. Hac data per regulam trium invenietur gravitas ſolidi ſub volumine æquali.

E. gr. Quæritur gravitas plumbi ſub eodem volumine cum aqua 200 librarum. Quia gravitas ſpecifica aquæ ad gravitatem

(d) n. 169. p. 926. & ſeqq. it. n. 199. p. 994. conf. Epitome Transact. Angl. Cl. Lowthorpii vol. 1. cap. 6. p. 610. & ſeqq.

(e) in Archimede promoto.

(f) in Opuſculis Mathematicis p. 61.

(g) in Phænomenis Hydraulicis cor. prop. 47. Cogitatorum Phyſico-Mathem. p. 192.

tem plumbi ut ut $5\frac{1}{3}$ ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc eſt, ut 32 ad 363 (§. 178. *Arithm.*); reperitur gravitas plumbi 363. 200 : 32 = $2268\frac{3}{4}$ librarum.

COROLLARIUM.

79. Eodem modo invenitur data gravitate ſolidi unius gravitas alterius, ſi ratio gravitatis ſpecificæ inveſtigetur (§. 76). E. gr. quæritur gravitas ſtanni cum plumbo 30 librarum ſub eodem volumine. Quia gravitas ſtanni ad gravitatem plumbi ut 39 ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc eſt, ut 78 ad 121 (§. 178. *Arithm.*); reperietur gravitas ſtanni quæſita $19\frac{41}{121}$ librarum.

PROBLEMA 6.

80. *Dato corporis ſolidi volumine, invenire volumen ſolidi alterius pondere æqualis.*

RESOLUTIO.

Cum volumina corporum pondere æqualium ſint reciproce ut gravitates ſpecificæ (§. 29); problema præſens eodem modo reſolvitur, quo præcedens.

E. gr. Quæritur volumen ferri decem pedibus cubicis marmoris æquiponderantis. Quia marmor ad ferrum ut 21 ad 42, hoc eſt, ut 1 ad 2; volumen marmoris erit 20 pedum cubicorum.

PROBLEMA 7.

81. *Dato pondere corporis ex duobus miſcibilibus compoſiti una cum pondere, quod in fluido aliquo amittit, invenire pondera miſcibilium ſigillatim.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur (§. 66), quantum ponderis in dato fluido maſſa quædam determinata utriusque miſcibilis amittat.
2. Hinc per regulam trium porro eruatur, quantum ponderis in eodem amittere debeat utriusque maſſa, ſi pondere æqualis fuerit mixto.
3. Decrementum minus ſubtrahatur e majori, ut conſtet exceſſus, quo pondus a ſpecifice leviori amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.
4. Porro pondus a ſpecifice graviori amiſſum ſubtrahatur a decremento ponderis corporis mixti, ut conſtet exceſſus, quo pondus a mixto amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.
5. Quodſi ad exceſſum primum, exceſſum alterum & pondus mixti quæratur numerus quartus proportionalis; erit is pondus miſcibilis ſpecifice levioris: quod
6. a pondere mixti ſubductum relinquit pondus maſſæ ſpecifice gravioris.

E. gr. Maſſa 120 librarum ex ſtanno & plum-

plumbo commixtis compoſita in aqua 14 libras amittit: quæruntur pondera ſtanni & plumbi ſigillatim. Quoniam experimentando reperitur, ſtannum 37 librarum in aqua amittere pondus 5 librarum, plumbum vero librarum 23 amittere 2; calculum ita inibis:

$$37 - 5 - 120$$
$$\underline{\quad 5 \quad}$$
$$\tfrac{600}{37}\ \text{lib.}$$

$$23 - 2 - 120$$
$$\underline{\quad 2 \quad}$$
$$\tfrac{240}{23}\ \text{lib.}$$

$$\frac{600}{37} - \frac{240}{23} = \frac{13800 - 8880}{851} = \frac{4920}{851}$$

$$14 - \frac{240}{23} = \frac{11914 - 8880}{851} = \frac{3034}{851}$$

4920 — 3034 — 120
41 1 (120
46 [illegible]

30.34 (74 lib. Pondus ſpecif. lev.
4 11 (120 Pondus mixti
4 [illegible]

46 Pondus ſpecifice gravioris.

DEMONSTRATIO.

Sit pondus mixti integrum $= p$, quod in fluido amittit $= a$, pondus amiſſum a ſpecifice graviori ejusdem cum mixto ponderis $= b$, amiſſum a ſpecifice leviori ejusdem itidem cum mixto ponderis $= c$, pondus ſpecifice levioris quod mixtum ingreditur $= x$, erit pondus ſpecifice gravioris quod mixtum ingreditur $= p - x$, pondus a miſcibili x in fluido amiſſum $= cx : p$, amiſſum a miſcibili $p - x = (bp - bx) : p$. Ergo

$$(bp - bx + cx) : p = a$$

$$cx - bx = (a - b)\,p$$

$$x = (a - b)\,p : (c - b).\ \text{Q.e.d.}$$

SCHOLION.

82. *Eodem modo ſolvi poteſt problema ab* Hierone *Rege Syracuſarum olim* Archimedi *propoſitum, quantum ſcilicet argenti corona aurea admiſcuerit doloſus artifex* (h).

PROBLEMA 8.

83. *Determinare bonitatem maſſarum maſſasque adulteratas diſtinguere a genuinis.*

RESOLUTIO.

Præſupponendum hic eſt, bonitatem maſſæ æſtimari ex ratione ipſius ad volumen, e. gr. frumentum eo melius, quo gravitas ſpecifica major. Quare non alia re opus eſt, quam ut inveſtigetur decremeutum ponderis in aqua.

Quodſi eodem mediante gravitatis ſpecificæ maſſarum ratio ad flui-

(h) Vid. Vitruvius lib. 9. c. 3. f. 273.

ſluidum aliquod determinetur (§. 73); maſsæ adulteratæ facile dignoſcuntur, ſi facta ponderatione in eodem fluido, diverſa ab hac gravitatis ſpecificæ ratio reperitur (§. cit.).

SCHOLION 1.

84. *Cum aqua non ſemper ejuſdem ſit gravitatis ſpecificæ, diverſitas prius per ponderationem ejuſdem ſolidi in eadem detegenda.*

SCHOLION 2.

85. *Notandum præterea, fieri nonnunquam poſſe, ut hydroſtaticum examen ſolum adulterationem factam non prodat.* E. gr. *Cum ſtannum argento ſit ſpecifice levius, plumbum ſpecifice gravius, duo hæc metalla (quod inferius expreſſius docetur) ita miſceri poſſunt, ut eandem cum argento gravitatem ſpecificam nanciſcantur: quæ maſſa poſtmodum cum argento permixta examen hydroſtaticum non verebitur. Unde apparet, quantitatem trium vel plurium miſcibilium in uno mixto non eodem modo determinari, quo quantitas duorum invenitur* (§. 81).

SCHOLION 3.

86. *Notandum denique, per varia experimenta addiſcendam eſſe diverſitatem, quæ in gravitate ſpecifica corporum ejuſdem ſpeciei ad idem fluidum occurrere poteſt, antequam de adulteratione facta judicium feratur.*

PROBLEMA 9.

87. *Fluidum ſpecifice gravius ponderare in ſpecifice leviori.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Mercurius in aqua ponderandus.

1. Aſſumatur vas vitreum v. gr. gravitatis 91, quod aqua plenum intra aquam ponderetur, noteturque pondus amiſſum 36: quod erit pondus aquæ ejuſdem cum vitri maſſa voluminis.
2. Idem vas argento vivo repletum in aëre ponderetur, noteturque pondus 186.
3. Ponderetur etiam in aqua, ut habeatur pondus amiſſum 43: quod erit æquale ponderi aquæ ejuſdem cum vitro & Mercurio ſimul ſumto voluminis.
4. Quare ſi pondus aquæ ejuſdem cum vitro voluminis 36 inde ſubtrahatur; relinquetur pondus aquæ ejuſdem cum argento vivo voluminis, hoc eſt, pondus ab argento vivo in aqua amiſſum 7.

THEOREMA 17.

88. *Corpus ſpecifice gravius in fluido ſpecifice leviori ea vi deſcendit, quæ eſt exceſſui ponderis ejuſdem ſupra pondus fluidi ſub eodem volumine æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Corpus in fluido nonniſi ea vi de-

deſcendit, quæ ipſi relinquitur, demta parte in reſiſtentiam fluidi vincendam impenſa. Quamobrem cum hæc æqualis ſit ponderi fluidi ſub eodem volumine (§. 55); nonniſi exceſſu ponderis ſui ſupra pondus fluidi ſub eodem volumine deſcendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

89. Quoniam vis ad ſuſtentandum corpus in fluido requiſita æqualis eſt vi, qua nititur deorſum in eodem; Vis, quæ corpus ſpecifice gravius in fluido ſuſtentat, æqualis eſt exceſſui gravitatis abſolutæ ſupra gravitatem fluidi ſub eodem volumine. E. gr. Cuprum librarum $47\frac{1}{3}$ in aqua amittit de pondere ſuo $5\frac{1}{3}$ libras: vis ergo 42 librarum id ſuſtentare valet.

COROLLARIUM 2.

90. Quare cum exceſſus ponderis ſolidi ſupra pondus fluidi ſpecifice gravioris minor ſit, quam ſupra pondus ſpecifice levioris ſub eodem volumine; in ſpecifice graviore vi minore deſcendit, quam in leviore, conſequenter etiam in hoc celerius, in illo tardius deſcendit.

COROLLARIUM 3.

91. Quamobrem in ſpecifice graviori fluido minor vis requiritur ad corpus aliquod ſuſtentandum, ne fundum petat, quam in ſpecifice leviori (§. 89).

PROBLEMA 10.

92. *Data ſolidi ſubmerſi gravitate abſoluta datoque volumine, determinare vim, qua in fluido attolli poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Exploretur pondus unius pedis cubici aquæ (§. 63): unde,
2. Ob datum ſolidi ſubmerſi volumen, per regulam trium inveniri poteſt pondus aquæ idem cum ipſo volumen habentis.
3. Hæc ergo ſi ſubducatur a gravitate corporis ſubmerſi data, relinquetur vis, quæ ipſum in aqua ſuſtentare valet (§. 89), adeoque tantillo aucta attollet.

Sit pondus corporis ſubmerſi 3000 librarum, volumen 40 pedum cubicorum. Cum pes cubicus aquæ ſit 70 librarum (§. 64); erit pondus aquæ idem cum ſubmerſo volumen habentis 2800: quod ex 3000 ſubductum relinquit vim ſuſtentantem 200 librarum.

SCHOLION.

95. *Hinc patet ratio, cur corpora quædam, quæ ſcilicet ad gravitatem ſpecificam fluidi propius accedunt (§. 90) in fluido iſto exigua vi ſuſtententur, quæ plurimorum vires conjunctas in aere ſuperant.*

CAPUT IV.

DE GRAVITATIONE CORPORUM SPECIFICE LEVIORUM IN FLUIDO GRAVIORI.

THEOREMA 18.

94. *Corpus ſpecifice levius in fluido graviore mergitur, donec pondus fluidi ſub volumine partis immerſæ æquetur ponderi totius corporis.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim columnæ quantælibet, in quas fluidum concipitur diviſum, æquiponderent, (*§.* 34); ſi corpus ſolidum eidem imponitur, perinde eſt ac ſi columnæ uni tantum ponderis acceſsiſſet, quantum eſt fluidi ſub eodem volumine, conſequenter columna iſta præponderat (§. 35). Cedunt ergo columnæ collaterales (*§. 75. Mechan.*) corpusque ſolidum immergitur. Quam primum vero corpus ea ſui parte immerſum, ut fluidum ejectum ex ſpatio, quod occupat, pondere æquale ſit gravitati totius corporis; columna iſta non amplius præponderat. Corpus itaque ita immerſum ab aqua ſuſtentatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

95. Quia gravitates ſpecificæ corporum ejusdem ponderis ſunt reciprocæ ut volumina (§. 29), volumina vero fluidorum pondere æqualium ſunt partes immerſæ ejusdem ſolidi (§. 59); gravitates ſpecificæ fluidorum reciproce ſunt ut partes immerſæ ejusdem corporis.

COROLLARIUM 2.

96. Solidum ergo profundius mergitur in fluido leviori, quam in graviori.

COROLLARIUM 3.

97. Quo majorem rationem ſolidi gravitas ſpecifica ad fluidi ſpecifice levioris gravitatem habuerit; eo profundius corpus mergitur. (§. 203. *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

98. Si ſolidum fuerit ejusdem gravitatis ſpecificæ cum fluido, corpus totum ſubmergitur & datum intra fluidum locum ſervat.

CO-

COROLLARIUM 5.

99. Si corpus ſpecifice levius in fluido graviori totum ſubmergitur, a columnis collateralibus ea vi ad aſcenſum urgetur, quæ æqualis eſt exceſſui fluidi, volumine ſolido æqualis, ſupra pondus ſolidi (§. 75. *Mechan.*).

COROLLARIUM 6.

100. Corpus adeo ſpecifice levius fundo vaſis incumbens non attollitur, niſi fluidum gravius affuſum ultra partem aſſurgat, quæ volumine æqualis eſt fluido ejuſdem cum ſolido toto ponderis.

THEOREMA 19.

101. *Gravitas ſpecifica ſolidi eſt ad gravitatem ſpecificam fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immerſæ ad volumen integrum.*

DEMONSTRATIO.

Volumen enim fluidi ſolido toti pondere æqualis æquatur volumini partis immerſæ (§. 94). Cum adeo gravitates ſpecificæ æquiponderantium ſint reciproce ut volumina (§. 29); erit gravitas ſpecifica ſolidi ad gravitatem fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immerſæ ad volumen integrum. *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

102. *Solidorum æquiponderantium partes in fluido graviori immerſæ ſunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Etenim pars immerſa ſolidi A æqualis eſt volumini fluidi, quod ejuſdem cum toto corpore A ponderis, & pars immerſa ſolidi B æqualis eſt volumini fluidi, quod ejuſdem cum toto corpore B ponderis (§. 94). Eſt vero gravitas ſolidi A æqualis gravitati ſolidi B *per hypoth.* & fluidum idem *per hypoth.* conſequenter gravitas fluidi expulſi eadem. Ergo pars immerſa ipſius A eſt æqualis parti immerſæ ipſius B. *Q. e. d.*

THEOREMA 21.

103. *Solidorum æqualium gravitates ſpecificæ ſunt ut partes eorundem in eodem fluido demerſæ.*

DEMONSTRATIO.

Solidorum A & B partes in eodem fluido demerſæ ſunt ut gravitates fluidi expulſi (§. 130. *Mechan.*), adeoque ut gravitates abſolutæ corporum A & B (§. 94). Sunt vero volumina A & B eadem *per hypoth.* Ergo gravitates ſpecificæ ſunt ut abſolutæ (§. 26), conſequenter gravitates ſpecificæ ſolidorum æqualium A & B ſunt

ut partes immerſæ (*ſ.* 167. *Arithm.*). *Q.e.d.*

PROBLEMA II.

104. ***Data gravitate pedis cubici fluidi e. gr. aquæ, una cum volumine partis immerſæ ſolidi, invenire pondus totius corporis.***

RESOLUTIO.

Quia pondus corporis ſolidi æquale eſt ponderi fluidi, quod idem cum parte immerſa volumen habet (*ſ.* 94); ad pedem cubicum, volumen partis immerſæ & gravitatem pedis cubici unius fluidi quærendus eſt numerus quartus proportionalis, qui erit pondus totius corporis.

E. gr. Pes cubicus aquæ eſt 70 librarum, (§. 84). Si itaque fuerit volumen partis immerſæ 40 pedum cubicorum; reperietur pondus totius corporis 2800 librarum.

PROBLEMA 12.

105. ***Data gravitate e.gr. unius pedis cubici aquæ & gravitate ſolidi, invenire volumen partis immergendæ.***

RESOLUTIO.

Cum ſit ut gravitas unus pedis cubici aquæ ad pondus integrum corporis ita pes cubicus unus ad volumen partis immergendæ (*ſ.* 94); tribus terminis in analogia datis, *per hypoth.* quartus per regulam trium invenitur.

E. gr. Sit gravitas corporis 3000 librarum: quia pes cubicus aquæ eſt librarum 70 (§. 64), reperietur volumen partis immergendæ pedum cubicorum $42\frac{6}{7}$.

PROBLEMA 13.

106. ***Datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris una cum gravitate fluidi ſpecifice gravioris, invenire vim, qua illud ſub hoc demerſum detinetur.***

RESOLUTIO.

Quoniam vis iſta æqualis eſt exceſſui ponderis fluidi ſub eodem volumine, quod habet ſolidum ſubmerſum, ſupra pondus hujus (§. 99),

1. ex datis volumine ſolidi & gravitate unius pedis cubici aquæ quæratur per regulam trium gravitas fluidi ſub æquali volumine.
2. Inde ſubtrahatur pondus ſolidi, ita nimirum vis quæſita relinquetur.

E. gr. Quæritur, qua vi opus ſit ad corpus 100 librarum, cujus volumen 8 pedum, ſub aquis detinendum. Quoniam pes cubicus aquæ eſt 70 librarum (§. 64),

(§. 64); pondus aquæ ſub volumine 8 pedum eſt 560. Unde ſi ſubducatur pondus ſolidi 100, relinquitur vis ad detinendum ſolidum ſub aqua 460 librarum.

COROLLARIUM.

107. Quoniam corpus ſpecifice levius eadem vi aſcendit in fluido graviori, qua ad aſcenſum ejus impediendum opus eſt (§. 75. *Mechan.*); per præſens problema invenitur quoque vis, qua ſolidum ſpecifice levius in fluido graviori aſcendit.

PROBLEMA 14.

108. *Inſtrumentum conſtruere, quo explorare licet, quantum ſalis in aqua data contineatur.*

RESOLUTIO.

Fig. 3. 1. Ex tenui lamina cuprea conſtruatur globus AB cum tubo BC ejus cavitatis, ne in aqua pura totus mergatur.

2. Granula plumbea globo AB indantur, donec inſtrumentum in D usque immergatur.

3. Pondus totius aquæ, in qua mergitur, dividatur per 99: quotus indicabit, quantum ſalis ſit in ea diſſolvendum, ut partem ponderis centeſimam abſolvat.

4. Poſtquam igitur tantum ſalis in aqua fuerit diſſolutum, inſtrumentum denuo in ea mergatur noteturque punctum E, quod hæret in ſuperficie aquæ ſalſæ. Ita nimirum conſtabit terminus immerſionis in aqua, quæ ſub volumine 100 librarum ſalis libram unam comprehendit.

5. Quodſi eodem modo inveniantur puncta alia F, G &c. quæ indicent terminos immerſionis in aqua, ſub volumine 100 librarum duas, tres, quatuor &c. libras ſalis continente; inſtrumento hoc explorare poteris, quantum ſalis in aqua data contineatur.

DEMONSTRATIO.

Quodſi enim inſtrumentum in aqua ſalſa mergatur, ſtatim apparebit, quot libræ ſalis in aqua ſalſa centum librarum contineantur. Quamobrem ſi pondus aquæ ſalſæ exploretur, per regulam trium invenitur quantitas ſalis in ea diſſoluti. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

109. *Ut problema præſens rectius intelligatur, exemplo ſequente id illuſtrare libet. Sit gravitas aquæ puræ 2000 ſcrupulorum. Divide 2000 per 99, quotus* $20\frac{20}{99}$ *indicabit, quot ſcrupula ſalis in aqua diſſolvenda, ut ponderis centeſimam partem conſtituat. Divide ulterius*

2000

2000 per 98, quoti $20\frac{40}{98}$ *duplum* $40\frac{80}{98}$ *indicat, quantum ſalis in aqua ſit diſſolvendum, ut ſit* $\frac{2}{100}$ *totius ponderis. Divide ſimiliter* 2000 *per* 97, *quoti* $20\frac{60}{97}$ *triplum* $61\frac{83}{97}$ *indicat, quantum ſalis in aqua diſſolvi debeat, ut ſi* $\frac{3}{100}$ *totius ponderis* &c. *Enimvero cum non ſine tædio ad ſingula diviſionum puncta invenienda aqua pura uti liceat; numerum ſequentem continuo ſubduc a proxime præcedente, reſiduum enim indicabit, quantum adhuc ſalis ſit addendum ad inveniendum punctum proxime ſequens.* E. gr. *ubi in aqua diſſolveris ſalis* $30\frac{20}{99}$ *pro inveniendo puncto* E: *ut alterum* F *reperias, addenda ſunt inſuper ſcrupula* $20\frac{2}{5}$ *fere, quæ eſt differentia inter* $20\frac{20}{99}$ & $40\frac{80}{98}$.

SCHOLION 2.

Fig. 14. 110. *Similia inſtrumenta ex vitro conſtrui ſolent, tubo* BC *in partes æquales diviſo & hermetice in* C *ſigillato, globo vero geminato, ad examinandam fluidorum gravitatem ſpecificam* (§. 101).

PROBLEMA 15.

111. ***Data gravitate vaſis ex materia ſpecifice graviori parandi & gravitate fluidi ſpecifice levioris, determinare cavitatem, quam habere debet, ut fluido ſupernatet.***

RESOLUTIO.

Cum detur pondus fluidi ſub volumine unius pedis cubici, *per hypoth.* volumen fluidi vaſi pondere æqualis per regulam trium inveniri poteſt. Quodſi ergo cavitas paulo major fiat, vas ſub eodem volumine minus ponderis continebit, quam fluidum adeoque eodem ſpecifice levius erit (§. 5), conſequenter ipſi ſupernatabit (§. 94).

E. gr. Sit parandus globus ferreus aquæ ſupernatans, cujus pondus 30 librarum. Quia pondus unius pedis cubici eſt 70 librarum, reperietur volumen æquæ 30 librarum 428″ 571‴, adeoque cubus diametri ſphæræ 818924 (§. 1551. *Geom.*): unde radix cubica extracta 9″ 3‴ eſt diameter ſphæræ aqueæ 30 librarum. Quodſi ergo diameter cavitatis fiat paulo major e. gr. unius pedis, eo minor ipſius pars mergetur, quo major fuerit diameter.

PROBLEMA 16.

112. ***Invenire gravitatem fluidi idem cum corpore quodam ſpecifice leviori volumen habentis, cujus pondus datur.***

RESOLUTIO.

1. Ponderetur corpus quodcunque ſolidum ſpecifice gravius in fluido dato, ut habeatur pondus fluidi ſub eodem volumine (§. 55).
2. Hoc corpus combinetur cum altero ſpecifice leviori, quam fluidum, & maſſa utriusque ſimul in eodem fluido ponderetur, ut habeatur pondus fluidi idem cum utraque maſſa volumen habentis (§. *cit.*).

3. Quodſi

3. Quodſi itaque ab hoc pondere ſubducas pondus fluidi primo inventum, relinquetur pondus fluidi idem cum corpore ſpecifice leviori volumen habentis.

E. gr. Sit in aqua ponderanda cera 15 librarum. Quoniam plumbum $60\frac{1}{2}$ librarum amittit in aqua $5\frac{1}{3}$; idem vero plumbum ceræ 15 librarum conjunctum amittit $21\frac{1}{3}$; reperietur pondus aquæ idem cum cera volumen habentis 16 librarum.

THEOREMA 22.

3. 113. *Vis, quæ requiritur ad vas*
5. *vacuum* DFEG *ad lineam* AC *in aquam immergendum, ad quam a quo plenum immergitur, æquatur vi tantundem aquæ in aëre ſuſtentanti.*

DEMONSTRATIO.

Vis aquam in aëre ſuſtentans gravitati ejus æqualis eſt. Sed vis vas vacuum DFGE ad lineam AC in aquam immergens æquatur gravitati aquæ vas replentis, quia eadem ad eandem lineam AC vas immergit, *per hypoth.* Ergo hæc vis æquatur alteri, quæ aquam in vaſe contentam in aëre ſuſtentare valet.

THEOREMA 23.

114. *Vis, quæ impenditur in ſolidum ſpecifice levius ſub fluido graviori detinendum, itemque pondus a ſolido graviori in fluido leviori amiſſum, gravitati fluidi accreſcit & cum ea ponderat.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim, quæ impenditur in ſolidum ſpecifice levius ſub fluido graviori detinendum, premit fluidum ſubjectum, adeoque perinde eſt, ac ſi maſſa tantundem premens eidem imponeretur. Sed hæc maſſa utpote unum grave cum fluido conſtituens una cum eodem ponderaret. Ergo & vis eidem æquivalens cum fluido ponderare debet. *Quod erat unum.*

Pars ponderis a ſolido ſpecifice graviori in fluido leviori amiſſum a fluido ſuſtentatur, ceu patet ex demonſtratione theorem. 14. (§. 55). Sed pondus, quod fluido incumbit, unum cum eodem totum conſtituit, adeoque perinde cum eo gravitare debet, ac ſi maſſa fluidi tantundem ponderans affunderetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

115. Hinc problema 13. (§. 106) etiam experimentando reſolvere licet.

COROLLARIUM 2.

116. Liquet etiam, vim nullam perdi; ſed tantum aliorſum impendi in corporum gravitatione.

quam corpus ſolidum ſpecifice gravius in fluido leviori amittit, a pondere corporis dato, ut relinquatur vis, quæ ſolidum intra fluidum in dato loco detinere poteſt (§. 75. *Mechan.*).

2. Ex data gravitate ſpecifica fluidi & corporis ſpecifice levioris atque vi ad ſuſtentandum ſpecifice gravius intra fluidum modo reperta, ſeu, quod perinde eſt, ad detinendum ſpecifice levius a graviori requiſita inveſtigetur gravitas totius corporis ſpecifice levioris: quod vi theorematis præcedentis (§. 121) per regulam trium (§. 302. *Arithm.*) reperiri poteſt. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM I.

123. Quoniam ſolidum ejusdem gravitatis ſpecificæ eſt cum fluido, quod datum intra fluidum locum ſervat (98), cum ſpecifice gravius in eodem deſcendat (§ 88), ſpecifice levius aliqua tantum ſui parte mergatur (§. 94); per præſens problema patet, quomodo combinando duo corpora, quorum alterum fluido ſpecifice levius, alterum ſpecifice gravius, efficiatur corpus eandem cum fluido gravitatem ſpecificam habens.

COROLLARIUM 2.

124. Si pondus corporis ſpecifice levioris tantisper augeatur ſpecifice gravius ad ſuperficiem fluidi attollet.

SCHOLION.

125. *Theorema præſens cum ejus corollario etiam per theorema 24 (§. 113) demonſtrari poterat.*

THEOREMA 27.

126. *Vis corpus ſolidum in fluido ſpecifice leviori ſuſtentans eſt ad pondus ejusdem ut differentia gravitatum ſpecificarum illius ac fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim gravitas ſpecifica ſolidi ad gravitatem fluidi ut pondus integrum ſolidi ad partem ejus in fluido amiſſam (§. 59). Quamobrem convertendo erit ut differentia gravitatum ſpecificarum ad gravitatem ſolidi, ita exceſſus ſolidi ſupra fluidum ad pondus ſolidi integrum (§. 193. *Arithm.*). Eſt vero exceſſus ſolidi ſupra fluidum æqualis vi ad ſolidum intra fluidum ſuſtentandum requiſitæ (§. 89). Ergo hæc vis eſt ad pondus integrum ſolidi ſuſtentandi ut differentia gravitatum ſpecificarum ad gravitatem ſolidi. *Q. e. d.*

PROBLEMA 18.

127. *Datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris una cum gravitate unius pedis cubici fluidi ſpecifice gravioris x: nec non gra-*

gravitate ſpecifica ejusdem fluidi & corporis ſolidi eodem ſpecifice gravioris, invenire quantum hujus pondus eſſe debeat ut ſpecifice leviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris una cum gravitate unius pedis cubici fluidi ſpecifice gravioris inveniatur vis ad ſolidum in fluido detinendum requiſita (§. 106): quæ erit exceſſus ſolidi ſpecifice gravioris ſupra pondus fluidi mole æqualis (§. 89). Unde
2. ex data ratione gravitatum ſpecificarum ſolidi ſpecifice gravioris & fluidi atque vi iſta ſeu exceſſu prædicto invenitur pondus ſolidi ſpecifice gravioris cum leviori conjungendum, ut idem in fluido ſuſtentet (§. 115). *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

128. Quodſi ſolidi ſpecifice gravioris pondus tantiſper augeatur, cum ſpecifice leviori una deſcendet, ſeu ſpecifice levius ad fundum ſecum abripiet.

SCHOLION.

129. *Non abſimili modo plura alia problemata ſolvi poſſunt, quæ in philoſophia experimentali & vita communi ac arte uſum ſuum habere poſſint.*

FINIS HYDROSTATICÆ.

ELEMENTA
AEROMETRIÆ.

PRÆFATIO.

A multo jam tempore in more poſitum, ut Phyſicæ quædam capita in numerum diſciplinarum Mathematicarum relata fuerint, poſtquam, facta ad experientias indubias Arithmeticæ, Geometriæ & Analyſeos, hoc eſt, Matheſeos puræ applicatione, formam mathematicam iis induere licuit. Non alia ſane de cauſa Hydroſtatica, Hydraulica, Optica cum Catoptrica atque Dioptrica, itemque Aſtronomia in numero iſto comparent. Quamobrem cum multa de viribus atque affectionibus aëris more Geometrarum & ex principiis Matheſeos puræ demonſtrari, demonſtrata ad varios uſus dextre applicari poſſint; anno 1709. numerum diſciplinarum Mathematicarum augere animum induxi, editis Aërometriæ Elementis, quæ anno ſequente 1710 in Tomo ſecundo Elementorum Matheſeos Germanicorum Hydroſtaticæ ſubjunxi, tanquam ejus filiam atque alumnam. Enimvero tanto

majori jure locum ſemel adeptum tuetur, quod Hydraulica dudum in Matheſin recepta in multis opem ejus imploret. Quemadmodum enim Aërometriæ facem præfert Hydroſtatica; ita Aërometria Hydraulicam illuſtrat. Antequam igitur ad Aërometriam animum appellas, Hydroſtaticæ dogmatibus eundem imbuas opus eſt. Antequam ad Hydraulicam pedem promoveas, Aërometriam Tibi ſociam jungas e re tua omnino eſſe deprehendes. Jucundum vero eſt Aërometriæ ſtudium, idemque utilisſimum, tum quod inde ratio plurimorum Naturæ phænomenorum deſumitur, tum quod variarum machinarum ac inſtrumentorum ſtructura in ea continetur. Ut brevitati conſulatur & ſequentia antecedentibus reſpondeant; non integra exhibeo Aërometriæ elementa, quæ ante quinque fere annos a me edita eſſe modo memini, ſed quæ digniora reliquis viſa ſunt, in compendio exhibere & nonnullis augere conſtitui. Cæterum Aërometriæ Elementa, æquis harum rerum arbitris conſentientibus, iis potisſimum commendo, quibus curæ cordique fuerit, ad experimenta applicare Matheſin. Hunc fructum cupidis polliceor, & ut eundem conſequantur ex animo apprecor.

ELE-

ELEMENTA AEROMETRIÆ.

CAPUT I.

DE PRINCIPIIS AEROMETRIÆ.

DEFINITIO 1.

1. *Aerometria* eſt ſcientia metiendi aërem.

COROLLARIUM.

2. Cum metiri idem ſit ac rationem quantitatum ad aliam homogeneam datam inveſtigare (§. 23. *Geom.*); in Aërometria tradendæ ſunt leges, juxta quas omnia de aëre conceptibilia & extenſionis terminos vel intenſitatis gradus habentia accurate determinari poſſunt.

DEFINITIO 2.

3. *Aër* eſt corpus fluidum Telluri circumfuſum & ſpatia ab aliis corporibus in eadem relicta occupans, niſi impediatur.

SCHOLION.

4. *Definitionem aëris nonniſi nominalem tradere intendo. Sufficit igitur exhibuiſſe notam, aere præſente ſemper obviam, ex qua ejus præſentia certo colligi poteſt.*

DEFINITIO 3.

5. *Compreſſio* eſt coarctatio maſſæ in minus volumen per impulſum aut preſſuram alterius corporis facta.

DEFINITIO 4.

6. *Condenſatio* eſt coarctatio maſſæ in minus volumen vi frigoris facta.

DEFINITIO 5.

7. *Dilatio* eſt expanſio maſſæ in majus volumen, quam facta compreſſione habuerat.

DEFINITIO 6.

8. *Rarefactio* eſt expanſio maſſæ in majus volumen vi caloris facta.

DEFINITIO 7.

9. *Elater aëris* eſt vis, qua vi comprimente ſublata dilatatur.

AXIOMA 1.

10. *Quo corpus eſt gravius, eo magis premit alia ſibi ſubjecta.*

SCHOLION.

11. *Patet ex definitione gravitatis* (§. 4. Mechan.). *Corpus ſcilicet vi gravitatis nititur deorſum adeoque premit alterum deſcenſui reſiſtens. Quo majore itaque vi deorſum nititur, eo magis quoque premit alterum ſibi ſubjectum.*

AXIOMA 2.

12. *Quamdiu dilatatio per elaterem facta eadem eſt, elater quoque immutatus ſit neceſſe eſt: quodſi vero elater majorem dilatationem produxerit, creviſſe; ſin minorem, decreviſſe cenſendus eſt.*

EXPERIENTIA 1.

13. *Promove celeriter manum per ſpatia, quæ vacua eſſe videntur, faciem verſus; impetum quendam in eam fieri animadvertes, utut manus ipſam non contingat.*

COROLLARIUM.

14. Neceſſe eſt adeo, ut interſtitia inter corpora terreſtria, quæ vacua eſſe videntur, materia quadam repleantur, cujus partes ſint admodum ſubtiles, cum non videantur, & inconnexæ, cum motum corporum non impediant. Spatia igitur in Tellure ab aliis corporibus derelicta fluidum aliquod ſubtiliſſimum occupat (§. 3. *Hydroſtat.*) hoc eſt, aër datur (§. 3).

EXPERIENTIA 2.

15. *Globo cupreo aut orichalceo ſatis capaci afferruminetur epiſtomium cum cochlea fœmina, ita ut ſyrinx mediante cochlea mari ad arbitrium ei adaptari rurſusque removeri poſſit. Quodſi ope ſyringis plus aëris in globum intrudas, eumque clauſo epiſtomio bilanci imponas, pondus ejus auctum deprehendes: ubi vero epiſtomium rurſus aperies, aërem erumpere animadvertes & globus metallicus recuperabit pondus, quod ante intruſionem aëris habuerat.*

SCHOLION.

16. *Experimentum hoc excogitavit* Galilæus Galilæi, *lagena vitrea uſus* (a); *ſed cum vaſa vitrea ab aëre compreſſo facile nec ſine periculo adſtantium frangantur, ego metallico uti ſoleo, in gratiam curioſorum idem repetens.*

COROLLARIUM 1.

17. Quoniam in globum metallicum plus aëris intrudi poteſt, quam ordinarie capit; evidens eſt, aërem in minus volumen coarctari poſſe, quam ordinarie occupat. Comprimi ergo poteſt (§. 5).

COROLLARIUM 2.

18. Cum epiſtomio aperto aër rurſus egrediatur, ipſoque egreſſo pondus priſtinum recuperet globus, quod ante compreſſionem aëris in ipſo factam habuerat; certo hinc intelligitur, tantum præciſe aëris rurſus egreſſum, quantum intruſum fuerat. Aër itaque compreſ-

(a) Mechan. Dialog. I. p. m. 71.

preſſus ad priſtinam expanſionem redit, ſi vis comprimens aut expanſioni reſiſtens removeatur, adeoque elatere gaudet (§. 9.).

COROLLARIUM 3.

19. Certum itaque compſeſſionis indicium eſt, quod aër intra vas quoddam magis compreſſus ſit, quam externus, ſi orificio ejus aperto, cæteris paribus, aêris quædam portio egredi obſervetur.

COROLLARIUM 4.

20. Denique quia pondus vaſis augetur, ſi aêr intra ipſum comprimitur; maſſa aërea niſum exerceat opus eſt deorſum juxta lineas rectas ad horinzontem perpendiculares (§. 215. *Mechan.*) Gravis ergo exiſtit (§. 4. *Mechan.*).

COROLLARIUM 5.

21. Premit ergo corpora ſubjecta ſecundum lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215. *Mechan.*).

EXPERIENTIA 3.

22. *Quodſi veſicam aëre mediocriter repletam firmiterque conſtrictam ad ignem admoveas; ea non ſolum diſtenditur, ſed & ingenti prorſus fragore tandem disrumpitur. Quodſi vero eam ab igne removeas, antequam disrumpatur, ſtatim flaccida evadit.*

COROLLARIUM 1.

23. Cum intra veſicam nil niſi paululum aëris contentum fuerit; expanſio veſicæ expanſionem aêris incluſi arguit. Aer itaque rareſit (§. 8).

COROLLARIUM 2.

24. Quia calore exſpirato veſica diſtenta rurſus flaccida fit; frigore in volumen minus rurſus coarctatur adeoque condenſatur (§. 6).

EXPERIENTIA 4.

25. *Si aer in vaſe comprimatur, ejus quandam portionem aperto orificio ex ipſo iterum exſpirare notabis in quacunque orificii directione.*

COROLLARIUM.

26. Elater igitur aeris nititur quaquaverſum ſecundum quamlibet directionem.

EXPERIENTIA 5.

27. *Si tubum oblongum* HB, *cujus altitudo 32. pedibus Rhenanis major, in* C *epiſtomio inſtructum & verticaliter erectum aqua repleas; orificium inferius* A *in aquam immergas & aperto orificio* B *epiſtomium aperias, aqua tota cum impetu effluit: ſi vero obturato orificio* B *epiſtomium* C *recludas, aqua usque ad* D *deſcendit, ac in altitudine 31 pedum Rhenanorum ultra libellam aquæ in vaſe* GH *contentæ pendula hæret.* Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM.

28. Quoniam aqua intra tubum AB pendula aquam in vaſculo ſibi ſub-

jectam premit nec tamen deſcendit; neceſſe eſt, ut, ſi aqua in vaſculo contenta in iſtiusmodi columnas diviſa concipiatur, qualis eſt, quæ tubo 1 AB ſubjacet, ſingulæ æquali vi premantur. Sed circa tubum ſuperficiei aquæ incumbit aer (§. 3) eamque premit (§. 21). Columna igitur aerea a ſuperficie aquæ in vaſculo contentæ usque ad extremitatem atmoſphæræ extenſa eandem habet gravitatem cum cylindro aqueo ſuper eadem baſi, ſed altitudinis 31 pedum Rhenanorum (§. 36. *Hydroſt.*).

SCHOLION.

29. *Hoc æquilibrium aeris cum aqua primus obſervavit hortulanus quidam Florentinus, aquam in antlia tractoria ultra 18 cubitos attolli non poſſe miratus, atque cum* Galilæo *phænomenon inſperatum communicavit ipſe cauſam ejus ignorans.* (b). *Iterarunt hoc experimentum complures, quos inter* Mariottus (c) *altitudinem aquæ in tubo pendula reperit 32 pedum Pariſienſium.* Evangeliſta Torricellus, *diſcipulus* Galilæi, *aqua ſubſtituit Mercurium, cujus altitudo utpote quatuordecies gravioris aqua reperitur 28 circiter digitorum Rhenanorum* (§. 36. Hydroſt.).

CAPUT II.

DE

ELATERE ET GRAVITATE AERIS.

THEOREMA 1.

30. *Elater aëris inferioris æquatur ponderi totius ſuprrioris ipſi incumbentis.*

DEMONSTRATIO.

Aër enim ſuperior premit inferiorem (§. 21). Elater vero æquatur ponderi prementi (§ 553. *Mechan.*). Ergo elater aëris inferioris æquatur ponderi totius ſuperioris ipſi incumbentis. Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

31. Quoniam pondus aeris ſuperioris inferiori incumbentis æquatur ponderi columnæ aqueæ, cujus eadem cum volumine aeris baſis, ſed altitudo 31 pedum (§. 28), vel etiam columnæ Mercuriali, cujus altitudo 28 digitorum (§. 29); elater aeris inferioris eidem, columnæ aqueæ & mercuriali æquatur.

SCHO-

(b) Mechan. Dial. 1. p. m. 15. 16.

(c) Trait. du mouvement des Eaux part. 2. diſc. 1. p. 9.

SCHOLION.

32. *Pondus hujus columnæ aqueæ vel mercurialis dicemus in poſterum brevitatis gratia* pondus atmoſphæricum.

COROLLARIUM 2.

33. Elater aeris incluſi, ſi cætera cum ambiente externo paria ſint, æquatur ſimiliter ponderi totius ſuperioris incumbentis.

COROLLARIUM 3.

34. Incluſus adeo aer eadem vi premit, qua pondus atmoſphæricum.

COROLLARIUM 4.

35. Ergo etiam hic Mercurium, ad altitudinem 18 digitorum, aquam vero ad altitudinem 31 pedum in tubo vacuo ſuſpendit (§. 28. 29).

THEOREMA 2.

36. *Si vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruet eamque replebit.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim aër in ſtatu compresſionis (§. 28), cumque elatere gaudeat (§. 18), admajorem continuo expanſionem nititur (§. 9) & quidem quaquaverſum (§. 26). Quare cum intra vas vacuum niſui huic nihil reſiſtat, expanſio per cavitatem vaſis actu ſequetur (§. 75. *Mechan.*). Et quia ſi aliquod ſpatium vacuum intra cavitatem vaſis ab aëre irruente non occupatum ſupponamus, illud inſtar vaſis vacui intra aërem aperti conſiderari poteſt, aër in vas irruens etiam hoc ſpatium replere debet. Si itaque vas aliquod ab aëre vacuum prope tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruit eamque replet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

37. Si ergo ſyrinx orificio alicujus vaſis firmiter infigatur & embolus poſtea extrahatur, aer in vaſe contentus per ſiphonis cavitatem expandetur.

DEFINITIO 8.

38. *Antlia pneumatica* eſt machina, qua mediante aër ex vaſis educi poteſt.

SCHOLION.

39. *Primus antliæ pneumaticæ inventor eſt* Otto de Guericke, *Conſul Magdeburgicus, qui experimenta ſua jam ſub finem comitiorum imperialium anno* 1654. *Ratisbonæ celebratorum in præſentia Imperatoris, Electorum ac Principum quorundam iteravit* (d). *Ut ut vero inter exteros non deſint, qui laudem inventionis* Roberto Boylio, *experimentatori celeberrimo, tribuunt, quos inter ex Anglis* Robertus Hookius, *recenſente* Cl. Wallero (e) *& ex Gallis*, Johan-

(d) Vid. Præfatio ad Experimenta nova Magdeburgica.

(e) in Vita Hookii operibus ejus poſthumis præmiſſa f. 3.

hannes Baptiſta du Hamel. *variis ſcriptis celebris* (f); *ipſe tamen* Boylius *pro eo, qui decet virum doctum, candore* (g) *agnoſcit, quod* Otto de Guericke *ipſum prævenerit, quodque ipſe ab iis, quæ* Caſparus Schottus *in Mechanica Hydraulico-pneumatica A.* 1657. *edita de vaſis vitreis a* Guerickio *ab aere evacuatis publicaverat, ad ſua experimenta & antlia pneumatica conſtructionem incitatus fuerit. Structuram immutavit ipſe* Guerickius (h): *aliud artificium embolum extrahendi applicuit* Boylius, *quo nunc ordinarie utuntur. Recentius ſtructuram antliæ pneumaticæ immutavit* Hauckſbejus, *Mechanicus Anglus, cujus formam deſcribit* Cel. Graveſandius (h), *ipſeque inventor delineat* (i).

PROBLEMA I.

40. *Antliam pneumaticam conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus AB ex orichalco, intus cavus & ſatis capax, cujus interior ſuperficies optime polita, ut embolus DE arctiſſime ipſam undiquaque contingat, ne ulli moleculæ aereæ inter eam & embolum locus relinquatur.
2. Embolus conſtare debet ex orbibus coriaceis firmiter ſibi mutuo appreſſis mediante cochlea orbi orichalceo E afferruminata. Corium optimum eſt bubulum, ex quo ſuccingula militum parari ſolent. Probe autem notandum eſt, corium imbibere debere oleum olivarum tertiæ parti pinguedinis ſuillæ excoctæ permixtum, ne ſucceſſu temporis indureſcat.
4. Embolo affigatur lamella ferrea dentata DC, ut ope rotulæ dentatæ manubrio NO verſato commode extrahi ac intrudi poſſit.
4. In B afferruminetur baſi cylindri tubulus BFKL cum epiſtomio GHI ex cylindro cavo HF & operculo cylindrico ſolido I compoſito.
5. Denique tubulus KL in L inſtruatur cochlea, ut vaſa, quorum orificia cochleis fœminis ſeu matricibus inſtructa, ad eundem firmari poſſint. Eodem modo adaptandus eſt, quoties uſus poſtulat, catinus orichal-

(f) in Philoſ. Vet. & Nov. Tom. 4, Phyſ. gener. Tract. 2. diſſert. 3. c. 10. p. m. 284.
(g) in præf. ad Nova Experim. Phyſ. Mech. de vi aeris elaſtica p. m. 3,
(h) l. c. f.
(h) in Elementis Phyſicæ Mathematicis Tom. 1. lib. 2. c. 6. p. 309. edit. ſec.
(i) Phyſica-Mechanical Experiments p. 1, & ſeqq.

chalceos PQ, cui vitra companiformia commode imponere liceat.

Dico ex vaſis ad hanc machinam firmatis aerem educi poſſe.

DEMONSTRATIO.

Cum enim embolus CE extrahitur epiſtomio verſus antliam AB & tubulum KL aperto, aer in vaſe contentus per tubuli LKGB & cylindri AB cavitatem expanditur (§. 36). Quodſi jam epiſtomium claudatur verſus tubulum KL, ſit tamen apertum verſus antliam AB, & remoto operculo I embolus DE rurſus intrudatur, aer per epiſtomium FH extruditur, conſequenter aeris aliqua portio ex vaſe educta. Quo pluries itaque hæc operatio reperitur, eo plus aeris ex vaſe educitur. Ope adeo machinæ conſtructæ aer ex vaſis educi poteſt. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

41. *In uſu antliæ notandum, embolum oleo olivarum illini & fundo catini orbem coriaceum bubulum (quali ad conſtructionem emboli utendum) probe madefactum & in medio perforatum applicandum eſſe, ut embolus facile extrahatur & antliam undiquaque arctiſſime contingat, vas vero evacuandum firmiter catino apprimatur.*

SCHOLION 2.

42. *In evacuandis vaſis rationem habendam eſſe tantum vis elaſticæ, ad quam ſolam in demonſtratione reſpeximus, experimenta probant. Aerem enim, iteratis emboli agitationibus, continuo rariorem fieri, docet expanſio veſicæ ſub campana ſuſpenſæ, firmiter conſtricto collo & nonniſi pauculo aeris intus relicto. Enimvero dilatationem tantum fieri per elaterem, nec quicquam conferre gravitatem, in Actis Lipſienſibus (k) ante triennium circiter experimento docui: quod hic repetere juvat. Fieri curavi tubum ex lamina orichalcea cochleæ afferruminatum, ut ad antliam firmari poſſet, atque fornicem vaſis evacuandi fere attingentem. Quantum per hunc tubum aeris facta qualibet emboli agitatione ex vaſe educeretur, maxima cum circumſpectione notavi: embolo enim intruſo, donec aer in antlia contentus eandem cum externo denſitatem haberet, numeravi dentes virgæ dentatæ extra antliam conſpiciendos. Mox tubo iſto remoto, evacuationem ejusdem vaſis denuo tentavi: quam eadem prorſus ratione ut antea contingere didici. Uſus autem ſum vaſis & majoribus, & minoribus eodem ſemper ſucceſſu, eſtque diameter luminis in antlia mea 4 digitorum 6 linearum, longitudo cylindri 2 pedum Rhenanorum. Quoniam vero doctiſſimis Diarii Trevoltienſis collectoribus, (l) quorum erga me humanita-*

(k) A. 1711. menſ. Jan. p. 14.

(l) Memoires pour l'Hiſtoire des Sciences & des beaux Arts. Aout. 1711. art. 120. p. 1404.

tem ut gratus prædicem fas eſt, hoc experimentum non ſuffecere viſum eſt ad vim gravitatis ab evacuatione vaſorum excludendam; ideo (§. 47) *mox ex natura elateris id demonſtrabimus, ut in Aerometria A.* 1709. *edita. Cæterum hæc ratio eſt, cur antliæ ſitus ad horizontem inclinatus eſſe poſſit, nec opus ſit, ut, quod poſt* Guerickium *etiam* Boylius *& nuper* Hauksbejus *fecit, ut ad horizontem perpendicularis fiat.*

SCHOLION 3.

43. *Aliud antliæ genus ex duplici cylindro conſtruxit experimentator induſtrius* Frenciſcus Haukbée, *cujus deſcriptionem exhibent Actorum Eruditorum collectores* (m). *Eam pro more ſuo in multis immutavit* Leupoldus *variis inventionibus mechanicis celebris* (n). *Sed cum in comprimendo aere uſus ejus ſit nullus, qui tamen in experimentis frequens eſſe ſolet, nec vaſa tam exacte evacuari poſſe videantur, quam antlia ordinaria utendo: ideo antiquum antliæ genus huic recentiori præferendum eſſe judico, niſi accedat medula.*

THEOREMA 3.

44. *Aër Telluri circumfunditur, nec uno in loco altior eſſe poteſt quam in altero.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim aër Telluri circumfunditur, aut non. Ponamus poſterius. Dabitur ergo ſuper aliqua Telluris parte ſpatium ab aëre vacuum. Jam cum aër vacuo huic contiguus exiſtat, per ſpatium illud expandetur (§. 36). Impoſſibile igitur, ne intra aërem ſit ſpatium aliquod ab aere vacuum. Tale vero cum neceſſarium foret ob rotunditatem Telluris, niſi aër eam undiquaque ambiret; neceſſe eſt aërem Telluri circumfundi. *Quod erat unum.*

Quodſi ponamus aërem uno in loco eſſe altiorem, quam in altero; aër vacuo contiguus ſtatim expandetur (§. 36), adeoque non quieſcet niſi undiquaque eandem habuerit altitudinem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

45. Quare ſi cætera ſint paria, duobus corporibus eandem baſin habentibus in æqualibus a centro Terræ diſtantiis æqualia atmoſphæræ pondera incumbunt, adeoque ab aere incumbente æqualiter premuntur (§. 42. *Hydroſt.*)

COROLLARIUM 2.

46. In æqualibus itaque a centro terræ diſtantiis, ſi cætera fuerint paria, aër eandem denſitatem habet, adeoque ſub æqualibus voluminibus maſſas æquales continet (§. 8. *Hydroſt.*), conſequenter æqualia volumina ejusdem gravitatis exiſtunt.

(m) Supplem. Tom. V. Sect. 9. p. 403. Conter Autores ame nos, h & i citatos.
(n) Acta Erudit. A. 1713. p. 95.

THEOREMA 4.

47. *In eodem vaſe vel etiam in vaſis communicantibus aer ubique eandem denſitatem habet, ſi cætera paria fuerint.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim eandem habet denſitatem, aut non. Ponamus aërem in vaſe uno eſſe rariorem, in altero denſiorem. Illius ergo denſitas per preſſuram minoris ponderis producetur, hujus per preſſuram majoris. Aſt elater aëris æquatur ponderi prementi (§. 553. *Mechan.*). Ergo in aëre rariore minor vis elaſtica, quam in denſiore. Quare cum aër uterque vi elateris quaquaverſum ſeſe expandere nitatur (§. 26); majore vi aer denſior nititur verſus rariorem, quam rarior verſus denſiorem. Ergo rarior cedet denſiori (§. 75. *Mechan.*), comprimetur ergo ab elatere denſioris (§. 5) & denſior proprio elatere dilatabitur (§. 7), nec reddetur aëri in utroque vaſe quies, niſi niſus aeris utrinque fuerit idem (§. 75. *Mechan.*), hoc eſt, niſi eandem denſitatem habuerit, *per demonſtrata.* Si igitur aer in utroque vaſe eandem denſitatem non habuerit, cæteraque paria fuerint, ad eandem ſtatim reducetur. In vaſis igitur communicantibus, adeoque multo magis in eodem, ceteris paribus, aër ubique eandem denſitatem habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

48. Quare ſi embolo ex antlia extracto aer ex vaſe ad ipſam firmato in cavitatem ejus ruit (§. 36); qui cavitatem antliæ replet cum eo, qui in vaſe evacuando reſiduus, denſitatem eandem habet.

COROLLARIUM 2.

49. Eſt ergo maſſa aeris intra cavitatem antliæ contenti ad maſſam aeris in vaſe evacuando reſidui ut capacitas antliæ ad capacitatem vaſis (§. 17. *Hydroſt.*).

THEOREMA 5.

50. *In vaſe, quod per antliam evacuatur, ſemper eſt aer primitivus ad aerem reſiduum, ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad eam dignitatem elevatum, cujus exponens æquatur numero agitationum emboli, ad capacitatem vaſis ſolius ad eandem dignitatem evectam.*

DEMONSTRATIO.

Dicatur aer a prima agitatione emboli reſiduus *aer reſiduus primus*; qui a ſecunda emboli agitatione reſtat, *aer reſiduus ſecundus* & ita porro.

Quoniam aer in vaſe contentus

eſt ad aerem in antlia contentum ut capacitas vaſis ad capacitatem antliæ (§. 49.); erit etiam aggregatum ex aere in vaſe & ex aere in antlia contento, hoc eſt aer primitivus; ad aerem in ſolo vaſe contentum, hoc eſt reſiduum primum, ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad capacitatem vaſis ſolius (§. 190. *Arithm.*). Similiter demonſtratur, eſſe quantitatem aeris reſidui primi ad quantitatem reſidui ſecundi ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad capacitatem vaſis ſolius; & in eadem ratione eſſe quantitatem aeris reſidui tertii &c. Ergo factum ex aere primitivo in reſiduum primum, ſecundum, tertium, quartum &c. ad factum ex aere reſiduo primo in ſecundum, tertium, quartum, quintum &c. ut factum ex capacitate vaſis & antliæ junctim toties in ſe ducta emergens, quot numerus agitationum emboli unitates continet, ad factum ex capacitate vaſis ſolius multoties itidem in ſe ducta enaſcens (§. 213. *Arithm.*) hoc eſt, ut dignitas aggregati ex capacitate vaſis & antliæ junctim, cujus exponens eſt numerus agitationum emboli, ad capacitatem vaſis ſolius ad eandem dignitatem evectam (§. 250. *Arithm.*), conſequenter aer primitivus ad reſiduum ultimum earundem dignitatum rationem habet (§. 260. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

51. *Dato numero agitationum emboli in antlia factarum unacum capacitate vaſis & capacitate antliæ, invenire rationem aeris primitivi ad reſiduum.*

RESOLUTIO.

1. Ex Canone logarithmorum excerpatur logarithmus aggregati ex capacitate vaſis & capacitate antliæ una cum logarithmo capacitatis vaſis ſolius.
2. Logarithmus poſterior e priori auferatur &
3. Differentia in numerum agitationum emboli ducatur; erit factum logarithmus, cui in tabulis reſpondet numerus indicans, quoties aer primitivus contineat reſiduum quæſitum.

E. gr. Sit capacitas antliæ 580'', capacitas vaſis 460''; erit aggregatum ex utraque 1040''. Sit numerus agitationum emboli 6; erit logarithmus rationis, quam habet aer primitivus ad reſiduum 6 (3.0170333 − 2.6627578) = 2.1256530, cui in tabulis reſpondet numerus $146\frac{1}{8}$. Eſt igitur aer primitivus ad reſiduum ut $136\frac{4}{5}$ ad 1, hoc eſt, ut 1464 ad 10 ſeu ut 732 ad 5.

DEMONSRATIO.

Sit capacitas vaſis = v, capacitas antliæ & vaſis ſimul = a, numerus agitationum emboli = n, aer reſiduus = 1. Quoniam aer primitivus ad reſiduum ut a^n ad v^n (§. 50), erit etiam primitivus ad reſiduum ut $\frac{a^n}{v^n}$ ad 1 (§. 181. *Arithm.*), conſequenter ſi reſiduus 1, logarithmus primitivi eſt $n(la - lv)$ (§. 341. 343. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 3.

52. ***Data capacitate vaſis evacuandi & capacitate antliæ, invenire numerum agitationum emboli ad aerem in data ratione dilatandum requiſitum.***

RESOLUTIO.

1. Excerpantur ex Canone logarithmorum logarithmi aeris primitivi, aeris reſidui, capacitatis vaſis & aggregati ex capacitate vaſis & capacitate antliæ.
2. Logarithmus aeris reſidui ſubducatur ex logarithmo aeris primitivi, ſimiliter logarithmus capacitatis vaſis auferatur ex logarithmo aggregati ex capacitate vaſis & capacitate antliæ.
3. Differentia prior dividatur per alteram. Dico, quotum eſſe numerum agitationum emboli quæſitum.

E. g. Sit capacitas antliæ 580″, capacitas vaſis 460″, aer primitivus ad reſiduum ut 1464 ad 10: repetietur numerus agitationum emboli (3.0656530 − 10000000):(3.0170333 − 2.6627578) = 21656530:3542755 = 6.

DEMONSTRATIO.

Sit aer primitivus p, reſiduus r, reliqua ſint ut in demonſtratione problematis præcedentis: erit

$$p : r = a^n : v^n \quad (\text{§. } 50)$$
$$lp - lr = nla - nlv \quad (\text{§. } 341.\ 343\ \textit{Arithm.})$$
$$(lp - lr):(la - lv) = n. \quad \textit{Q. e. d.}$$

PROBLEMA 4.

53. ***Data ratione aeris primitivi ad reſiduum una cum capacitate vaſis & numero agitationum emboli, invenire capacitatem antliæ.***

RESOLUTIO.

Sit aer primitivus ad reſiduum = $p : r$, capacitas vaſis = v, capacitas antliæ = x, numerus agitationum emboli = n; erit

$$p : r = (v + x)^n : v^n \quad (\text{§. } 50)$$
$$lp - lr = nl(v + x) - nlv \quad (341.\ 343\ \textit{Arith.})$$
$$lv + (lp - lr) : n = l(v + x)$$

Inveniri adeo poteſt logarithmus

aggregati ex capacitate vaſis & antliæ, conſequenter ipſum hoc aggregatum. Quare ſi hinc auferatur capacitas vaſis, relinquetur capacitas antliæ.

E. gr. Sit $p : r = 1464 : 10$, $v = 460''$, $n = 6$; erit $l(v+x) = 2.6627578 + (3.0656530 - 1000000.0) : 6 = 2.6627578 + 5542755 = 30.70333$. Ergo vi Canonis $v + x = 1040''$, conſequenter $x = 580''$.

THEOREMA 6.

54. *Numeri agitationum emboli, quibus ope duarum antliarum in eodem vaſe vel æqualibus vaſis aër ad eandem rationem cum aëre primitivo reducitur ſunt in ratione reciproca differentiarum Logarithmi vaſis a Logarithmo aggregatorum ex capacitate vaſis & capacitate antliarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit ratio aëris primitivi ad reſiduum $= p : r$, capacitas vaſis $= v$, antliæ majoris capacitas $= A$, minoris vero $= a$. Quoniam ratio aeris primitivi ad reſiduum in evacuatione per utramque antliam facta eadem *per hypoth.* ſi numeri agitationum emboli fuerint m & n; erit $(v+A)^m : v^m = p : r$ & $(v+a)^n : v^n = p : r$ (§. 50), conſequenter $(v+A)^m : v^m = (v+a)^n : v^n$ (§. 167. *Arithm.*). Habemus itaque $ml(v+A) - mlv = nl(v+a) - nlv$ (§. 341. 343. *Arithm.*), conſequenter $m : n = (lv+a) - lv : l(v+A) - lv$, hoc eſt, numeri agitationum emboli, quibus aer in eodem vaſe ope diverſarum antliarum ad eandem rationem cum primitivo reducitur, ſunt in ratione reciproca differentiarum logarithmorum vaſis & aggregati ex vaſe & antlia. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

55. Dato igitur numero agitationum emboli, quibus in vaſe quodam dato ope antliæ datæ aer reſiduus reducitur ad rationem datam cum primitivo vel ex eodem prorſus educitur, inveniri poteſt numerus agitationum emboli, quibus ope alterius antliæ datæ in eodem vaſe aer reſiduus ad eandem rationem cum primitivo reducitur, vel ex eodem prorſus educitur.

PROBLEMA 5.

56. *Invenire pondus unius pedis cubici aërei.* Tab. I. Fig. 3.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Vaſis vitrei aut metallici BC ſatis capacis, figura ſphærica, collo oblongo AB & epiſtomio D præditi pondus ad bilancem exactam exploretur, dum aere ejusdem cum ambiente externo denſitatis repletur. Quo facto

2. edu-

2. educatur aer (§. 40) &
3. Globi evacuati pondus denuo ad bilancem examinetur, quod
4. a pondere priore ſubductum relinquit pondus aeris educti.
5. Inveſtigetur capacitas vaſis (§. 556. *Geom.*) & ratio aeris reſidui ad primitivum (§. 51): quibus datis, volumen aeris reſidui per regulam trium innoteſcet, a capacitate vaſis ſubducendum, ut relinquatur volumen aeris educti. Quodſi antlia accurate fuerit conſtructa & tamdiu exerceatur, quamdiu aer evacuatur; volumen aeris reſidui tantillum reperietur, ut tuto negligi ipſaque capacitas vaſis pro volumine aeris educti aſſumi poſſit.
6. Datis adeo pondere atque volumine aeris educti per regulam trium reperietur pondus unius pedis cubici aeris (§. 130. *Mechan.*).

SCHOLION.

57. *Methodo hac primum uſus* Otto de Guericke (o) *& poſt eum* Burcherus de Volder, *qui ſequentia annotavit* (p). *Pondus vaſis ſpharici vitrei aere admiſſo erat 7 libr. 1 Unc. 2 dr. 48 gr. aere educto, 7 libr. 1 Unc. 1 dr. 31 gr. aqua admiſſa 16 libr. 12 Unc. 7 dr. 14 gr. Erat igitur pondus aeris 1 dr. 12 gr. ſeu 77 gr. pondus aqua 9 libr. 11 Unc. 5 dr. 43 gr. ſeu 74743 gr. conſequenter ratio gravitatis ſpecifica inter aquam & aerem* 74743 : 77 = $970\frac{63}{77}$: 1. *Jam cum* Volderus *pedem cubicum aqua deprehendiſſet 64 librarum, inferendo ut 970 ad 1 ita 64 libra ſeu 1024 unc. ad numerum quartum proportionalem, per regulam trium pondus unius pedis cubici aerei $506\frac{70}{97}$ ſeu 507 gr. fere, hoc eſt 1 Unc. 0 dr. 27 gr. reperit. Teſtatur autem, ſe uſum eſſe bilance, qua, etiamſi vel 25 aut 30 libra utrique imponerentur lanci, grano uno alterove addito demtove, in hanc illamve partem manifeſte propenderet.*

PROBLEMA 6.

58. *Dato corporis cujuscunque volumine una cum pondere ejusdem in aere, invenire pondus ejusdem in vacuo.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Inveniatur pondus unius pedis cubici aeris (§. 54).
2. Per regulam trium ex eodem & volumine corporis dati inveſtigetur pondus aeris mole huic æqualis (§. 130. *Mech.*).
3. Pondus hoc aeris ſubtrahatur a pondere corporis dato; quod relinquitur erit pondus ejusdem in vacuo (§. 55. *Hydroſt.*) *Q. e. i. & d.*

E. gr.

(o) Experiment. de Vacuo lib. 3. c. 21. f. 101.
(p) in Quæſtionibus Academicis de aeris gravitate theſ. 52. p. 35, & ſeqq.

E. gr. Pondus unius pedis cubici aerei eſt 507 gr. (§. 55), pondus trium pedum cubicorum aquæ 210 librarum (§ 64. *Hydroſt.*) ſeu 209 libr. 15 unc. 7 drach. 60 gran. Pondus trium pedum cubicorum aeris reperitur 1521 gr. ſeu 3. unc. 1 dr. 21 gr. Pondus adie trium pedum cubicorum aquæ in vacuo 209 lib. 12 unc. 6 dr. 39 gr.

PROBLEMA 7.

59. *Data baſi columnæ atmoſphæricæ invenire pondus ejus.*

RESOLUTIO.

1. Baſis data multiplicetur per altitudinem columnæ aqueæ ipſi æquiponderantis (§. 28), ut habeatur volumen hujus columnæ (§. 539. 541).
2. Quæratur ad volumina unius pedis cubici & columnæ illius atque pondus unius pedis cubici aquæ numerus quartus proportionalis, qui erit pondus columnæ aqueæ atmoſphæricæ æquiponderantis (§. 130. *Mech.*), hoc eſt, pondus ipſius columnæ atmoſphæricæ quæſitum.

E. gr. Sit diameter circuli 100''', erit area 7850''' (§. 429. *Geom.*). Quia altitudo columnæ aqueæ 3100''' (§. 27); erit volumen ejus 24335'', conſequenter, cum 1000'' ſint 70 fere librarum (§. 64. *Hydroſt.*) pondus ejusdem $1703\frac{45}{100}$ ſeu $1703\frac{9}{20}$ librarum. Circulus itaque, cujus diameter unius pedis, ab aere eadem vi premitur, ac ſi pondus 1703 librarum incumberet.

COROLLARIUM.

60. Quodſi diameter ſphæræ fuerit unius pedis, baſis columnæ atmoſphæricæ incumbentis eſt circulus, cujus diameter unius pedis. Quare cum hemiſphærium inferius ab elatere aeris urgeatur, qui ponderi ejusdem columnæ æquatur (§. 31); hemiſphæria comprimuntur vi 3407 librarum.

THEOREMA 7.

61. *Diverſa plana premuntur ab aëre in ratione magnitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Preſſio enim eadem, quæ foret, ſi aqua ad altitudinem 31 pedum Rhenanorum in plana ſubjecta gravitaret (§. 28), conſequenter preſſiones diverſorum planorum ab aere factæ ſunt in ratione planorum iſtorum (§. 573. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

62. Quare ſi plana, quæ ab aere premuntur, fuerint circuli; in ratione duplicata diametrorum premuntur (§. 409. *Geom.*

COROLLARIUM 2.

63. Quoniam aer premit ſecundum lineas rectas ad horizontale planum perpendiculares (§. 215. *Mechan.*), ſuperficies quomodocunque convexa, vel concava, aut ex convexo, concavo & plano quo-

quomodocunque compoſita eadem premitur vi, qua premitur planum horizontale eidem ſubjectum, conſequenter preſſiones ſuperficierum quarumcunque ſunt ut plana horizontalia iisdem ſubjecta.

SCHOLION.

64. *In hypotheſi propoſitionis tacite ſupponitur ſitum planorum eſſe horizontalem: ex demonſtratione autem apparet theorema cum ſuis corollariis ad omnem preſſionem a fluido gravi factum extendi poſſe.*

CAPUT III.
DE
COMPRESSIONE AERIS.

PROBLEMA 8.

ab. 65. *Aerem intra vas comprimere.*

ig.

RESOLUTIO.

1. Epiſtomio IHG reſpectu vaſis clauſo, reſpectu antliæ vero aperto, embolus ex antlia pneumatica extrahatur: quo facto aer externus in cavitatem antliæ ruet (§. 36).
2. Converſo epiſtomio, ita ut communicatio inter vas & cylindrum detur, ſuperius vero in I obturato, embolus iterum detrudatur: aer ex antlia in vas expelletur, quod cum jam aere alio ſit plenum, novum intruſum recipere nequit, niſi facta utriusque compreſſione (§. 5.). Excipiet vero hoſpitio ſuo adventantem hunc hoſpitem, cum comprimi poſſit (§. 17).
3. Repetita igitur hac operatione, aer continuo magis magisque comprimitur. Q. e. f.

THEOREMA 8.

66. *Aer primitivus eſt ad aerem in vaſe ope antliæ pneumaticæ dato agitationum emboli numero compreſſum ut capacitas vaſis ad aggregatum ex capacitate vaſis & facto capacitatis antliæ in numerum agitationum emboli.*

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas antliæ $= a$, capacitas vaſis $= v$, numerus agitationum emboli $= n$. Erit aer primitivus in antlia ad aerem in vaſe ut a ad v (§. 17. *Hydroſt.*). Incrementum igitur maſſæ in vaſe, dato, nu-

numero agitationum emboli n eſt ut na, conſequenter aer compreſſus ut $na + v$. Unde compreſſus ad primitivum ut $na + v$ ad v. Q. e. d.

COROLLARIUM.

67. Data igitur capacitate antliæ 580 & capacitate vaſis 260, ſeu ratione illius ad hanc ut 2 ad 1, una cum numero agitationum emboli 3; reperitur ratio aeris compreſſi ad primitivum ut 6 + 1 ad 1 ſeu ut 7 ad 1.

PROBLEMA 9.

68. *Data ratione aeris primitivi ad compreſſum una cum ratione capacitatis antliæ ad capacitatem vaſis, invenire numerum agitationum emboli ad iſtam compreſſionem efficiendam requiſitarum.*

RESOLUTIO.

Sit ratio aeris primitivi ad compreſſum $= p : c$, ratio antliæ ad vas $= a : v$, numerus agitationum emboli $= x$, erit (§. 66).

$$p : c = v : ax + v$$

$$cv = pax + pv$$

$$(cv - pv) : pa = x$$

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compreſſo in capacitatem vaſis dividatur per factum ex aere primitivo in capacitatem antliæ; quotus eſt numerus agitationum emboli ad iſtam compreſſionem efficiendam requiſitarum. Sit e. gr. $p = 1$, $c = 7$, $v = 1$, $a = 2$; erit $x = 6 : 2 = 3$.

COROLLARIUM.

69. Quodſi fiat $p = v$, erit $x = (c - p) v : av = (c - p) : a$, hoc eſt, numerus agitationum emboli invenitur, ſi differentia aeris primitivi a compreſſo per capacitatem antliæ dividatur. Ita in noſtro exemplo $x = (7 - 1) : 2 = 3$.

PROBLEMA 10.

70. *Data capacitate vaſis, in quo aer comprimendus, una cum ratione, quam aer primitivus ad compreſſum habere debet, & numero agitationum emboli, quibus iſta compreſſio effici jubetur, invenire capacitatem antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit capacitas vaſis $= v$, aer primitivus $= p$, compreſſus $= c$, numerus agitationum emboli $= n$, capacitas antliæ $= x$, erit (§. 66).

$$p : c = v : nx + v$$

$$cv = pnx + pv$$

$$(cv - pv) : pn = x$$

Quodſi fiat $p = v$; erit $x = (c - p) : n$.

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compreſſo in capacitatem vaſis dividatur per factum ex aere primitivo in numerum agitationum emboli compreſſionem efficientium, quotus erit ca-

capacitas antliæ quæſita. Quodſi aer primitivus fuerit ut capacitas vaſis, ejus a compreſſo differentia tantum dividenda eſt per numerum agitationum emboli.

Sit e. gr. $v = 290$, $p : c = 1 : 7$, $n = 3$; erit $x = 6.\ 290 : 3 = 2.\ 290 = 580$.

COROLLARIUM.

71. Eſt ergo $pn : c - p = v : x$, hoc eſt, capacitas vaſis ad capacitatem antliæ eſt in ratione compoſita aeris primitivi ad ejus a compreſſo differentiam & numeri agitationum emboli, quibus iſta compreſſio efficitur, ad unitatem (§. 159. *Arithm.*).

PROBLEMA II.

72. *Invenire, utrum aer comprimatur in ratione ponderum, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur tubus recurvus ABC, cujus brachium minus EC ſit 12 circiter digitorum, majus AB 8 circiter pedum minori parallelum.
2. Brachium minus EC hermetice ſigilletur in C, majus in A ſit apertum: utrumque in particulas æquales dividatur.
3. Pars tubi BE Mercurio repleatur, ita ut CE ſit aere primitivo plenus.
4. Hinc ulterius per orificium A ſucceſſive plus Mercurii infundatur, notenturque altitudines, ad quas in utroque brachio Mercurius ſucceſſive infuſus pertingit.

Dico, ſi ſucceſſive fuerint ſpatia in brachio minore ſuper Mercurio reciproce ut differentiæ altitudinum, ad quas in brachio majore Mercurius ſucceſſive ſubſiſtit, 28 digitis auctarum, & altitudinum, ad quas in minore Mercurius aſcendit, aerem comprimit in ratione ponderum. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ab initio aer in brachio minore CE a pondere atmoſphærico comprimitur (§. 21), quod æquatur cylindro Mercuriali 28 digitos alto (§. 29). Quare cum cylindri æqualium baſium ſint ut altitudines (§. 573. *Geom.*); tum volumina aeris reducti ſunt ut altitudines ſpatiorum a Mercurio vacuorum in brachio minore EC, tum volumina Mercurii in brachio majore ſunt ut altitudines, ad quas Mercurius aſcendit. In aerem vero minori brachio incluſum præter pondus atmoſphæricum volumina Mercurii gravitant, quorum altitudo eſt differentia inter altitudines, ad quas in brachio minore, & altitudines, ad quas in majore ſucceſſive pertingit (§. 34. *Hydroſt.*).

droſt.). Quare pondera aerem incluſum comprimentia ſunt ut differentiæ altitudinum, ad quas ſucceſſive in brachio minore Mercurius aſcendit, ab altitudinibus, ad quas in majore ſucceſſive pertingit, 28 digitis auctæ (§. 18. *Hydroſt.*). Quodſi adeo volumina aeris ſucceſſive compreſſi in eadem ratione reciproca deprehendantur, aer omnino in ratione ponderum comprimitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

73. *Mariottus* (q) notavit, Mercurium in brachio majore AB 8 pedum ad altitudinem 18 digitorum aſcendentem in minore 12 digitorum ad 4 digitorum altitudinem ſubſtitiſſe. Aeris itaque volumen cum a ſolo pondere atmoſphærico premeretur, erat 12 digitorum; aſt cum aer premeretur a pondere atmoſphærico & a cylindro mercuriali 14 digitorum, hoc eſt, a pondere mercuriali 42 digitorum, erat volumen compreſſi 8 digitorum. Eſt vero 8 ad 12 ut 28 ad 42, nempe ut 2 ad 3. Similiter deprehendit, ſi in brachio minore Mercurius ad altitudinem 6 digitorum aſſurgat, altitudinem in majore eſſe 34. Volumen ergo aeris compreſſi eſt 6 digitorum, hoc eſt, ſubduplum ejus, quod habebat aer a ſolo pondere atmoſphærico preſſus. Aſt pondus premens eſt 28 + 28, hoc eſt, duplum ponderis atmoſphærici. Porro advertit, ſi altitudo Mercurii in brachio minore ſit 9 digitorum, altitudinem in majore eſſe 93. Eſt itaque volumen aeris compreſſi 3 digitorum, hoc eſt, ſubquadruplum ejus, quod habebat a ſolo pondere atmoſphærico compreſſus. Sed pondus premens eſt 84 + 28, hoc eſt, quadruplum ponderis atmoſphærici. Evidens ergo per experimentum *Mariotti*, volumina aeris compreſſi eſſe reciproce ut pondera comprimentia.

SCHOLION 1.

74. *Idem experimentum ſuccedit, ſi diameter brachii minoris* CE *multo major fuerit diametro minoris* AB (§. 34. Hydroſt.): *curandum tamen, ut amplitudo illius ſit uniformis, cum in demonſtratione ſupponamus, partes quaslibet tubi* CE *eſſe cylindros æqualium baſium.*

SCHOLION 2.

75. *Probe autem notandum eſt, præter pondera comprimentia in voluminibus aeris, quæ inter ſe comparantur, cætera omnia paria eſſe debere, cavendumque, ne eandem compreſſionis legem ad diverſa aeris volumina applicemus, in quibus præter pondera comprimentia aliorum quoque aerem alterantium datur diſparitas: quoniam hoc in caſu fieri poteſt, ut elateris in duobus voluminibus æqualibus atque ejusdem denſitatis vires ſint inæquales, adeoque & pondera compreſſionem aeris in utroque efficientia ſint inæqualia* (553. Mechan.), *conſequenter & duo volumina aeris æqualia*

(q) Eſſay de la Nature de l' Air p. 17. & ſeqq. ſ. Operum in Batavia recuſorum Tom. I. p. 153.

ab iiſdem ponderibus inæqualiter comprimantur. E. gr. *Ponamus duo volumina aerea, in quibus ab initio cætera omnia paria; evidens eſt, quod paria pondera ſuſtentare debeant. Ponamus porro alterum volumen actioni caloris exponi: rareſiet igitur* (§. 23) *adeoque pondus premens propellet. Ut itaque aer ad priſtinum volumen reducatur, majus imponendum erit pondus, quam quod dilatato incumbit. Ecce tibi duo volumina aeris inter ſe æqualia, cumque ab initio eandem denſitatem habuerint*, per hypoth. *ejusdem denſitatis, quæ tamen inæqualia pondera comprimentia ſuſtinent.*

SCHOLION 3.

76. *Vana vero eſt objectio, quod admiſſa hac compreſſionis lege ſequatur, aerem eo usque comprimi poſſe, ut ſpatium occupet infinite parvum ejus reſpectu, quod ante compreſſionem obtinuerat, pondere ſcilicet in infinitum aucto. Nam ubi ad ſummum compreſſionis gradum pertingit, ponderi quantocunque prementi reſiſtit, conſequenter vi reſiſtendi infinita æquipollet. Nec ideo vis elaſtica aëris in ſtatu ſummæ compreſſionis viribus infinite variis æquatur* (§. 553. Mechan.); *ſed minimæ earum, a quibus maxima compreſſio proficiſci valet. Eſt enim vis minor pars majoris* (§. 20. Arithm.). *Quamobrem ſi vis elaſtica aeris in ſtatu ſummæ compreſſionis & vi minori, & majori æqualis eſſet; pars toti æqualis foret: id quod abſurdum* (§. 84. Arithm.). *Cum adeo vis elaſtica in ſtatu ſummæ compreſſionis infinita non ſit, explicandum eſt, quomodo vi reſiſtendi infinitæ æquipolleat. Scilicet ſi majus pondus aeri incumbere ſupponamus, quam ad ſummam compreſſionem efficiendam ſufficit; exceſſus ponderis non amplius ad comprimendum aerem, ſed ad compreſſum loco pellendum impenditur. Ut igitur non expellatur, corpora aerem compreſſum ambientia vi reſiſtendi prædita eſſe debent, quæ toti ponderi incumbenti æquatur. Utut enim pondus incumbens non omnem vim, qua premit, ad aerem compreſſum expellendum adhibeat; corpora tamen motum impedientia & vi elaſtica aeris impreſſi & vi eidem impreſſa urgentur, quæ ſimul ſumta vim ponderis prementis adæquant.*

SCHOLION 4.

77. *Idem experimentum cum ſucceſſu repetierunt* Robertus Boyle (r) & Amonton (s); *hicque in voluminibus aeris majoribus.*

THEOREMA 9.

78. *Elater aeris compreſſi eſt ad elaterem dilatati uti reciproce volumen dilatati ad volumen compreſſi.*

DEMONSTRATIO.

Elater aeris magis compreſſi eſt ad elaterem minus compreſſi ut pondus iſti incumbens ad pondus huic impoſitum (§. 553. *Mechan.*).

 Enim-

(r) in defenſione doctrinæ de elatere & gravitate aeris contra Linum part. 2. c. 5. p. m. 42. & ſeqq.

(s) Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1705. p. m. 155. & ſeqq.

Enimvero in ratione horum ponderum eſt quoque reciproce volumen aeris minus compreſſi ad volumen aeris magis compreſſi (§. 71). Ergo & elater magis compreſſi eſt ad elaterem minus compreſſi ſeu dilatati uti reciproce volumen dilatati ad volumen compreſſi (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

79. Elater igitur aeris magis compreſſi fortior eſt, quam elater minus compreſſi.

THEOREMA 10.

80. *Elater aeris magis compreſſi eſt ad elaterem minus compreſſi, cæteris paribus, ut maſſa aeris magis compreſſi ad maſſam aeris minus compreſſi ſub eodem volumine contenti.*

DEMONSTRATIO.

Si aer comprimitur in ſpatium ſubduplum, ſubtriplum, ſubquadruplum &c. erit aeris primitivi duplus, triplus, quadruplus &c. in ſpatio ſimplici. Aſt in ſpatium ſubduplum a duplo; in ſubtriplum a triplo; in ſubquadruplum a quadruplo &c. pondere comprimitur (§. 71). Ergo in æqualibus voluminibus maſſæ aeris diverſimode compreſſi in ratione ponderum comprimentium exiſtunt, conſequenter cum in eadem ratione ſit elater aeris magis & minus compreſſi (§. 553. *Mech.*); elater aeris magis compreſſi ad elaterem minus compreſſi eſt ut maſſa illius ad maſſam hujus ſub æquali volumine (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 12.

81. *Data ratione voluminis, quod replet aer a ſolo pondere atmoſphærico preſſus, ad ſpatium, in quod redigitur ulterius compreſſus, determinare vim elaſticam compreſſi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aeris a ſolo pondere atmoſphærico preſſi æquetur ponderi columnæ mercurialis eandem cum volumine aeris baſin, ſed altitudinem 28 digitorum habentis (§. 29); ſi ad volumen compreſſi, volumen nondum compreſſi & pondus iſtius columnæ mercurialis quæratur numerus quartus proportionalis, deſignabit is quantitatem vis elaſticæ in aere compreſſo (§. 78).

COROLLARIUM.

82. Quodſi pondus columnæ mercurialis iſtius a quantitate vis elaſticæ inventa ſubducatur; relinquitur vis elateris, qua reſiſtentiam ponderis atmoſphærici ſuperat.

PRO-

PROBLEMA 13.

83. *Dato effectu, quem producit aer a ſolo pondere atmoſphærico preſſus, aut in certo compreſſionis gradu, invenire effectum, quem producturus eſt in alio quocunque compreſſionis gradu.*

RESOLUTIO.

Cum effectus ſint viribus productricibus proportionales (§. 530 *Mechan.*), vires vero productrices in noſtro caſu ſint reciproce ut volumina in diverſis compreſſionis gradibus (§. 78); ſi effectus, quem elater aeris in certo compreſſionis gradu producit, detur, effectus in alio quocunque producendus invenietur inferendo: ut volumen aëris magis compreſſi ad volumen minus compreſſi ita effectus ab hoc producendus ad effectum illius.

SCHOLION.

84. *Idem problema quoque ſolvitur per analogiam theor.* 12. (§. 80).

PROBLEMA 14.

85. *Dato effectu, quem producit aer a ſolo pondere atmoſphærico preſſus, determinare alium compreſſionis gradum, in quo idem producat intra atmoſphæram effectum quemcunque majorem datum.*

RESOLUTIO.

Sit effectus minor $= a$, major $= b$, volumen aëris minus compreſſi $= c$, volumen magis compreſſi $= x$. Cum alter effectus intra atmoſphæram reſiſtentem ſit producendus & integer tamen deſideretur, quærenda erit compreſſio, quæ in vacuo effectum produceret æqualem aggregato ex effectu deſiderato & effectu, quem aer a ſolo pondere atmoſphærico preſſus in vacuo produceret. Erit adeo effectus ab aere compreſſo producendus $= a + b$, conſequenter $a + b : a = c : x$, hoc eſt, ut aggregatum ex effectu aeris a ſolo pondere atmoſphærico preſſi & effectu ab aere in quæſito compreſſionis gradu intra atmoſphæram producendo ad effectum aeris a ſolo pondere atmoſphærico preſſi, ita volumen aeris a ſolo pondere atmoſphærico preſſi ad volumen aeris in quæſito compreſſionis gradu (§. 78): quod adeo per regulam trium invenitur.

SCHOLION.

86. *Eodem modo problema reſolvitur ope theorematis* 12. (§. 80).

CA-

CAPUT IV.
DE ÆQUILIBRIO AERIS CUM ALIIS FLUIDIS SPECIFICE GRAVIORIBUS.

DEFINITIO 9.

Tab. I. Fig. 5. 87. Per *Tubum Torricellianum* intelligo tubum vitreum AB Mercurio repletum, cujus oſculum ſuperius A hermetice ſigillatum, inferius B ſtagnanti in vaſculo CD Mercurio immerſum.

SCHOLION.

88. *Vocatur iſtiusmodi tubus* Torricellianus *ab inventore* Torricello (§. 29).

DEFINITIO 10.

89. *Barometrum* eſt inſtrumentum, quo gravitatem aeris metiri licet. *Baroſcopium* vero eſt inſtrumentum, quod variationes gravitatis aeris confuſe indicat.

SCHOLION.

90. *Vulgo pro ſynonymis habent has voces: ſed mihi e re eſſe videtur eas diſtinguere, cum aliud utique ſit ſaltem cognoſcere, aerem hoc tempore eſſe graviorem, quam altero; aliud vero ſcire, quoties gravitas atmoſphæræ hac die ſuperet gravitatem illius anteriorem: poſterius vero conſtare debet, ſi gravitatem aeris metiaris* (§. 21. Geom.).

THEOREMA 11.

91. *In tubo Torricelliano major columna Mercurii ſuſpenditur in locis profundioribus, quam in altioribus.*

DEMONSTRATIO.

Columna Mercurii ſuſpenſa æquatur columnæ aereæ, cujus eadem cum iſta baſis, ſed altitudo a ſuperficie Mercurii in vaſculo ſtagnantis usque ad extremitasem atmoſphæræ exporrigitur (§. 36. *Hydroſt.*). In locis vero altioribus columnæ aereæ altitudo minor, quam in profundioribus adeoque & ipſa columna in his gravior, quam in iſtis, conſequenter minor columna Mercurii columnæ aereæ in locis altioribus æquiponderat, quam in profundioribus. *Q. e. d.*

SCHOLION.

92. *Veritatem hujus theorematis experientia confirmarunt plurimi. Primus de eo cogitavit* Paſcalius, *qui phænome-*

nomena tubi Torricelliani maxima cum ſolertia ſcrutatus eſt in Tractatu de aquilibrio liquorum.

THEOREMA 12.

93. *Si in tubo Torricelliano aeris quædam quantitas ſuper Mercuria, & iu genere in vaſe quocunque, cujus orificium apertum fluido immerſum ſuper fluido relinquatur; Mercurius vel fluidum quodcunque alterum ad minorem altitudinem ſuſpenditur, quam ſi vacuus fuerit, & pondus fluidi ſuſpenſi æquatur differentiæ elateris aëris incluſi a pondere atmoſphærico.*

DEMONSTRATIO.

Cum ab initio aeris incluſi elater ſolus ponderi atmoſphærico æquetur (§. 33); Mercurius vi gravitatis propriæ deſcendere incipit. Aſt dum deſcendit, aer incluſus dilatatur (§. 36) adeoque elater ejus minori, quam ponderi atmoſphærico æquilibratur (§. 79). Tantum igitur Mercurii aut fluidi cujuscunque alterius in tubo vel vaſe remanere debet, quantum differentiæ elateris aeris incluſi a pondere atmoſphærico æquilibratur, conſequenter Mercurius ad minorem altitudinem ſuſpenditur, quam ſi tubus ab aere vacuus extitiſſet. Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

94. Aer igitur in tubo Torricelliano incluſus rarior ambiente externo & ejus elater æquatur differentiæ ponderis Mercurii ſuſpenſi a pondere atmoſphærico (§. 36 *Hydroſt.*).

COROLLARIUM 2.

95. Hinc liquet, ſi vas exiguo orificio inſtructum, nec aqua aut alterius generis liquore prorſus plenum, digito ad orificium applicato, ita invertatur, ut orificium ſit horizontale; cur remoto digito ab initio quædam liquoris gutta effluat, reliquus vero intus remaneat: item cur idem eveniat in vaſe quocunque alio quantumvis amplo, ſi orificio folium chartaceum imponas, dum illud invertis.

PROBLEMA 16.

96. *Data ratione altitudinis fluidi in tubo ab omni aëre prorſus vacuo ad altitudinem, qua gaudet, ſi tubi aliqua pars aëre repleatur, una cum volumine aëris dilatati, invenire volumen aëris primitivi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aëris primitivi æquetur ponderi fluidi in tubo vacuo ſuſpenſi (§. 33), adeoque elater dilatati differentiæ ponderis fluidi ſuſpenſi a pondere atmoſphærico (§. 94), pondera vero fluidi ſint ut volumina (§. 130. *Mechan.*), volumina ut altitudines (§. 573. *Geom.*); erit ut altitudo fluidi in tubo

tubo vacuo ad differentiam altitudinis in tubo non vacuo a priore, ita volumen aeris dilatati ad volumen primitivi (§. 78): quod adeo per regulam trium invenitur. Q. e. d.

E. gr. Sit altitudo fluidi in tubo vacuo 28, in tubo non vacuo 14, volumen aeris dilatati 25, erit volumen primitivi (28 − 14) 25 : 28 = 350 : 28 = $12\frac{1}{2}$. Quæ prorſus conſona ſunt experimento *Mariotti* (t).

PROBLEMA 17.

97. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo & ratione voluminis aeris primitivi ad volumen dilatati, invenire altitudinem ejusdem fluidi in tubo non vacuo.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= a$, altitudo in non vacuo $= x$, volumen aëris primitivi $= b$, dilatati $= c$, erit (§. 96).

$$a : a - x = c : b$$

$$x : a = c - b : c \text{ (§. 193. Arith.)}.$$

Inveniri adeo debet numerus quartus proportionalis ad volumen aëris dilatati, differentiam voluminis primitivi a volumine dilatati & altitudinem in tubo vacuo.

Sit e. gr. $a = 28$, $b = 12\frac{1}{2}$, $c = 25$; erit $x = (25 - 12\frac{1}{2})\ 28 : 25 = 350 : 28 = 14$.

PROBLEMA 18.

98. *Datis altitudine fluidi in tubo vacuo & volumine aeris primitivi, invenire volumen dilatati & altitudinem fluidi in tubo non vacuo datæ altitudinis.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, altitudo tubi ultra libellam fluidi in vaſe ſtagnantis $= a$, altitudo voluminis aëris primitivi $= b$, dilatati $= x$, erit altitudo fluidi in tubo non vacuo $= a - x$, conſequenter

$$m : m - a + x = x : b \text{ (§. 96).}$$

$$bm = mx - ax + x^2$$

hoc eſt, ſi fiat $a - m = d$

$$bm = x^2 - dx$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 \quad \tfrac{1}{4}d^2$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 + bm = x^2 - dx + \tfrac{1}{4}d^2$$

Ergo $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bm)} = x$.

Regula. 1. Quadrato ſemidifferentiæ altitudinis fluidi in tubo vacuo ab altitudine tubi ultra libellam fluidi in vaſe ſtagnantis addatur factum ex eadem altitudine fluidi in altitudinem voluminis aeris primitivi. 2. Ex facto extrahatur radix quadrata, & 3. huic adda-

(t) Eſſay de la nature de l' air p. 23. & ſeqq.

addatur ſemidifferentia paulo ante memorata. Erit aggregatum altitudo voluminis aeris dilatati. E. gr. ſit $a = 29$, $m = 28$, erit $d = 11$, $\frac{1}{2}d = 5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}dd = \frac{121}{4}$. Sit $b = 12\frac{1}{2}$, erit $bm = 350$, adeoque $\frac{1}{4}dd + bm = \frac{121}{4} + 350 = \frac{1521}{4}$, a conſequenter $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + bm)} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2}$: unde $x = 5\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 25$.

PROBLEMA 19.

99. ***Data altitudine fluidi in tubo vacuo, altitudine tubi ultra libellam fluidi in vaſculo ſtagnantis & altitudine fluidi in tubo non vacuo, invenire altitudinem voluminis aëris primitivi.***

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, in tubo non vacuo $= n$, altitudo tubi $= a$, altitudo aëris primitivi $= x$, erit altitudo dilatati $= a - n$, conſequenter (§. 96)

$$m : m - n = a - n : x$$

Invenietur adeo x, quærendo ad altitudinem fluidi in tubo vacuo, differentiam altitudinis in non vacuo a priore & differentiam altitudinis fluidi in tubo non vacuo ab integra altitudine tubi numerum quartum proportionalem.

Sit e. gr. $m = 28$, $n = 14$, $a = 39$, erit $x = (39 - 14)\ (28 - 14) : 28 = (25 . 14) : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

PROBLEMA 20.

100. ***Determinare quantitatem liquoris effluentis, ſi vas exigui orificii non plenum invertatur.***

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vaſe vacuo ab aëre ſuſtentatur (§. 36. *Hydroſt.*).
2. Quoniam porro datur altitudo fluidi in vaſe atque altitudo totius vaſis *per hypoth.* reperietur volumen aëris dilatati (§. 98). Unde ſi
3. Subducatur volumen aëris primitivi, relinquetur quantitas liquoris expellendi, ſi vas invertatur (§. 95).

THEOREMA 13.

101. ***Si vaſis ab aëre prorſus evacuati, cujus altitudo non excedit altitudinem columnæ liquoris atmoſphæræ æquiponderantis, orificium intra aquam aut alterius generis fluidum demergatur, demerſumque aperiatur, liquor aſcendens totum replebit: aſt ſi non prorſus evacuatum fuerit, minus ſpatium liquor aſcendens occupabit, quam aëris primitivi educti quantitas repleverat.***

DEMONSTRATIO.

Cum enim liquor undiquaque circa orificium vaſis demerſum a pondere atmoſphæræ prematur (§. 21), ſub orificio autem vaſis

aperto nulla ſit aëris preſſura, quia ab aëre prorſus vacuum ſupponitur; tantum liquoris intra vas aſcendere debet, quantum ſufficit ad preſſuram ei æqualem efficiendam, quæ a pondere atmoſphærico efficitur (*§. 35. Mechan.*). Sed vaſis altitudo liquoris atmoſphæræ æquiponderantis altitudinem non excedit, *per hypoth.* Ergo preſſura æqualis preſuræ ponderis atmoſphærici a liquore intra vas contento effici nequit, niſi totum repleatur. Totum ergo replebitur. *Quod erat unum.*

Quodſi quædam aëris portio reſidua fuerit, ea ſuper liquore ingrediente conſtituta rarior ſit neceſſe eſt quam aer primitivus (§. 49). Majus ergo ſpatium occupat, quam cum primitivo adhuc jungeretur (*§. 10. Hydroſt.*). Quoniam adeo nonniſi ſpatium reliquum a liquore occupatur, evidens eſt, liquorem aſcendentem minus ſpatium vaſis replere, quam aeris primitivi educti quantitas repleverat. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

102. Schottus *autor eſt* (u), *cum Herbipoli experimentum ſæpius iteraretur, rem nunquam eo adduci potuiſſe, ut etiam minore vaſe adhibito omnem excluderent aërem. Equidem cum aqua in vas irrumpens ſpumeſcat, ipſe id indicium irruentis aeris pronunciat, ignarus unde adveniat aut oriatur; alii rectius ab expanſione aeris intra aquam latentis idem phænomenon deducunt, atque hinc aeris ſuper liquore conſtituti originem derivant. Enimvero quemadmodum forte negari nequit, quod hac ratione aer in vaſe reſiduus aliquod capiat incrementum, ita rationi conſentaneum videtur, non omnem aerem ope antliæ ex vaſis educi, quia aer ad ſummum expanſionis gradum perductus non amplius evacuatur, moleculis paucis diſperſis ætheri ſubtiliori & leviori innatantibus, quemadmodum maſſulæ metallicæ in fluidis ſpecifice levioribus natare ſolent, ut taceam maſſulas aereas, quæ ab eminentiis in ſuperficie vitri non ſecus ac aliorum fluidorum guttulæ fulciuntur. Sæpius tamen diverſo tempore diverſis quoque vaſis repetito experimento didici, perexiguum eſſe aeris, quod ſuper liquore conſtitutum deprehenditur, vaſe ſumma cum diligentia evacuato.*

PROBLEMA 21.

103. *Data altitudine vaſis evacuati & altitudine liquoris in ipſum ingreſſi, invenire volumen aeris primitivi educti.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vaſe vacuo ab aere ſuſtentatur (*§. 36. Hydroſt.*)

2. Quo-

(u) in Techn. curioſa lib. 1. c. 3. p. 14.

2. Quoniam porro datur altitudo vaſis evacuati & altitudo liquoris ipſum ingreſſi, invenietur volumen aeris primitivi (§. 99).

COROLLARIUM.

104. Quodſi quantitas aeris educti quæratur per probl. præſ. eademque adhuc alia ratione inveniatur (§. 51), atque eadem utrobique reperiatur; certum id erit indicium, nihil aeris ex aqua irruente in ſummitatem vaſis aſcendiſſe.

SCHOLION.

105. *Dubito tamen, num hæ ſubtilitates in praxi ſatis diſcerni queant.*

PROBLEMA 22.

Tab. I. Fig. 106. *Si vas quoddam* ABCD *aperto orificio* CD *ſub aqua aut alio liquore perpendiculariter demergatur, quo profundius mergitur, eo magis aer in eodem comprimitur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aer aqua aliisque fluidis levior exiſtat (§. 55); ſi vas AB CD perpendiculariter demergitur, ex eodem egredi nequit, quia in aqua deſcendere deberet, quod fieri nequit (§. 99. *Hydroſt.* Jam elater aeris incluſi aquam ſubjectam eadem vi premit, qua pondus atmoſphæricum (§. 33), aqua vero in eadem libella circa orificium vaſis præter pondus atmoſphæricum etiam aqua ſuper ea in vaſe ſtagnante premitur. Magis ergo premitur circa orificium vaſis CD, quam ſub eodem, conſequenter cum aer intra vas adhuc compreſſibilis exiſtat (§. 17) & in ratione ponderum compreſſionem patiatur (§. 73); aliqua liquoris quantitas intra vas aſcendere debet, eoque major quo profundius mergitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

107. *Veritatem theorematis experientia confirmat. Inprimis huc pertinent phœnomena campanæ urinatoriæ a* Sturmio (x) *enarrata & experimento illuſtrata.*

THEOREMA 14.

108. *Iisdem poſitis, quæ in propoſitione præcedente, elater aeris in vaſe* ABCD *compreſſi, una cum pondere liquoris in ipſum ingreſſi æquatur aggregato ex pondere atmoſphæræ & pondere columnæ ejusdem fluidi, quæ eandem cum fluido ultra libellam orificii* CD *in vaſe* FG *ſtagnante altitudinem habet.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Aer in vaſe ABCD adhuc compreſſibilis exiſtit (§. 17): tamdiu ita-

(x) Colleg. Curioſ. part. 1. Tent. 1. & ſeqq.

taque vi prementi cedit, donec eadem in fluidum ſub orificio CD preſſura efficiatur, quam circumcirca efficit aggregatum ex pondere atmoſphærico & columna fluidi eandem cum vaſe baſin eandemque cum fluido ultra libellam orificii vaſis CD in vaſe FG ſtagnante altitudinem habente (§. 75. *Mechan.*). Sed preſſura in aquam ſub orificio CD fit ab elatere aeris in vaſe ABCD compreſſi & pondere fluidi intrantis (§. 34 & 10). Quare elater aeris in vaſe ABCD compreſſi una cum pondere fluidi intrantis æquatur &c. *Q. e. d.*

PROBLEMA 23.

Tab. I. Fig. 6. 109. *Data gravitate fluidi ultra libellam orificii vaſis* CD *conſiſtentis una cum volumine ejus & volumine aeris primitivi cavitatem vaſis* ABCD *implentis, invenire volumen aeris compreſſi & fluidi in vas intrantis.*

RESOLUTIO.

Sit gravitas fludi $= g$, ejus volumen $= c$, pondus atmoſphærici cum $= a$, volumen aeris primitivi $= b$, volumen fluidi in vas aſcendentis $= x$, erit volumen compreſſi $= b - x$. Jam cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmoſphærico (§. 33), reperietur elater aeris compreſſi $= ab:(b - x)$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum ſunt ut volumina (§. 130. *Mechan.*); reperietur gravitas fluidi in vas aſcendentis $= gx : c$. Habemus ergo

$$ab:(b-x) + gx:c = g + a \text{ (§. 108).}$$

$$abc + bgx - gx^2 = bgc + abc - gcx - acx$$

$$x^2 - bx - cx - acx:g = -bc$$

hoc eſt; ſi fiat $b + c + ac:g = d$

$$x^2 - dx = - bc,$$
$$\tfrac{1}{4}dd \quad \tfrac{1}{4}dd$$

$$x^2 - dx + \tfrac{1}{4}dd = \tfrac{1}{4}dd - bc$$

$$\tfrac{1}{2}d - x = V(\tfrac{1}{4}dd - bc)$$

$$x = \tfrac{1}{2}d - V(\tfrac{1}{4}dd - bc)$$

Regula. 1. Aggregato ex volumine aeris primitivi & volumine fluidi ſuper libellam orificii vaſis ſtagnantis addatur numerus quartus proportionalis ad gravitatem hujus fluidi, pondus atmoſphæricum & volumen ejusdem fluidi. 2. Ab hujus novæ ſemiſummæ quadrato ſubtrahatur factum ex volumine aeris primitivi in volumen fluidi ultra libellam orificii vaſis ſtagnantis. 3. Ex reſiduo extrahatur radix quadrata, quæ ſi a ſemiſumma ſupra inventa ſubtrahatur, relinquetur volumen fluidi in vas aſcendentis.

COROLLARIUM I.

110. Cum pondus liquoris vas intran-

trantis ſit $gx : c$; idem ſubſtituto valore ipſius x, reperitur $= (\frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}dd - bc)})g : c$.

COROLLARIUM 2.

111. Et quia elater aeris in vaſe compreſſi eſt $ab : (b - x)$, idem ſubſtituto valore ipſius x, reperitur $= ab : (b - \frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}dd - bc)})$.

PROBLEMA 24.

112. *Data profunditate vaſis ſeu altitudine aeris primitivi in ejus cavitate coutenti, invenire profunditatem, ad quam intra fluidum datæ gravitatis orificium* CD *deprimendum, ut volumen aeris compreſſi habeat ad volumen aeris primitivi rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo voluminis aeris primitivi $= b$, pondus atmoſphæricum $= a$, gravitas fluidi $= g$, ejus altitudo ſuper libella orificii $= x$, altitudo aeris compreſſi $= c$, erit altitudo liquoris vas intrantis $= b - c$. Cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmoſphærico (§. 33); reperietur elater compreſſi $= ab : c$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum ſunt ut volumina (§. 133 *Mechan.*), erit gravitas fluidi in vas aſcendentis $= (bg - gc) : x$. Ergo

$$ab : c + (bg - gc) : x = a + g$$

$$abx + bgc - gc^2 = acx + gcx$$

$$bgc - gc^2 = acx + gcx - abx$$

$$(bgc - gc^2) : (ac + gc - ab) = x$$

Theorema. Ut differentia facti ex pondere atmoſphærico in altitudinem aeris primitivi a facto ex aggregato ponderis atmoſphærici & gravitatis fluidi in altitudinem aeris compreſſi ad gravitatem fluidi, ita differentia quadrati altitudinis aeris compreſſi a facto ex eadem in altitudinem primitivi ad profunditatem orificii CD vaſis ſub fuido demerſi.

SCHOLION.

113. *Hactenus ſuppoſuimus, aerem, dum comprimitur, cum ambiente externo cætera paria habere. Enimvero quando aqua frigidior aere ambiente, uer in vaſe condenſatur* (§. 24). *Diſpiciendum itaque, quamnam mutationem frigus inducat.*

PROBLEMA 25.

114. *Datis capacitate vaſis, hoc eſt, volumine aeris primitivi, volumine fluidi demerſum ingreſſi & volumine fluidi ſupra orificii vaſis libellum ſtagnantis, unu cum pondere atmoſphærico, invenire rationem voluminis aeris compreſſi tantum ad volumen compreſſi & condenſati ſimul.*

RE-

RESOLUTIO.

Ex datis inveniri poteſt volumen aeris compreſſi (§. 105) &, ſi volumen fluidi vas ingreſſi a volumine aeris primitivi ſubducitur, manifeſtum eſt, relinqui volumen aeris compreſſi & condenſati ſimul. Cum igitur in numeris habeatur tam volumen aeris compreſſi tantum, quam volumen aeris & compreſſi & condenſati, illius ad hoc ratio latere nequit, *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

115. Quodſi volumen aeris compreſſi & condenſati ſubtrahatur ex volumine aeris compreſſi tantum, relinquetur pars voluminis, quæ condenſationem metitur.

COROLLARIUM 2.

116. Quodſi contingat, hanc differentiam eſſe nullam; vel aer ambiens non erit calidior aqua, vel aer compreſſus ab iſto frigoris gradu nullam patiatur neceſſe eſt condenſationem.

COROLLARIUM 3.

117. Quodſi differentia aliqua prodeat, evidens eſt, aerem compreſſum adhuc condenſatum & ſpatium a compreſſo in condenſatione derelictum a fluido aſcendente repletum fuiſſe. Elater igitur aeris compreſſi facta condenſatione decrevit & hoc decrementum æquatur ponderi fluidi in ſpatio derelicto contenti (§. 93).

SCHOLION 1.

118. *Suppoſuimus in hactenus demonſtratis propoſitionibus vaſa eſſe cylindrica vel priſmatica: alias enim prolixiori ſubinde opus fuiſſet calculo.*

SCHOLION 2.

119. *Nec difficulter intelligitur, quæ in problemate præſente de aere condenſato demonſtrata ſunt, ad rarefactum quoque transferri poſſe, ſi vas in fluido calidiore, quam aer ambiens, demergatur.*

THEOREMA 15.

120. *Si pondus atmoſphæræ minuitur, Mercurius in tubo Torricelliano deſcendere; ſi illud augetur, hic aſcendere debet.*

DEMONSTRATIO.

Etenim columna Mercurialis intra tubum Torricellianum ſuſpenſa æquatur ponderi atmoſphærico (§. 29). Quare ſi pondus atmoſphæræ minuitur, Mercurius fortius deorſum nititur, quam pondus atmoſphæræ reſiſtit. Tanta igitur ejus portio ex tubo effluere debet, quanta differentiæ ponderis columnæ Mercurialis & ponderis atmoſphærici æquatur (§. 73. *Mechan.*). Quare ſi volumen Mercurii minuitur, in tubo utique deſcendere debet. *Quod erat unum.*

Similiter demonſtratur, ponde-

re atmoſphærico aucto, Mercurium in tubo Torricelliano aſcendere debere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

121. Cum altitudo Mercurii in tubo Torricelliano quotidie variet, experientia teſte; aeris quoque gravitas quotidie varietur opus eſt.

SCHOLION 1.

122. *Mathematici Pariſienſes maximam Mercurii altitudinem* $28''\ 4'''$, *minimam* $26''\ 4'''$ *obſervarunt, at adeo omnis variatio intra* $2''$ *ſeu* $24'''$ *pedis Pariſini comprehendatur. A.* 1711. *d.* 23. *Dec. apud nos flante Coro & cœlo nubilo altitudo maxima fuit* $30''\frac{3}{8}$ *pedis Londinenſis, d.* 21. *Octobr. h.* 7. *mat. minima vix exceſſit* 28 *digitos pedis Londinenſis, flante Zephyro & tempeſtate pluviali, cum nocte præcedente procella ſæviiſſet. Nec memini, me intra quinquennium, ex quo tales obſervationes annotavi, unquam majorem vel etiam minorem altitudinem Mercurii deprehendiſſe. Tota igitur variationis ſcala non excedit* $2\frac{3}{8}$ *digitos pedis Londinenſis, qui cum deficiat a Pariſino* $\frac{9}{144}$ (§. 26 Geom); *obſervationes noſtræ cum Pariſinis ſatis conſpirant,*

SCHOLION 2.

123. *Equidem celeberrimus* Hallejus (y) *cum globum vitreum collo tenui inſtructum & Mercurio plenum aqua ad ignem ebullienti immitteret, volumen ejus* $\frac{1}{74}$ *ſui creſcere obſervavit, atque adeo hinc conſtat, Mercurium rareſieri iterumque condenſari* (§. 6. 8). *Quoniam tamen incrementa & decrementa Mercurii calori atque frigori proportionalia non ſunt, nec caloris mutationibus ullatenus obtemperant, immo maxima plerumque hieme obſervantur* (§. 122); *variationes ejus a calore ac frigore minime pendent.*

THEOREMA 16.

124. *Si tubus recurvus* ABC *in* A *hermetice ſigillatus, in* C *vero apertus ut Torricellianus Mercurio repletur, erit variatio altitudinis Mercurii in crure longiore* AB *ob variatum pondus atmoſphæræ ſubdupla variationis altitudinis Mercurii in tubo Torricelliano ex eadem cauſa contingentis.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Altitudo enim Mercurii in brachio majore atmoſphæræ æquiponderantis ſemper computanda eſt a ſuperficie Mercurii in crure minore BC ſtagnantis (§. 34. 36. *Hydroſt.*). Ponamus jam Mercurium in crure minore CB conſiſtere ad E, in majore AB ad D, ſitque HD = $26''$. Aucta atmoſphæræ gravitate, Mercurius aſcendat ex D in F (§. 120): tum ex E deſcen-

(y) Philoſ. Tranſact. n. 197. p. 650.

det in G, eritque ſuppoſitis tuborum CB & BA diametris æqualibus EG = DF. Ponamus eſſe EG = 1'', erit IF = 28''. Quare ſi in tubo Torricelliano Mercurius aſcendit per 2, in tubo recurvo nonniſi ex D in F, hoc eſt per 1'', aſcendit. Eſt ergo variatio altitudinis Mercurii ob mutatum pondus atmoſphæricum in iſtiusmodi tubo recurvo contingens ſubdupla variationis altitudinis Mercurii ex eadem cauſa in tubo Torricelliano contingentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

125. Quia vaſculum, cui tubus Torricellianus immittitur, cruri breviori reſpondet; evidens eſt, illud tam amplum eſſe debere, ut Mercurius ex tubo per integram ſcalam delapſus altitudinem in vaſculo ſtagnantis non ſenſibiliter augeat, e. gr. non niſi dimidia lineola. Ita enim Mercurius in tubo per unam lineam aſcenſurus propter hoc impedimentum nonniſi per lineam parte ſui quadrageſima octava mulctatam ($1''' - \frac{1}{48}$) aſcendet (§. 122): quæ differentiola vix notabilis.

COROLLARIUM 2.

126. Cum ſcala integra, per quam Mercurius in tubo Torricelliano vaſculo ſatis amplo aſcendere ac deſcendere ſolet, vix 24 lineas adæquet (§. 122); in tubo recurvo eadem erit non niſi 12 linearum ſeu digiti unius.

PROBLEMA 26.

127. *Data integra ſcala, per quam aſcendit & deſcendit Mercurius in tubo Torricelliano, una cum diametro tubi, invenire diametrum vaſculi, in quo ſi tubus contineatur, Mercurius ex eo delapſus non impediat, quo minus mutationes ſatis notabiles exiſtant.*

RESOLUTIO.

Totum negotium huc redit, ut impediatur, quo minus Mercurius ex tubo delapſus Mercurii in vaſculo ſtagnantis altitudinem augeat, cum tantum altitudini in tubo decedat, quantum accedit altitudini Mercurii in vaſculo, ex demonſtratione theorematis 16 (§. 124). Id autem obtinetur, ſi ea ſit vaſculi amplitudo, ut Mercurius per integram ſcalam delapſus altitudinem in vaſculo ſtagnantis non niſi dimidia lineola augeat (§. 125).

Sit itaque ſcala Mercurialis in tubo Terricelliano = a, diameter tubi = b, erit ſuppoſita ratione diametri ad peripheriam = $d : p$, cylindrus Mercurialis intra ſcalam continendus = $pb^2a : 4d$ (§. 541. *Geom.*). Sit porro diameter vaſculi = x, cum altitudo cylindri, in quem in id delapſus Mer-

Mercurius abire debet, ſit dimidiæ lineolæ $= m$; erit ſoliditas ejusdem $= mpx^2 : 4d$ (§. *cit.*), conſequenter

$$mpx^2 : 4d = pb^2 a : 4d$$

$$mx^2 = ab^2$$

$$x^2 : b^2 = a : m \text{ ſeu } x : b = \sqrt{a} : \sqrt{m}$$

Theorema. Diameter vaſculi eſt ad diametrum tubi in ratione ſubduplicata ſcalæ Mercurialis in tubo ad altitudinem ejus delapſi in vaſculo, hoc eſt ut $\sqrt{8}$ ad 1 (§. 125), ſeu $2\sqrt{2}$ ad 1.

COROLLARIUM.

128. Si $b = m$; erit $x = \sqrt{ab}$, hoc eſt, diameter vaſculi eſt media proportionalis inter altitudinem ſcalæ & diametrum tubi, ſi Mercurius ex integra ſcala delapſus in vaſculo aſcendere debet ad altitudinem diametro tubi æqualem.

PROBLEMA 27.

129. *Datis diametris tubi & vaſculi, una cum altitudine intervalli, per quod Mercurius in tubo deſcendit, invenire altitudinem intervalli, per quod aſcendit in vaſculo & contra.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, diameter vaſculi $= b$, altitudo deſcenſus, $= c$, altitudinis Mercurii in vaſculo incrementum $= x$, erit (§. 127)

$$a^2 pc : 4d = b^2 px : 4d$$

$$a^2 c = b^2 x$$

$$x : c = a^2 : b^2$$

Theorema. Incrementum altitudinis Mercurii in vaſculo eſt ad intervallum deſcenſus in tubo, uti reciproce quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vaſculi.

COROLLARIUM.

130. Ergo ſi Mercurius deſcendit per quodcunque intervallum c, erit verum deſcenſus intervallum $= c + a^2 c : b^2$.

PROBLEMA 28.

131. *Baroſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Tubus vitreus AB, cujus diameter unius circiter lineæ, hermetice ſigillatus in A & 36 digitis Rhenanis non brevior, Mercurio ita repleatur, ut nihil aeris ſuper eo relinquatur, nec ulli veſiculæ inter parietem vitri & Mercurium locus concedatur: id quod optime ſuccedit ope infundibuli vitrei tubulo capillari inſtructi. Tab. II. Fig. 8.

2. Orificium tubi ita repleti, ut Mercurius ex eo redundet, digito fortisſime appreſſo, ne intra eum & Mercurium aeris quidpiam remaneat, Mercurio in

in vaſculo ligneo, cujus diameter per probl. 26. (§. 127) determinanda, ita immergatur, ut fundum non attingat.

3. Intervallo a ſuperficie Mercurii in vaſculo ſtagnantis 26 digitorum Rhenanorum affigantur ab utroque tubi latere lamellæ CE & DF in duos digitos diviſæ, qui rurſus in 12. lineas aut particulas quotcunque æquales alias ſubdividendi.

4. Tubus denique, ne facile frangatur, canaliculo in tabula LM exciſo indatur & ſuperius alio tegatur, ut ex conſpectu figuræ haud difficulter apparet.

Quoniam tubus hic idem eſt cum Torricelliano (§. 87); baroſcopium utique erit hac ratione conſtructum (§. 89. 120).

SCHOLION 1.

132. *Non opus eſſe, ut vaſculum ligneum, in quo Mercurius ſtagnat, ſit apertum, & evidenti experimento* (z) *docui, & propria experientia didici. Meum enim baroſcopium non modo vaſculum habet undiquaque probe clauſum; ſed præterea theca alteri lignea includitur, vix quicquam aeris externi ad ſuperficiem vaſculi admittenti. Hoc tamen non obſtante mutationes in altitudine Mercurii conſueta ratione contingunt.*

SCHOLION.

133. *Non defuere, qui in eo operam ſuam collocarunt, ut mutationes ſenſibiliores efficerent.* Carteſius *primum, poſtea quoque* Hugenius, *commendarunt tubum* AB *vaſe cylindrico* CD *inſtructum & dimidium vaſis una cum quadam tubi ſuperioris parte aqua, reliquam vaſis partem ac tubum inferiorem Mercurio repleri juſſerunt. Advertit vero* Hugenius, *votis non reſpondere eventum. Etenim aer in aqua contentus vinculis ſuis ſeſe liberabat & partem tubi ſuperioris vacuam replebat: quo facto, cum aer incluſus rareſieret & condenſaretur* (§. 23. 24), *depreſſiones & elevationes Mercurii a gravitatis atmoſphæræ variationibus productæ non amplius diſcerni poterant. Cum adeo didiciſſet, conſultius eſſe, ut Mercurius locum vacuo proximum occupet, aliam baroſcopii compoſiti conſtructionem excogitavit, quam problemate ſequente explicamus.*

PROBLEMA 29.

134. *Baroſcopium compoſitum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Fiat tubus recurvus ADG in A hermetice ſigillatus, in G vero apertus & duobus vaſis cylindricis BC & EF inſtructus.

2. Vaſa BC & EF ſint inter ſe æqualia & intervallo $27\frac{1}{2}$ digitorum di-

(z) in Actis Eruditorum A. 1710. p. 80.

diſtent, quanta ſcilicet eſt Mercurii in media aëris gravitate altitudo in baroſcopio ſimplici.

3. Baroſcopio huic infundatur primum Mercurius, dum baroſcopium ſimplex mediam aëris gravitatem indicat, ita quidem ut a medietate cylindri FE ad medietatem alterius BC aſſurgat, reliquo ſpatio ad A usque vacuo non ſolum a Mercurio, ſed ipſo etiam aëre craſſiore.

4. Poſtea quoque infundatur aqua communis cum parte ſexta aquæ regiæ permixta, ne frigore in glaciem vertatur, donec in tubo GF ad altitudinem unius pedis conſtituatur. Ita boroſcopium compoſitum conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Mercurius enim ultra libellam Mercurii in vaſculo EF contenti per tubum AD aſſurgens ponderi atmoſphærico & liquoris æquilibratur (§.34. *Hydroſtat.*). Aucto igitur atmoſphæræ pondere augeri debet columna illa Mercurialis, conſequenter liquor deſcendet. Aſt imminuto atmoſphæræ pondere, columna Mercurialis quoque imminui debet, conſequenter liquor aſcendet. Liquoris adeo deſcenſus incrementum gravitatis aëris, aſcenſus vero decrementum indicat, conſequenter inſtrumentum ita conſtructum baroſcopium eſt (§.89). *Q. e. d.*

SCHOLION.

135. *Baroſcopium* Hugenianum *multo minores gravitatis aereæ mutationes indicare, quam tubus* Torricellianus, *attendentibus manifeſtum eſt. Quoniam tamen aqua facile in vaporem agitur, etiamſi ad impediendam evaporationem gutta olei ex amygdalis dulcibus expreſſi, inſtilletur, liquori innatatura; loco aquæ oleum Tartari per deliqnium infundi poteſt.*

PROBLEMA 30.

136. *Baroſcopium conſtruere, cujus mutationes ſint multo ſenſibiliores quam in barometro ordinario.*

RESOLUTIO.

1. Tubo recurvo ACD, cujus crus CD ſit ad alterum AC perpendiculare, cohæreat vaſculum cylindricum B, cujus diameter tanto major eſſe debet, quanto ſenſibiliores mutationes baroſcopium indicare debet.

2. Crure AC in ſitum horizontalem inclinato, mediante infundibulo baroſocopium repleatur Mercurio, ita ut maxima pars tubi vacua ſit, nec metuendum, ne in minima atmoſphæræ gravitate Mercurius elabatur.

3. Cruri horizontali aptetur ſcala in ſuos digitos diviſa & in lineas ſubdiviſa. Dico hoc baroſcopium mutationes gravitatis aëris multo accuratius indicare, quam ordinarium.

DEMONSTRATIO.

Etenim dum pondus atmoſphæræ augetur, Mercurius in vaſculo tanto intervallo aſcendit, quanto in ordinario baroſcopio aſcendere ſolet (§.120), conſequenter cum diameter vaſculi multo major ſit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo recedit. Incrementa igitur ponderis atmoſphærici multo minora indicare valet quam baroſcopium commune ſive ſimplex. Similiter quando pondus atmoſphæræ minuitur, Mercurius in vaſculo tanto intervallo deſcendit, quanto in ordinario baroſcopio deſcendere ſolet (§.120), conſequenter cum diameter vaſculi multo major ſit diametro tubi horizontalis; in hoc multo ampliori intervallo verſus orificium excurrit. Decrementa igitur ponderis atmoſphærici multo minora indicat, quam baroſcopium ſimplex. *Q. e. d.*

PROBLEMA 31.

137. *Data diametro tubi* CD *invenire diametrum vaſculi* AB, *ita ut ſcala deſcenſus Mercurii in tubo* DC *habeat ad ſcalam aſcenſus in vaſculo* AB *rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, ratio ſcalarum $b:c$, diameter vaſculi $= x$. Tab. I. Fig. II. Cum tantum Mercurii in vaſculum aſcendat, quantum per aëris gravitatem in tubo DC deprimitur, poſitaque ratione diametri ad peripheriam $= d:p$, quantitas Mercurii in tubo recedentis ſit $a^2pb:4d$ & quantitas vaſculum ingreſſi $= x^2pc:4d$ (§. 541. *Geom.*); erit

$$a^2pb:4d = x^2pc:4d$$

$$a^2b = x^2c$$

$$x^2:a^2 = b:c$$

$$x:a = \sqrt{b}:\sqrt{c}.$$

Theorema. Diameter vaſculi eſt ad diametrum tubi in ratione ſubduplicata reciprocà ſcalarum.

COROLLARIUM.

138. Datis ergo diametro tubi CD & diametro vaſculi AB una cum ſcala Mercurii in vaſculo, invenitur ſcala in tubo, inferendo: ut quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vaſculi ita reciproce ſcala Mercurii in vaſculo ad ſcalam Mercurii in tubo.

PROBLEMA 32.

139. *Datis diametris tuborum & vaſculorum una cum altitudinibus*

nibus intervallorum, per quæ Mercurius deſcendit, invenire utrum baroſcopia concordent, nec ne.

RESOLUTIO.

Quærantur vera deſcenſus intervalla in eadem menſura (§. 130): quæ ſi utrinque æqualia reperiantur, evidens eſt, borometra inter ſe concordare; ſin minus, diſcordare.

SCHOLION.

140. *Apparet adeo ad judicandam duorum vel plurium barometrorum concordiam, aut veram intervallorum aſcenſus differentiam non ſufficere, ut utrique eadem graduatio applicetur, niſi utriusque vaſculi* (§. 127) *ea fiat amplitudo, ut Mercurius ex tubo delapſus gravitate atmoſphæra imminuta altitudinem in vaſculo ſtagnantis ſenſibiliter non variet.*

THEOREMA 17.

Tab. I. Fig. 12. 141. *Si tubus Torricellianus* AB *inclinatur, erit cylindrus Mercurialis atmoſphæræ æquiponderans ad cylindrum Mercurialem eidem in ſitu tubi verticali æquiponderantem ut longitudo tubi* AB *ad altitudinem* BC.

DEMONSTRATIO.

Si loco ponderis atmoſphærici egreſſum Mercurii ex tubo AB per oſculum A impedientis concipiatur cylindrus Mercurialis iſti æquiponderans in tubo verticali ad A reſiſtere; erit ejus gravitas ad gravitatem Mercurii in tubo inclinato ut longitudo AB ad altitudinem BC (§. 34. *Hydroſt.*) Cum itaque cylindro Mercurii verticali pondus atmoſphæræ æquale ſit; erit etiam gravitas Mercurii in tubo inclinato ad hoc ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

142. Si altitudo BC fiat longitudinis tubi vel ſubtripla, vel ſubquadrupla &c. mutationes baroſcopii triplo, vel quadruplo &c. ſenſibiliores evadunt.

COROLLARIUM 2.

143. Si AB ſumatur pro ſinu toto, erit CB ſinus anguli inclinationis BAC. Eſt ergo gravitas Mercurii in tubo inclinato ponderi atmoſphærico æquiponderantis ad pondus atmoſphæricum ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM 3.

144. Ergo & ſcala integra, & ſingula intervalla aſcenſus deſcenſusque Mercurii reciproci in tubo inclinato AB ob variationes ponderis atmoſphærici ad ſcalam integram & ſingula ejus intervalla in tubo verticali ſunt ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis. Ductis enim DF ipſi BC & FE ipſi CA parallelis, erit $o = x$ & $v = y$ (§. 255. *Geom.*), conſequenter DE : DF = BA : BC (§. 267. *Geom.*).

PRO-

PROBLEMA 33.

145. *Data longitudine ſcalæ, per quam Mercurius nunc aſcendit, nunc deſcendit in tubo verticaliter erecto, invenire angulum inclinationis tubi inclinandi, ut ſcala per quam Mercurius in ipſo nunc aſcendit, nunc deſcendit, habeat ad ſcalam tubi verticalis rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit longitudo ſcalæ in tubo verticali $= a$, quia datur ratio ſcalæ in inclinato ad ſcalam in verticali, datur etiam ſcala ipſa in inclinato, quæ ſit $= b$. Sit porro ſinus totus $= t$, ſinus anguli inclinationis $= x$; erit utendo logarithmis $lx = la + lt - lb$ (§. 135).

CAPUT V.

DE RAREFACTIONE ET CONDENSATIONE, DENSITATE ITEM ET RARITATE AERIS.

THEOREMA 18.

146. *Color elaterem aeris intendit.*

DEMONSTRATIO.

Aer veſicæ incluſus eadem vi premit, qua aer ambiens, ante caloris actionem (§. 34). Sed ubi calor in eum agit, veſicam diſtendit (§. 22). Tum itaque magis premit, quam ambiens externus (§. 75. *Mechan.*). Enimvero vis illa, qua veſicam diſtendit, eſt elater ejus (§. 26). Calor adeo elaterem aeris intendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

147. Quia aer rarefactus iterum condenſatur (§. 24); frigus elaterem ejus minuit.

THEOREMA 19.

148. *Vis elaſtica aeris, qua rareſiens expanditur, eſt ad elaterem aeris condenſati uti volumen rarefacti ad volumen condenſati.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus aerem rarefactum ea lege comprimi debere, ut idem recuperet volumen, quod condenſatus obtinuerat: evidens eſt, tantum

tum ponderis imponi debere, quod vi elaſticæ æquatur, qua expanſus fuit (§. 75. *Mechan.*). Erit igitur elater aëris, qua rareſiens expanditur, ad elaterem condenſati, ut pondus illud ad pondus alterum, quo condenſatus premebatur (§. 553. *Mechan.*). Eſt vero pondus rarefacto incumbens idem, quod condenſato incumbebat *per hypoth.* Ergo elater aëris, qua rareſiens expanditur, eſt ad élaterem condenſati ut pondus, quod ſuſtentat a rarefactione ad priſtinum condenſationis volumen reductus, ad pondus, quo rarefactus premitur, conſequenter ut volumen rarefacti ad volumen condenſati (§. 66). *Q. e. d.*

PROBLEMA 34.

149. *Aquam vel liquorem alium in vas quoddam per exiguum tubulum immittere.*

RESOLUTIO.

1. Vas igni admoveatur per aliquod temporis ſpatium.
2. Mox, ubi ab igne iterum removetur, orificium tubuli vel foramen liquori immittatur.

Dico, liquorem ſua veluti ſponte in cavitatem vaſis aſcenſurum.

DEMONSTRATIO.

Dum enim globus igni admovetur, aër rareſit (§. 23), conſequenter tanto major quantitas expelletur, quanto diutius ad ignem detinetur (§. 8). Quodſi jam orificium tubuli liquori immergatur, per eum in vas aſcendet, dum calor exſpirat. Dum enim calor exſpirat, cæteris paribus, aëris, quæ reſtat, portio rarior eſt externo ambiente, adeoque elater ejus minor quam externi (§. 78), conſequenter quam ponderis atmoſphærici (§. 30). Quare cum circa tubulum liquor a pondere atmoſphærico prematur (§. 21); aqua per tubulum in vas propelletur (§. 75. *Mechan.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

150. *Quodſi prima vice non tantum aeris expulſum fuerit, ut totus globus liquore impleri queat, eadem operatio iteranda. Nec neceſſe eſt, liquorem in priore operatione immiſſum rurſus expelli, cum ipſe potius ob propriam rarefactionem aeris adhuc reſidui expulſionem promoveat.*

THEOREMA 20.

151. *Sit globus vitreus* AB *cum annexo tubo* BC, *cujus orificium* C *aquæ immerſum; hæreat aqua pendula in tubo usque ad* D: *aſcendet, ſi aer ambiens frigidior, vel gravior evadit: deſcendet, ſi calidior, vel levior redditur.* Tab. II. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer ambiens frigidior redditur, refrigeratur etiam incluſus adeoque condenſatur (§. 24): quo facto, elater ejus minuitur (§. 78). Cum igitur is conſtanter æqualis eſſe debeat differentiæ ponderis fluidi ſuſpenſi a pondere atmoſphærico (§. 93); ſi minuitur, pondus fluidi, conſequenter & volumen ejus (§. 17. *Hydroſt.*) augeri debet. Aqua igitur in tubo aſcendat neceſſe eſt. *Quod erat unum.*

Similiter ſi aer levior redditur, aqua circa tubum magis premitur, quam ſub orificio tubi (§. 10). Tantum igitur aquæ aſcendere debet, quantum ſufficit ad æquilibrium cum pondere atmoſphærico conſtituendum (§. 36. *Hydroſt.*). *Quod erat ſecundum.*

Consra ſi aer externus calefit, calefit quoque incluſus, conſequenter rarefit (§. 23), adeoque liquorem in tubo detrudit (§. 8). Fluidum deſcendere, ſi aer levior redditur, eadem ratione demonſtratur, qua oſtendimus, illud aſcendere, ſi is gravior evadit. *Quod erat tertium & quartum.*

SCHOLION.

152. *Celeberrimus* Hallejus (a) *obſervavit, uti ſupra de Mercurio* (§. 123), *quod ſpiritus vini inſigniter expanſus fuerit, atque ab initio celerius, poſtea tardius in tubulo aſcenderit. Cum ſpiritus vini duodecima voluminis parte dilatatus eſſet, manus quidem aquæ calorem ferre poterat, ille tamen ebullire incipiebat. Vereor autem, ne diverſitas ſpiritus vini expanſionis gradum variet. In aqua exiguam expanſionem notavit idem* Hallejus, *inprimis ſub initium, & ebulliens* $\frac{1}{26}$ *circiter ſpatio prioris augebatur, non amplius expandenda. Quamvis autem ex his experientiis manifeſtum ſit, volumen fluidi calore creſcere, frigore decreſcere debere, conſequenter liquorem aſcendere conari, dum ab elatere aeris incluſi deorſum pellitur, & contra, adeoque rarefactionem liquoris obſtare deſcenſui ejus, condenſationem vero aſcenſui: experientia tamen conſtat, hoc obſtaculum non impedire, quo minus elateris aerei effectus ſint ſatis ſenſibiles, quia aer multo magis rarefit & condenſatur quam fluidum quodcunque aliud.*

THEOREMA 21.

153. *Denſitas aeris, cæteris paribus, creſcit in ratione ponderum comprimentium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim denſitates ut gravitates ſpecificæ (§. 33. *Hydroſtat.*) Gravitates ſpecificæ ſunt ut volumina reciproce (§. 29. *Hydroſt.*) Ergo

(a) Philoſ. Transact. n. 197. p. 650. & ſeqq.

Ergo denſitates ſunt ut volumina reciproce (§. 167. *Arithm.*), conſequenter ut pondera comprimentia (§. 73). *Q. e. d.*

THEOREMA 22.

154. *Aer inferior denſior eſt ſuperiore.*

DEMONSRATIO.

Aer ſuperior premit inferiorem (§. 21). Cum adeo inferiori major aeris quantitas incumbat, quam ſuperiori; inferior quoque magis premitur, quam ſuperior (§. 10). Denſitas adeo inferioris major eſt denſitate ſuperioris (§. 153). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

155. Quia corpora denſiora ſunt graviora rarioribus ſub eodem volumine (§. 14. *Hydroſt.*) & aer gravis exiſtit (§. 20); aer inferior ſpecifice gravior eſt ſuperiore.

THEOREMA 23.

156. *Denſitas aeris inferioris non eſt ponderi atmoſphærico proportionalis.*

DEMONSTRATIO.

Si præter variationem ponderis atmoſphærici cætera in aere inferiore omnia eſſent paria, denſitates ejus eſſent ut pondera atmoſphærica (§. 153). Sed calor aerem rarefacit, frigus condenſat (§. 23. 24), adeoque a calore & frigore denſitas diverſimode variatur, utut eodem pondere prematur; ac forte adhuc aliæ dantur cauſæ eandem ſimiliter alterantes. Cum adeo denſitas aeris inferioris mutari poſſit, pondere atmoſphærico immutato, iſta huic proportionalis non eſt. *Q. e. d.*

THEOREMA 24.

157. *Si aer redditur denſior, pondus corporum in aere minuitur; ſi rarior, augetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam gravitates ſpecificæ ſunt ut denſitates (§. 33. *Hydroſt.*); aer denſior ſpecifice gravior eſt rariori. Corpus igitur aere ſpecifice gravius in denſiore majorem ponderis partem amittit, quam in rariore (§. 56. *Hydroſt.*) Unde ſi aer redditur denſior, pondus minuitur; ſi rarior, augetur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

158. Si igitur denſitas aeris ſenſibiliter alteratur, corporum in aere rariori æquilibratorum, quorum gravitates ſpecificæ notabiliter differunt, æquilibrium tolletur in denſiore, præponderabitque ſpecifice gravius (§. 61. *Hydroſt.*).

PROBLEMA 35.

159. *Invenire incrementum ponderis, quod volumen aeris unius pedis cubici ob variationem ponderis atmoſphærici acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Si pondus atmoſphæræ cæteris paribus augetur, aer inferior magis comprimitur (§. 66), adeoque denſior evadit (§. 153), conſequenter pes cubicus aeris a compreſſione gravior (§. 9. *Hydroſt.*). Sit jam pondus atmoſphæræ minimum = a, maximum = b, pondus aeris a minimo compreſſi = c, preſſi a maximo = x. Cum denſitates corporum æqualium ſint ut pondera (§. 16. *Hydroſt.*): erit

$$a : b = c : x$$

$$x = bc : a$$

Ergo incrementum y, quod volumen aeris datum ob ponderis atmoſphærici variationem acquirere valet, eſt $bc : a - c = (bc - ac) : a$, conſequenter $a : b - a = c : y$.

Theorema. Ut pondus atmoſphæricum minimum ad differentiam ejus a maximo, ita pondus aeris a minimo compreſſi ad incrementum ponderis, quod a tota variatione ponderis atmoſphærici acquirere valet volumen aeris datum.

E. gr. Pes cubicus aeris in minima atmoſphæræ gravitate ſit 507 granorum (§ 55). Quoniam $a = 26$, $b = 28$ (§ 122): erit $y = 39$ granorum. Incrementum adeo, quod pes cubicus aeris ab omni variatione ponderis atmoſphærici ſuſcipere valet, eſt fere $\frac{1}{13}$ ejus ponderis, quod ipſi a minimo pondere atmoſphærico preſſo competit.

DEFINITIO 11.

160. *Monoſcopium* eſt inſtrumentum, quod alterationes denſitatis aeris indicat. *Manometrum* eſt inſtrumentum, quod easdem metitur.

PROBLEMA 36.

161. *Manoſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur bilanx tam accurate conſtructa, ut minimas æquilibrii mutationes indicet, cujus centrum motus eſt ſuper centro jugi.
2. Ex altero jugi brachio ſuſpendatur globus ex lamina metallica e. gr. cuprea aut orichalcea conſtruendus, ne pondus affrictum in libra augeat (§. 782. *Mechan.*), minimas æquilibrii mutationes eluſurum. Capacitas globi ſit minimum unius pedis cubici, & ex eo educatur aer (§. 40).

3. Tru-

b. 3. Trutinæ affigatur Quadrans ADC ex centro jugi B deſcriptus, ita ut ſecetur in gradu quadrageſimo quinto ab indice BD, ſi jugum fuerit in ſitu horizontali.

Dico, Manoſcopium eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi aer denſior redditur, pondus globi evacuati minuitur (§. 158). Et licet etiam (*vi §. cit.*) vis contrapondii minuatur, cum tamen ejus volumen vix ſpatium a laminæ, ex qua globus conſtructus, ſoliditate repletum occupet, niſus ejus deorſum minus minuitur, quam globi (§. 55. *Hydroſt.*), conſequenter contrapondium globo præponderat, & augmentum gravitatis ſpecificæ aeris, in quo hæret, conſequenter & denſitatis (§. 33. *Hydroſt.*) indicat. Eſt ergo machina manoſcopium (§. 160). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

162. Quoniam aeris denſitas & raritas non modo a pondere atmoſphæræ (§. 153), ſed & a caloris & frigoris actione pendet (§. 23. 24); manoſcopium hoc baroſcopium eſſe nequit.

SCHOLION 1.

163. *Equidem* Otto de Guericke (b) *&, qui ipſum ſequitur,* Boylius (c) *idem inſtrumentum pro baroſcopio venditant; ſed non attenderunt, manente eodem pondere denſitatem ac raritatem aeris ſæpiſſime variari.*

SCHOLION 2.

164. *Neque vero putandum eſt, mutationes gravitatis globi adeo exiguas fore, ut in bilance notari nequeant, experientia enim contrarium abunde ſatis confirmat. Certe* Guerickius *ſe expertum ſcribit, quod globi gravitas interdum quovis, interdum ſecundo, tertio, quarto, quinto die aliquantum variata fuerit & inprimis ingraveſcere globum notavit, ſi pluat. Nec difficulter idem ratione aſſequimur. Cum enim gravitas unius pedis cubici aerei 39 granorum mutationem ob variatum pondus atmoſphæricum ſuſtineat (§. 159); bilanx vero unius vel alterius grani acceſſionem vel ablationem indicare poſſit, utut pondere 30 librarum (a quo multum abeſt globus cum ſuo contrapondio) oneretur (§. 55); ſi globus evacuatus pedem aeris cubicum capit, quin variationes denſitatis ab atmoſphæra pondere variato pendentes manoſcopium noſtrum indicet, dubitandum non eſt. Tanto minus autem dubitare fas eſt, quod alia adhuc denſitatis variationes a diverſo calore ac frigore aeris facta, nec iſtis minore accedant. Didicit nimirum* Hal-

(b) in Experiment. de Vacuo lib. 3. C. 31. f. 114.
(c) in Hiſtoria frigoris tit. 17.

lejus *aerem ordinarium in Anglia a calore æſtivo extendi $\frac{1}{13}$ circiter ſui voluminis, a maximo autem frigore condenſari $\frac{1}{20}$ fere. Cum adeo pondus unius pedis cubici aerei ſit 507 granorum* (§. 55); *erit decrementum ponderis in caſu priore 32, incrementum in poſteriore 25 granorum.*

SCHOLION 3.

165. *Manometri conſtructionem dedit celeberrimus* Varignonius (d): *de quo alias nonnulla monuimus* (e).

CAPUT VI.
DE
MOTU AERIS.

DEFINITIO 12.

166. *Ventus* eſt agitatio aeris ſenſibilis.

PROBLEMA 37.

167. *Data ratione gravitatis ſpecificæ fluidi cujuscunque ad gravitatem aeris, una cum ſpatio, quod intra definitum aliquod temporis ſpatium fluidum iſtud percurrit ab aere premente impulſum, determinare ſpatium, quod ipſe aer ob æqualem presſionem intra idem tempus emetiri debet.*

RESOLUTIO.

Ponatur altitudo, ad quam per datam aeris presſionem elevari poteſt fluidum in medio non reſiſtente $= a$. Sit porro ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aeris $= b : c$. Spatium, quod fluidum ab aere premente impulſum deſcribit, dicatur s, & denique ſpatium, quod aer ob æqualem presſionem intra idem tempus emetitur, vocetur x. Quoniam altitudines fluidorum, ad quas propter æquales presſiones elevantur, ſunt in ratione gravitatum reciproca (§. 36. *Hydroſt.*); ſi altitudo, ad quam aer eandem cum fluido presſionem ſuſtinens eveheretur, modo elatere careret, fiat $= y$; erit $c : b = a : y$, conſequenter $y = ab : c$, Sunt vero velocitates, quibus fluida ob eandem presſionem elevantur, in ratione ſubduplicata altitudinum, ad quas aſcendunt (§. 87. 322. *Mechan.*), adeoque in caſu noſtro ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{(ab : c.)}$ Quare cum

(d) Memoires de l' Acad. Roy. des Sciences A. 1705, p. m. 409, & ſeqq.
(e) in Element. Aerometriæ p. 284.

cum ob temporum ſuppoſitam æqualitatem ſpatia, quæ iſtis temporibus percurruntur, ſint ut velocitates (§. 28. *Mechan.*); erit

$$Va : V(ab:c) = s : x$$

$$a : \frac{ab}{c} = s^2 : x^2 \text{ (§. 260. Arithm.)}$$

$$ac : ab = s^2 : x^2 \text{ (§. 178. Arithm.)}$$

adeoque

$$c : b = s^2 : x^2 \text{ (§. 181. Arithm).}$$

Theorema. Ut gravitas ſpecifica aeris ad gravitatem fluidi alterius cujuscunque, ita reciproce quadratum ſpatii, quod fluidum hoc quacunque vi impulſum intra quodcunque temporis ſpatium percurrit, ad quadratum ſpatii, quod aer ob eandem preſſionem eodem tempore emetitur.

COROLLARIUM 1.

168. Ergo $x = V(bs^2:c)$. Unde ſi ponamus, aquam data vi impulſam intra minutum temporis ſecundum percurrere ſpatium 2 pedum; erit $s = 2$, cumque gravitas ſpecifica aquæ ſit ad gravitatem ſpecificam aeris ut 970 ad 1 (§. 57), erit $b = 970$ & $c = 1$, conſequenter $x = V\, 970.\, 4 = V\, 3880 = 62^{\prime}7^{\prime\prime\prime}$ fere.

COROLLARIUM 2.

169. Eſt etiam $ſ = V(cx^2 : b)$, adeoque ſpatium, quod intra certum aliquod temporis ſpatium ob certam quandam impreſſionem fluidum quodcunque emetitur, determinatur, ſi ad duos numeros, quibus ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aeris exprimitur, atque quadratum ſpatii quod aer ob eandem preſſionem intra idem temporis ſpatium emetitur, numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302. *Arithm.*) & ex eo radix quadrata extrahatur (§. 269. *Arithm.*)

SCHOLION.

170. Mariottus (f) *notat, ventum ſatis vipleutum ordinarie ſpatium 24 pedum intra minutum ſecundum deſcribere. Quodſi ergo quæratur ſpatium, quod aqua ob eandem preſſionem, quam aer ſuſtinet, intra idem temporis ſpatium abſolvit, erit* $c = 1, x = 24, b = 970$ *& reperietur* $ſ = V(576 : 970) = \frac{24}{31}$.

PROBLEMA 38.

171. ***Data altitudine, ad quam fluidum quodcunque a preſſura aeris elevatur, una cum altitudine, per quam corpus grave intra minutum ſecundum deſcendit, determinare ſpatium, quod fluidum iſtud intra minutum ſecundum vi impetus impreſſi motu æquabili percurrit.***

RESOLUTIO.

Sit altitudo, ad quam fluidum ab aere premente elevatur, $= a$, minutum temporis ſecundum $= b$, ſpatium quæſitum $= x$. Quoniam corpus grave per vim cadendo acqui-

(f) Trait. du mouvement des eaux p. 226.

acquiſitam elevatur ad altitudinem per quam decidit (§. 322. *Mech.*); vis aeris prementis, qua fluidum ad datam altitudinem elevatur, æqualis erit vi, quam id per eandem cadendo acquirere valet. Porro vis cadendo acquiſita ejus eſt celeritatis, qua corpus motu æquabili intra idem tempus, quo decidit, deſcribere valet lineam altitudinis, ex qua decidit, duplam (§. 92. *Mech.*) Reperietur adeo ſpatium, quod fluidum intra idem tempus, quo decidit, vi cadendo acquiſita percurrere valet $= 2a$. Sit præterea ſpatium, quod corpus grave deſcendens intra minutum ſecundum deſcribit, $= c$. Quoniam tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum a corporibus cadentibus deſcriptorum, erit tempus, quo grave decidit per ſpatium a, $= \sqrt{(ab^2 : c)}$ (§. 87. *Mech.*). Quare ſi motus æquabilis ponatur, habebimus (§. 34. *Mech.*)

$$\sqrt{(ab^2 : c)} : 2b = a : x$$

$$2ab = x\sqrt{(ab^2 : c)}$$

$$4a^2b^2 = x^2ab^2 : c$$

$$4ac = x^2$$

$$2a : x = x : 2c$$

Theorema. Spatium, quod fluidum ob impetum impreſſum intra minutum ſecundum motu æquabili percurrit, eſt medium proportionale inter altitudinem duplam, ad quam idem ab aere premente elevatur, & altitudinem duplam ejus, per quam grave intra minutum ſecundum decidit.

SCHOLION.

172. *Ponamus, Mercurium per preſſionem atmoſphæræ in tubo Torricelliano ſuſtentari ad altitudinem* 28″: *erit adeo in problemate noſtro* $a = 28''$. *Porro* $c = 15' \, 1''$ *ſeu* $181''$ (*pedis Pariſini*) (§. 327. Mechan.). *Ergo* x *hoc eſt ſpatium, quod ob eandem preſſionem Mercurius motu æquabili tempore unius ſecundi percurreret* $= 2\sqrt{181.28} = 142''$ *quam proxime ſeu* 11′ 10″. *Ponamus Mercurium elevari per aeris preſſionem nonniſi* 2″. *Erit in caſu problematis noſtri* $a = 2''$, $c = 181''$, *adeoque* $x = 2\sqrt{181.2} = 38'' = 3' \, 2''$.

PROBLEMA 39.

173. ***Data altitudine fluidi, ad quam propter preſſionem aeris elevatur, invenire ſpatium, quod tempore unius minuti ſecundi ob eandem preſſionem percurrere debet aer in medio non reſiſtente.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur, quantum ſpatium ob preſſionem aeris, qua ad datam altitudinem elevatur, tempore unius minuti ſecundi motu æquabili emetiretur fluidum datum (§. 169). Hinc enim porro

2. In-

2. Inveſtigari poteſt ſpatium, quod aer in medio non reſiſtente ob eandem preſſionem percurrere debet (§. 167).

COROLLARIUM 1.

174. Per præſens igitur problema determinari poteſt ſpatium, quod aer in vas prorſus evacuatum irruens intra minutum temporis ſecundum deſcribit. Si enim vas prorſus evacuatum fuerit, aer irruens preſſionem ſuſtinet ei æqualem, qua aqua ad altitudinem 32 pedum Pariſienſium elevatur (§. 29). Quare ſpatium, quod aqua ob iſtam preſſionem tempore unius minuti ſecundi motu æquabili percurreret, eſt 528'' (§. 171). Jam cum ratio gravitatis ſpecificæ aquæ ad gravitatem aeris ſit 970 : 1, reperietur ſpatium, quod aer in vas prorſus evacuatum irruens motu æquabili tempore unius minuti ſecundi percurrere debet, 1370 pedum (§. 167).

COROLLARIUM 2.

175. Si detur differentia virium elaſticarum in duobus voluminibus aeris contiguis, inveniri poteſt ſpatium, quod aer ex volumine fortiori elatere inſtructo irruens in volumen elatere debiliori præditum deſcribit.

SCHOLION.

176. *Si e. gr. differentia virium elaſticarum in duobus voluminibus aeris contiguis ea, qua Mercurius elevari poteſt ad altitudinem 2 digitorum; reperietur ſpatium, quod ob iſtiusmodi preſſionem tempore unius minuti ſecundi motu æquabili Mercurius deſcribere valet 38'' (§. 171). Cum jam gravitas ſpecifica Mercurii ad gravitatem aquæ ſit ut 14 ad 1 (§. 29) & gravitas aquæ ad gravitatem aeris ut 970 ad 1, erit gravitas Mercurii ad gravitatem aeris ut 13580 ad 1, adeoque reperietur ſpatium, quod ob æqualem preſſionem aer emetiri debet tempore unius minuti ſecundi fere 368 pedum. Irruet ergo aer ex volumine fortiori in debilius ea celeritate, qua tempore unius minuti ſecundi fere 368 pedes percurrere valet. Sit differentia virium elaſticarum nonniſi 3''': reperietur ſpatium, quod ob iſtiusmodi preſſionem tempore unius minuti ſecundi motu æquabili Mercurius deſcribere valet, fere 12'', tandemque ſpatium, quod ob iſtiusmodi preſſionem tempore unius minuti ſecundi aer emetiri debet, $116\frac{1}{2}$ pedum (§. 167). Ea igitur celeritate, quæ tempore unius minuti ſecundi ſpatium 116 circiter pedum percurrere valet, aer ex volumine fortiori in debilius irruit. Quoniam* Mariottus (g) *obſervat, ventum ſatis violentum intra minutum temporis ſecundum 24 pedes percurrere; ejus celeritas multo minor eſt ea, qua aer irruit ex volumine fortiori in debilius, differentia virium elaſticarum nonniſi tanta exiſtente, quanta Mercurium in tubo Torricelliano ad altitudinem 3''' elevare valet.*

COROLLARIUM 2.

177. Quoniam data ratione voluminum aeris primitivi atque compreſſi inveniri

(g) Traité du mouvement des eaux p. 126.

veniri poteſt altitudo, ad quam aer compreſſus Mercurium in tubo Torricelliano elevare poteſt (§. 83); per problema præſens determinari etiam poteſt celeritas, qua aer ceſſante compreſſione ſeu remota vi premente ſeſe expandit.

PROBLEMA 40.

178. *Dato ſpatio, quod aer intra minutum ſecundum percurrit, determinare preſſionem, quæ celeritatem iſtam producere valet.*

RESOLUTIO.

Preſſionem determinatam eſſe patet, ſi conſtet altitudo, ad quam fluidum quodcunque in tubo vacuo ab aere elevandum, tantam preſſionem producere valente. Sit itaque hæc altitudo $= x$, ſpatium quod aer intra minutum ſecundum percurrit $= a$, ratio gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aeris $= b:c$; altitudo denique, per quam corpus grave intra minutum ſecundum deſcendit $= d$; reperietur ſpatium a fluido tempore unius minuti ſecundi percurrendum $= \sqrt{(a^2c:b)}$ (§. 169). Hinc porro elicitur (§. 171) altitudo quæſita $= a^2c:4bd$. Eſt itaque

$$4bd:ac = a:x.$$

Theorema. Spatium, quod aer tempore unius minuti ſecundi percurrit, eſt ad altitudinem, ad quam fluidum in tubo vacuo elevandum, ut preſſionem efficiat celeritati, qua iſtud deſcribitur, producendæ ſufficientem, in ratione compoſita gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem aeris atque altitudinis quadruplæ, per quam corpus tempore primi minuti ſecundi deſcendit, ad ſpatium aeris prædictum. Sit e. g. $a = 24'$, ſeu $288''$ ratio Mercurii ad aerem $b:c = 13580:1$ (§. 176), $d = 181''$ (§. 473. *Mechan.*); erit x minor unica linea ſeu duodecima digiti parte.

SCHOLION 1.

179. *Apparet adeo, quod exiguas mutationes in baroſcopio, ſed ſubitas, ingentes admodum procellæ ſubſequi debeant: id quod experientiæ conſentaneum theoriam noſtram confirmat.*

SCHOLION 2.

180. *Equidem de actione venti in corpora jam porro agi hic poterat, ac imprimis determinandus erat ſitus alarum in molendino alato, qualis nempe requiratur, ut ad eas circa axem convertendas vim maximam adhibeat ventus: enimvero cum hic opus ſit principiis generalibus de motu fluidorum, quæ in Hydraulica demum docentur; ideo ibidem univerſali ratione hoc argumentum exequemur, ne minus dixiſſe videamur, cum plus dicere poſſemus.*

DEFINITIO 13.

181. *Anemometrum* eſt inſtrumentum, quo vim ventorum metimur.

PROBLEMA 41.

182. *Anemometrum conſtruere.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Conſtruantur alæ ABCD, quales in molis alatis adhiberi ſolent, multo tamen minores, a plano verticali ſub angulo 54 circiter graduum reclinatæ.
2. Axi, cui alæ inſiguntur, aptetur etiam cochlea perpetua EF, quæ
3. Circumacta deprimat dentes rotæ ſtellatæ GH.
4. Axi per centrum tranſeunti inſigatur ad angulos rectos brachium ſatis longum IK, in medio canaliculi inſtar excavandum, ut intra cavitatem pondus plumbeum L ſurſum deorſum libere moveri poſſit, ipſique (nempe brachio) ex altera axeos parte æquilibretur brachium minus y.
5. Brachii majoris IK longitudo in quotcunque partes æquales dividatur, quarum ſingulæ radio axis æquantur.
6. Eidem axi inſigatur index MN brachio IK ad angulos rectos inſiſtens, & extra ciſtam, cui rota ſtellata cum cochlea perpetua incluſa, eminens.
7. Denique ex centro axis in pariete ciſtæ exteriore deſcribatur quadrans circuli in 90 gradus more ſolito dividendus, ab indice vel aſcendente, vel deſcendente indicandus.

Dico, Anemometrum eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Manifeſtum enim, ſi alæ ABCD vento opponantur, cochleam perpetuam EF circumvolvi atque adeo rotam ſtellatam GH in orbem agere. Quare cum brachium IK cum rota ſtellata GH eidem axi inſigatur, *per conſtruct.* ubi hæc circumagitur, illud cum pondere L elevabitur. Quoniam vero diſtantia ponderis a centro motus continuo fit major, quo altius elevatur; tanto quoque gravius fiat neceſſe eſt, quo altius attollitur (§. 796. *Mechan.*). Vis igitur venti, quæ per minorem angulum elevare poteſt pondus, non ideo idem elevare valet per angulum majorem. Quamprimum itaque ponderis gravitatio vi venti ipſum elevantis æqualis evadit, motus machinæ ſiſtatur neceſſe eſt (§. 75. *Mechan.*) & quia cochlea perpetua EF rotam quidem GH circumagere poteſt, ipſa autem a rota circumagi nequit, brachium IK cum pondere L relabi nequit. Index adeo ſemper indicat, quantus ſit angulus elevationis ponderis; ubi

 eidem

eidem vis venti æquilibratur: unde determinabitur vis venti (§. 79. *Mechan.*), atque adeo per machinam noſtram ratio virium ventorum determinari poteſt, hoc eſt, vires venti metiri licet (§. 23. *Geom.*). Eſt igitur anemometrum (§. 181). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

183. *Ut hac machina ſine ullius adjumento alas* ABCD *vento ſemper obvertat, ciſtæ* ST *plano, quod alis opponitur, ad angulos rectos affigendus eſt aſſerculus* POQR *figuram trapezii parallelarum baſium habens. Ventus enim incidens in aſſerculum* POQR, *machinam circa axem pedamenti mobilem convolvet, donec alæ vento opponantur. Alias directio ad ductum vexilli e centro machinæ erecti fieri poteſt, ut in molendinis vulgaribus alatis.*

SCHOLION 2.

184. *Brachio* IK *contrapondium* y *additur, ut inſtar lineæ gravitate carentis conſiderari poſſit, nec tædia calculi præter neceſſitatem multiplicentur.*

THEOREMA 25.

185. *Si elater aeris alicubi debilior evadit quam in locis contiguis, ventus flat per locum, in quo elater imminutus.*

DEMONSTRATIO.

Cum aer per elaterem ſuum quaquaverſum ſe expandere nitatur (§. 26); ſi elater uno in loco minor, quam in altero, niſus aeris vi elaſtica majore præditi adverſus aerem vi elaſtica minore inſtructum major erit, quam hujus adverſus iſtum. Ergo aer minus elaſticus vi minore reſiſtit, quam a magis elaſtico urgetur, conſequenter minus elaſticus loco ſuo pellitur & magis elaſticus in eum ſuccedit. Quodſi adeo exceſſus elateris in aere magis elaſtico ſuper elaterem minus elaſtici is ſit, qui exiguam in baroſcopio mutationem inducere valet; motus quoque tam aeris expulſi, quam in ipſius locum ſuccedentis ſenſibilis evadat neceſſe eſt (§. 176). Flat ergo ventus per locum, quem aer minus elaſticus replet (§. 166). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

186. Cum aucto pondere comprimente elater augeatur (§. 553. *Mech.*), aer vero compreſſus ſit denſior minus compreſſo (§. 78): ventus flat per aerem rariorem ex loco, qui denſiore repletur.

COROLLARIUM 2.

187. Quamobrem, quia aer denſior rariore ſpecifice gravior (§. 33. *Hydroſt.*); extraordinaria aeris aliquo in loco levitas cum ventis extraordinariis ſeu procellis conjungi debet.

COROLLARIUM 3.

188. Jam deſcenſus Mercurii extraordinarius in baroſcopio aeris levitatem extraordinariam indicat (§. 120). Non ergo mirum, quod procellas portendat, ſi ſubito fiat.

SCHOLION.

189. *Non tamen neceſſe eſt, ut aeris levitas ſemper cum ventis conjungatur. Sufficit enim gravitatem aeris ſubitas pati mutationes. Hinc ventum ſat valide flantem hoc ipſo temporis articulo experimur, ubi in media altitudine, 29 nempe digitorum Anglicorum, Mercurius in baroſcopio conſiſtat; nec niſi $\frac{1}{16}$ unius digiti depreſſior nunc factus, quam heri erat, immo in maxima depreſſione ventus fere nullus ſpirat, quia depreſſio ſucceſſive, non ſubito facta.*

COROLLARIUM 4.

190. Si aer alicubi ſubito condenſatur, elater ejus ſubito minuitur (§. 148). Quodſi ergo hæc imminutio ea fuerit, quæ in baroſcopio vix indicari poſſit (§. 176. 178), ventus per aerem condenſatum flabit.

COROLLARIUM 5.

191. Quoniam vero ſubito condenſari nequit, niſi magnam ante paſſus fuerit rarefactionem (§. 68); ventus flabit per aerem, dum poſt æſtum vehementem refrigeratur.

COROLLARIUM 6.

192. Similiter ſi aer ſubito rarefiat, elater ejus ſubito intenditur (§. 148), adeoque defluet per contiguum actioni vis rarefacientis non obnoxium (§. 75. *Mechan.*). Flabit ergo ventus ex loco, in quo aer ſubito rareſcit.

COROLLARIUM 7.

193. Cum vires ſolis in rarefaciendo aere notiſſimæ ſint; ſolem in ventorum geneſin influere manifeſtum eſt (§. 56).

PROBLEMA 42.

194. *Ventum excitare adverſus plagam deſideratam ſpirantem.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur vas cylindricum ABCD ex ligno, cujus diameter AB & altitudo AC eo major eſſe debet, quo impetuoſior ventus excitandus. Tab. II. Fig. 16.
2. Vas ipſum ſit undiquaque probe clauſum, ſolo foramine in E gaudens, cui tubus EF utrinque apertus ante immittendus.
3. Per medium cylindrum tranſeat axis mobilis HI quatuor brachiis cum aliis coriaceis K, L, M, N, & curriculo O extra vas inſtructus. Habeat vero curriculus 6 vel 7 bacillos.
4. Curriculo occurrat rota dentata PQ cum axe curvato RS 30 vel 28 dentes habens.

Dum ergo axis SR curvatus ſemel convolvitur, alter erectus IH 5 vel 4 converſiones abſolvit adeoque alæ L, M, N, K per aerem incluſum

celerrime feruntur eundemque per tubum expellunt. Cum adeo tubus verſus plagam deſideratam dirigi poſſit; ventus excitabitur (§. 166) adverſus plagam deſideratam ſpirans. *Q. e. f.*

SCHOLION.

195. *Cum in molis frumentariis axis ferreus* HI *cum curriculo* C *occurrat* (§. 925. Mechan.); *hoc artificio ſub lapidibus molaribus facile excitatur ventus partes a granis frumenti abraſas a nucleo eorum ſeparaturus. Tum vero tubus* EF *ſacci vices ſuſtinet, & baſis* GF *declivis, in* G *vero foramen eſſe debet, ut grana graviora per hoc decidant, leviores autem partes abraſa a vento per* F *ejiciantur. Hoc artificio uti quoque liceret ad paleas a frumento poſt triturationem ſeparandas, additis addendis, quæ nunc fuſius exponere non eſt noſtri inſtituti.*

CAPUT VII.

DE

CALORE AC FRIGORE, ITEMQUE HUMIDITATE AC SICCITATE AERIS.

DEFINITIO 14.

196. *Thermoſcopium* eſt inſtrumentum caloris ac frigoris in aere incrementa & decrementa indicans. *Thermometrum* vero eſt inſtrumentum, quo calorem ac frigus aeris metiri licet.

DEFINITIO 15.

197. *Hygroſcopium* eſt inſtrumentum, quod humiditatis & ſiccitatis in aere incrementa & decrementa indicat. *Hygrometrum* vero eſt inſtrumentum, quo humiditatem & ſiccitatem aeris metimur.

PROBLEMA 43.

198. *Thermoſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Tubo BC, qui globo vitreo AB cohæret, immittatur aqua communis regiæ permixta & ab orichalco in hac ſoluto viredine tincta (§. 149). Opera vero danda eſt, ut tantum aeris in globo Tab. II. Fig. 17.

bo & tubo relinquatur, qui hieme maximam condenſationem paſſus globum exacte repleat & æſtate ad ſummam rarefactionis gradum perductus non omnem ev tubo BC liquorem expellat.

2. Tubus immittatur vaſculo vel alteri ejus extremo cohæreat globus CD apertus, ut aer ejici, iterumque ingredi libere poſſit, & in quo ſimilis liquor contineatur, qualis in tubum immiſſus.

3. Ab utroque latere tubi applicetur ſcala EF in particulas quotcunque æquales dividenda.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer ambiens ſit calidior, liquor in tubo deſcendit: ſi is frigidior evadit, hic aſcendit (§.151). Incrementis igitur caloris & frigoris indicat hoc iaſtrumentum, adeoque thermoſcopium eſt (§.196). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Eodem artificio, quo ante, & cum eadem cautione, in tubum BC in varios gyros contortum commoditatis gratia (ne ſcilicet longior ſpatium nimis longum occupet nec facile damnum patiatur) immittatur pauculum Mercurii, piſi magnitudinem non excedens.

2. Tubulus dividatur in partes quotcunque æquales, quæ ſcalæ vicem ſuſtineant.

Acceſſus Mercurii ad globum frigoris; receſſus vero ejusdem a globo caloris incrementa indicabit.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ præcedens.

COROLLARIUM 1.

199. Quia liquor in thermoſcopio primo & Mercurius in altero etiam aſcendit, ſi aer gravior redditur; contra vero deſcendit, ſi levior evadit (§.151): caloris ac frigoris incrementa non ſatis fideliter exprimit.

COROLLARIUM 2.

200. Quoniam tamen mutationes admodum ſenſibiles ſunt; ſi aliorum corporum calor examinandus, commode thermoſcopio altero utimur: exiguo enim temporis ſpatio, quo experimentum inſtituitur, gravitas atmoſphæræ ſenſibiliter non mutatur.

SCHOLION.

201. *Quodſi in thermoſcopio primo liquorem colore intenſe rubro & admodum grato tingere volueris; aquam ferventem affunde foliis florum ſimplicium atque rubidiorum malvæ hortenſis areſactis, ut color extrahatur. Quodſi enim tincturæ aquam regiam affuderis, non ſine jucunditate colorem intenſe rubrum*

brum emergentem contueberis, reliquos omnes longe antecellentem, quibus huc usque uſi ſunt artifices.

PROBLEMA 44.

202. *Thermoſcopium Florentinum conſtruere.*

RESOLUTIO.

Cum Academici Florentini perpenderent incommoda, quibus thermoſcopium paulo ante deſcriptum premitur (§. 198); menſuram caloris & frigoris quæſivere in rarefactione ſpiritus vini, utut rarefactione aëris longe minore (§. 152). Thermoſcopium vero ab ipſis repertum ita conſtruitur:

1. Fruſtulis ex radice curcumæ aut anchuſæ reſectis affundatur ſpiritus vini rectificatiſſimus, ſeu qui, dum accenſus conflagrat, pulverem pyrium accendit; a priore enim radice colore flavo, a poſteriore autem rubro tingetur.
2. Poſtea ſpiritus vini iterum iterumque filtretur per chartam bibulam, ut particulæ craſſiores ex radice extractæ remaneant.
3. Tab. III. Fig. 19. Spiritu vini tincto & filtrato impleatur globus vitreus AB cum tubo BC. Ne autem hieme ſpiritus omnis in globum deſcendat, globum immittere juvat nivi multo ſale conſperſæ aut (ſi æſtivo tempore thermoſcopium parare volueris) aquæ fontanæ frigidæ, in qua multum nitri ſolutum, ut ſpiritus condenſatus indicet terminum, quem maximo frigore attingere valet.
4. Quodſi a globo longiore intervallo adhuc diſtet, aliqua ejus portio rurſus expellenda. Ne autem tubus juſto longior fiat, globum ſpiritu plenum aquæ calidæ carbonibus candentibus impoſitæ immittatur & notetur terminus, ad quem pertingit, ubi ebullitioni proximus.
5. Hoc ergo termino ad flammam lampadis admoto, tubus hermetice ſigilletur.
6. A latere denique affigatur ut in probl. præc. ſcala EF in particulas quotcunque æquales diviſa.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ſpiritus vini rareſcit & condenſatur (§. 152), calore creſcente, in tubo aſcendet (§ 8), decreſcente, deſcendet (§. 6). Caloris igitur incrementa & decrementa inſtrumentum indicat, conſequenter thermoſcopium eſt (§. 196). *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM 1.

203. Si ſpiritus vini per multos gradus ſcalæ aſcendit, calorem multum creviſſe conſtat; ſi deſcendit, idem multum decreviſſe intelligitur: quoniam tamen ratio caloris hodierni ad heſternum non indicatur, inſtrumentum calorem non metitur (§.23.*Geom.*) adeoque thermometrum non eſt (§.196).

COROLLARIUM 2.

204. Liquor in tubo vi gravitatis ſuæ deorſum nititur (§. 4. *Mechan.*), adeoque ex globo in ipſum ulterius aſcendenti reſiſtit tanto quidem magis, quo altius jam aſcendit (§. 10). Præſtaret itaque, ſitum tubi BC eſſe horizontalem.

COROLLARIUM 3.

205. Cum neceſſario aliquid aeris ſuper liquore in parte tubi vacua exiſtat, is vi elateris deorſum nititur (§. 26), adeoque aſcenſui liquoris reſiſtit. A liquore aſcendente comprimitur (§. 17). Quare elater ipſius augetur (§. 71) ab actione caloris forte ulterius intendendus (§. 146).

COROLLARIUM 4.

206. Cum experientia conſtet, remiſſiorem caloris gradum facilius cum ſpiritu vini in globo communicari, quam vehementiorem; rarefactiones ſpiritus vini viribus productricibus proportionales non ſunt, inprimis cum & vehementior caloris gradus plus liquoris in tubulo offendat, quam remiſſior, cui tamen facilius communicari poteſt calor, quam in globo ſtagnanti. Thermoſcopium adeo Florentinum, accedente inprimis reſiſtentia inæquali (§. 204. 205), thermometrum non eſt (§.196).

SCHOLION 1.

207. Hallejus *autor eſt, ſe didiciſſe ex iis, qui ſpiritum vini diu aſſervarunt, quod is ſucceſſu temporis partem vis expanſivæ amittat* (g). *Sed meretur res accuratiori examini ſubjici, vi eorum, quæ de legibus experientiarum alibi tradidimus* (h).

SCHOLION 2.

208. *Varii variis modis gradum fixum caloris ac frigoris quæſiverunt, a quo utrimque gradus reliqui computentur, ut obſervationes eodem vel diverſo tempore in pluribus locis factas conferre inter ſe liceat. Aliqui locum notant, in quo liquor hieme hæret, dum aqua congelare incipit, iterumque alterum tempore æſtivo, dum butyrum juxta globum thermoſcopii poſitum liqueſit. Spatium intermedium in duas partes æquales dividunt, quod diviſionis punctum in ipſorum graduatione calori temperato reſpondet. Partem utramque in 10 gradus ſubdividunt, tandemque quatuor iſtiuſmodi gradus infra gradum congelationis aquarum, quatuor itidem ſuper gradum liquationis butyri transferunt. Notandum vero diviſionem fieri thermoſcopio in umbra collocato, & ne obſervationes turbentur, verſus eandem conſtanter plagam inſtrumentum dirigi debere, quam reſpiciebat, cum divi-*

(g) Transact. Anglic. n. 197. p. 650.
(h) Act. Erud. A. 1708. p. 163. & ſeqq. conf. Logica §. 664. & ſeqq.

diviſio abſolveretur. Enimvero ſupponunt, congelationi aquæ cujusvis eundem gradum frigoris & liquationi butyri cujusvis eundem gradum caloris reſpondere, ac ſingula thermoſcopia ab eodem caloris vel frigoris gradu easdem recipere impresſiones. Poſterius autem fallere non ignorant, qui experientia edocti, thermoſcopia eidem parieti affixa non eundem conſtanter caloris gradum oſtendere, utut eadem utrique graduatio fuerit applicata. Et valde vereor, ne primum cum cura examinaturi contrarium ſimiliter experiantur. Differunt enim aquæ inter ſe, differunt inter ſe butyra: id quod vel ſola gravitatis ſpecifica variatio monſtrat, ut alia taceamus, quæ meditantibus & experimentantibus ſe offerent.

SCHOLION 3.

209. *Suadent alii, ut globus thermoſcopii nivi vel glaciei multo ſale conſperſa immittatur, & gradus, ad quem ſpiritus ſubſiſtit notetur. Hinc thermoſcopium in cellam profundam transferunt, quorſum aëris externi nihil pertingit, ut actionem aëris temperati recipiens gradum caloris temperati indicet. Denique ſpatium intermedium in 15 vel plures partes æquales dividunt, etiam ſupra gradum caloris temperati transferendas, ut graduatio integra abſolvatur. Sed ne non urgeam, quæ in ſcholio præcedente jam abunde dicta ſunt, quis quæſo reſpondeat quærenti: an omni nivi idem ſit frigoris gradus? An omni ſali eadem vis corrodendi lamellas nivis glaciales? Suppono enim, frigus a ſale nivi permixto produci, quatenus corrodit lamellas glaciales & abraſis ſuperficieculis earundem interiorem nucleum ſumme frigidum corporibus frigefaciendis applicari facit.*

SCHOLION 4.

210. *Celeberrimus* Hallejus *pro termino fixo aſſumit eum caloris gratum, quo ſpiritus vini ebullire incipit. Enimvero jam ſupra monuimus, quænam ratio ſit ſuſpicandi, forte nec hunc gradum eſſe usque adeo fixum. Et licet poſt ipſum* Amonton (i) *retinuerit ipſum gradum caloris, qui aquæ ebullienti convenit, dum thermoſcopium Mercuriale conſtruit, & poſtea* (k) *hujus ope thermoſcopio Florentino talem graduationem applicari docuerit, quæ ab eodem caloris gradu reliquos computat: id tamen dubii remanet; cum diverſa ſit aquarum gravitas ſpecifica, quæ maſſæ ac texturæ diverſitatem arguit, num calor aquarum ebullientium omnium idem ſit: unde operæ pretium facient rerum naturalium ſcrutatores, ſi factis accuratis experimentis inquirant, quinam ſit gravitatis fluidorum ſpecifica ad calefactionem eorundem reſpectus.*

SCHOLION 5.

211. *Nondum excipere licet, iſtiusmodi minutias in praxi non eſſe attendendas: neque enim hactenus demonſtratum, quod irregularitates a cauſis memoratis pendentes ſint minutiæ. Lis igitur adhuc pendens nonniſi pluribus experimentis a pluribus præſertim pluribus in locis factis dirimenda.*

SCHO-

(i) Memoir. de l'Acad. Royal. des Scient. A. 1702. p. m. 210. & ſeqq.
(k) Memoir. de la meme Academ. A. 1703. p. m. 63. & ſeqq.

SCHOLION 6.

212. Carolus Renaldinus (l) *tradit modum integram graduationem methodo experimentali determinandi, ut habeantur gradus inæquales æqualibus gradibus caloris, dum intenditur, reſpondentes, quam collectores Actorum Eruditorum Lipſienſium* (m) *his verbis deſcribunt:* „ Capiatur tubus gracilis, longitudinis circiter quatuor palmorum, cum annexa bulla, eique infundatur ſpiritus vini tantum, ut ſphærula glacie circumdata omnino repleatur, neque tamen aliquid redundet, orificiumque tubi ſigilletur hermetice. Deinde parentur ſex vaſa, quorum quodlibet aquæ libram & aliquid amplius poteſt recipere, & in primum infundantur aquæ gelidæ unciæ 11, in ſecundum unciæ 10, in tertium 9 & ſic porro. His peractis thermometrum mergatur in vas primum eique affundatur aquæ ferventis uncia una, obſerveturque quo usque aſcendat ſpiritus in collo & locus unitate notetur. Porro transferatur in vas ſecundum, cui injectæ aquæ ferventis unciæ duæ denuoque notetur locus, ad quem aſcendit ſpiritus, noteturque binario & ſic deinceps. Quodſi cui placeat ulterius procedere, donec tota aquæ libra ſit inſumta, perfectius erit inſtrumentum elaboratum, nempe duodecim numeris aut aſteriſcis diſtinctum, quibus caloris termini denotantur.

SCHOLION 7.

213. *Facile incautis imponere poterat* Renaldinus, *ut ſibi perſuaderent, hac ratione exactam caloris menſuram obtineri. Habes enim duodecim caloris gradus & effectus reſpondentes gradui uni, duplo, triplo, quadruplo &c. Unde viciſſim cognoſcentur gradus ſimpli, dupli, tripli, quadrupli &c. caloris. Dabitur igitur ratio caloris hujus diei ad calorem cujuscunque alterius, conſequenter calorem metiri licet* (§. 23. Geom.). *Atat! non nimis confidenter pronunciandum. Examinemus, quæſo, ſuppoſita, ne forte aliquid eſſe ponamus, quod non eſt, ſicque erroneam concluſionem pro vera eliciamus. Supponitur, nos habere gradum caloris ſimplum, ſi 11 unciis aquæ gelidæ affundatur una ferventis; gradum duplum, ſi 10 affundantur duo; triplum, ſi 9 tres; quadruplum, ſi 8 quatuor &c. affundantur. Supponitur porro calorem ſimplum vi ſimpla, duplum dupla, triplum tripla, quadruplum quadrupla &c. uniformiter agere in ſpiritum vini in globo contentum. Supponitur denique, ſi idem effectus in thermoſcopio a calore aeris ambientis producitur, qui ab aqua calida producebatur, aeri eundem competere caloris gradum qui aquæ conveniebat. Enimvero nullum ex his ſuppoſitis verum eſt. Quod enim primum attinet, concedamus interea, calorem aquæ ferventis, ſi frigida affundatur, per hanc æqualiter diſtribui. Diſtribuentur adeo unus caloris gradus per partes undecim; duo per 10; tres per 9; quatuor per 8 &c. Si itaque aſſumamus æqualia iſtarum aquarum volumina, e. gr. Singularum par-*

(l) in Philoſ. Nat. diſſert. 16. ſect. 12.
(m) Supplement. Tom. 2. ſect. 10. p. 453.

partes duodecimas, non erit calor duplus in altero, triplus in tertio, quadruplus in quarto caſu &c. Fallit ergo ſuppoſitum primum. Sed non minus fallit alterum: neque enim calor aquæ ferventis per frigidam, cui affunditur, æqualiter diffunditur; nec calor aquæ calidæ in ſpiritum vini uniformiter agit, id eſt, eadem vi per omne tempus actionis ſuæ. Prius experientiam vulgi non fugit, ut adeo id aliis experimentis & rationibus confirmari non opus ſit. Poſterius facillime oſtenditur. Notum nimirum eſt, requiri aliquod temporis ſpatium, antequam calorem ſuum cum ſpiritu vini per globum vitreum communicet aqua calida. Sed per totum illud temporis ſpatium eundem calorem aqua non retinet, cum eum continuo exhalet. Nequaquam igitur habentur effectus veri graduum caloris ſimpli, dupli, tripli, quadrupli &c. ſi vel maxime efficeretur, ut calor in aquis diverſis ſub initium immerſionis globi eſſet nunc ſimplus, nunc duplus, nunc quadruplus &c. Calor denique ambientis aeris non modo in ſpiritum vini in globo, ſed & in tubo contentum agit, adeoque non iſtum modo, verum etiam hunc rarefacit. Immo nondum conſtat, num omnia fluida, in quibus idem eſt gradus caloris, eadem facilitate cum alio corpore calorem ſuum communicent: nec forte hæc diſquiſitio multum tractabilitatis promittit. Taceo alia, quæ hic urgeri poſſent. Sufficit ſatis conſtare, methodum Renaldinianam *ſuppoſitis niti partim precariis, partim manifeſto falſis, ut adeo ratio nulla ſit, cur vulgari diviſioni in partes æquales hæc in partes inæquales diviſio mechanica præferatur.*

SCHOLION 8.

214. *Cæterum quamvis mutationes thermoſcopii Florentini admodum ſenſibiles exiſtant, ita ut ſpiritus vini per notabile intervallum aſcendat, manu calida admota, iterumque deſcendat, ea remota; ubi tamen per inſigne intervallum tempore hiemali deſcendit, aſcenſus intervalla decrementis frigoris non ſatis reſpondent. E. gr. hoc ipſo* (n) *anno d.* 9. *Jan. h.* 8. *mat. liquor in thermoſcopio meo deſcenderat uſque ad* 72*mum gradum ſcalæ frigoris, cum conſueta phænomena frigus intenſum loquerentur: ſed cum d.* 18 *Jan. eadem hora tempeſtate jam multo mitiore ad gradum* 80*mum ſubſiſteret, hora tertia, qua nix & glacies ad priſtinum fluiditatis ſtatum reducebantur, ſpiritus ad* 72*mum hærebat. Scilicet ad eundem ſæpius gradum depreſſus cernitur liquor, cum tamen phænomena alia diverſitatem caloris ac frigoris inſignem manifeſto prodant. Imo interdum depreſſio ſpiritus major cum effectibus frigoris remiſſioris; minor vero cum effectibus multo intenſioris conjungi ſolet. Et hæc obſervantur, etiamſi thermoſcopium collocetur in loco, ad quem aeri externo liber patet aditus. Ratio phænomeni hæc mihi videtur. Experientia conſtat, frigore invaleſcente multum aeris ex fluidis expelli: id quod teſtantur veſiculæ tum ſuperficiebus vitrorum, in quibus continentur, adhærentes. Extra dubium itaque poſitum videtur, fri-*

(n) ſcilicet 1713, quo prima horum Elementorum editio prodiit.

frigore intenſo ex ſpiritu quoque vini in thermoſcopio aerem ejici & per tubi vacuam partem expandi. Cum adeo aer ambiens calidior rurſus redditur, incluſi elater augetur ſpirituique aſcenſuro reſiſtit (§. 146). *Quoniam vero per experimenta* Mariotti (o) *determinata quadam aeris quantitas in fluido ſalis inſtar diſſolvitur; aer a frigore expulſus creſcente calore ſenſim ſenſimque ſpiritui rurſus permiſcetur: quod antequam fiat, altitudines caloris incrementa indicantes ſemper erunt juſtis minores.*

EXPERIENTIA 6.

215. *Funem cannabinum ex duplici filo contortum humectavimus & longitudinem ejus notabiliter minui animadvertimus: ubi vero denuo exſiccabatur, ad priſtinam redibat dimenſionem. Multo autem brevior evadebat, ubi ſub aqua per aliquod tempus ipſum detinueramus. Huc pertinent, quæ* Schwenterum *expertum eſſe in Geometria* (p) *annotavimus. Et* Guilielmus Molyneux, *Armiger atque Societatis Dublinenſis Secretarius, iſtiusmodi funem humectatum cum appenſo pondere ſuſpendit, eumque pro ratione exſiccationis reſolvi animadvertit. Cum pelvim aqua calida plenam admoviſſet, aſcendente vapore funis denuo velociter contortus, eoque ceſſante rurſus reſolutus. Immo halitu oris octies aut decies repetito, funem contorqueri didicit celeriterque reſolvi admota prope uncum candela aut ferro ignito* (q).

COROLLARIUM.

216. Sola igitur humiditas aeris funium cannabinorum longitudinem notabiliter abbreviare, ipſosque funes arctius contorquere valet.

SCHOLION.

217. *Humor nimium dimenſionem funis ſecundum diametrum auget. Sed cum gyri ſpirales filorum contortorum fere in circulares abeant autopſia teſte, dimenſio ſecundum longitudinem decreſcit. Abbreviationis igitur cauſa non modo ab inſinuatione humoris in poros funium, ſed & inprimis a ſpirali eorundem textura petenda.*

EXPERIENTIA 7.

218. *Idem in nervo aliquo fidium, cujus longitudo erat* 1′ 14″ *circiter juxta menſuram Rhenanam, experti ſumus. Cum enim eundem duobus clavis utraque ſui extremitate alligatum juxta feneſtram apertam extendiſſemus & ope*

(o) Eſſay de le Nature de l' Air p. 97. & ſeqq.
(p) §. 129. p. 133.
(q) Philoſ. Tranſact. Anni 1685. n. 162. p. 1032. conf. Acta Erudit. A. 1686. p. 389. 390.

ope pauculæ ceræ indiculum ligneum applicaſſemus, per complures dies non ſine voluptate nervum contorqueri advertimus, cum ſole oriente ros decideret, ita ut fere ſemicirculum intra exiguum temporis intervallum indiculus deſcripſiſſe notaretur. Aſt Solis radiis illuſtratus nervus iterum reſolvebatur atque indiculum ultra terminum reducebat, in quo cum ſub ortum ſolis conſpexeramus, cum feneſtram cubiculi noctu clauſam primum aperiremus. Non tamen ſingulis diebus æquales indiculi itus redituſque notavimus. Eundem nervum ſub aqua demerſum ſenſibiliter contorqueri didicimus: ſatis enim celeres ejus intra aquam convolutiones notavimus, non ſecus acſi duo manibus prehendentes ejus extremitates ipſum vi contorquerent. Extracti ex aqua minorem longitudinem notavimus, quam cum eundem aquæ immitteremus, & radiis licet ſolaribus exſiccatus ad priſtinam longitudinem reductari vires eludebat.

SCHOLION.

219. *Similia ſe expertum teſtatur* Sturmius (r). *Non ignoro, quod alii* (s) *contrarium accidere affirmant; ſed quid alii experti ſint, mihi quidem haud conſtat, cum circumſtantias ſingulares non annotent. Mihi rem enarrare libuit, prouti eandem expertus ſum.*

PROBLEMA 45.

220. *Hygroſcopium conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Funem cannabinum aut nervum fidium AB juxta parietem extende ſuper rotula B alterique ejus extremo D pondus E alliga, cui infixus ſit ſtylus FG. Ta. II. Fig. 2.
2. Eidem parieti affigatur lamina metallica HI, in partes quotcunque æquales diviſa.

Dico hygroſcopium eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim humor funium & chordarum longitudinem ſenſibiliter abbreviet, humore autem rurſus exſpirato iterum reſolvat (§. 214); pondus humore aeris aucto aſendet, imminuto deſcendet. Et quoniam index FG in lamina HI ſpatium monſtrat, per quod pondus aſcendit, vel deſcen-

(r) in Colleg. Curioſ. part. 1. tent. 14. phæn. 5. p. 124. & ſeqq.
(s) Traitez des barometres, thermometres & notiometres p. 94.

ſcendit, intervalla vero aſcenſus & deſcenſus decrementis ac incrementis longitudinis funis aut nervi fidium ABD æqualia ſunt; inſtrumentum indicat, num dato hoc tempore aer plus alat humoris, quam alio habuit. Eſt igitur hygroſcopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

b. Si hygroſcopium ſenſibilius deſideres, funem aut nervum fidium circa plures trochleas A, D, E, F & G circumvolve & reliqua fiant ut ante. Perinde vero eſt, ſive partes funis AB, AD, DE, EF, FG ſint horizonti parallelæ, ut in ſchemate expresſimus, ſive ad eundem perpendiculares: prouti nempe quolibet in caſu commodum viſum fuerit.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum præcedente.

Aliter.

Tab. III. Fig. 22.

1. Funis cannabinus AC aut nervus fidium altera ſui extremitate unco ferreo A alligetur, altera vero C in centro tabulæ ligneæ EF horizontaliter poſitæ firmetur.
2. Prope C infigatur pondus plumbeum D unius circiter libræ cum annexa regula DG.
3. Ex centro C in tabula deſcribatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim funis cannabinus atque nervus fidium levi quodam humore aeris, qualem ſecum vehit halitus oris, imbutus velociter contorqueatur, eodem autem exhalante rurſus extemplo reſolvatur (§. 215. 218); evidens eſt, quod humore aeris aucto index quantitatem contorſionis vel reſolutionis monſtrare, conſequenter humiditatis & ſiccitatis incrementa indicare debeat. Eſt igitur inſtrumentum hygroſcopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. III. Fig. 23.

1. Funis cannabinus aut nervus fidium HI altero ſui extremo ſuſpendatur ex unco H.
2. Alteri extremitati I annectatur globus K unius circiter libræ.
3. Limbo pedamenti LM inſcribantur duæ peripheriæ circuli parallelæ & ſpatium intermedium in partes quotcunque æquales dividatur.

4. Glo-

4. Globo infigatur ſtylus NO, cujus extremitas O limbi diviſionem fere attingit.

Dico, hunc indicem incrementa humiditatis & ſiccitatis aeris oſtenſurum.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorſus eſt, quæ proxime præcedens.

Aliter.

Tab. III. Fig. 24: 1. Parentur ſubſcudes ſulcatæ AB & CD ex ligno quercino.

2. Intra crenas oppoſitas aptentur aſſerculi abietini AEFC & GBDH, ita ut ultro citroque facillime moveri posſint.

3. In extremitatibus ſubſcudium A, B, C, D clavis firmentur aſſerculi & inter utrumque relinquatur ſpatium EGHF, cujus latitudo EG unius circiter digiti.

4. In I firmetur lamina orichalcea dentata IK & in L rotula dentata, cujus axi in altera machinæ facie index inferatur.

5. Tandem ex centro axis in eadem facie deſcribatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim experientia teſte lignum abietinum humorem aeris facillime imbibat ac inde turgeſcat, humore autem rurſus exſpirato tabeſcat: ſi aeris humiditas augetur, aſſerculi AF & BH humore turgeſcentes propius ad ſe invicem accedunt; ſi illa rurſus minuitur, iidem aſſerculi tabeſcentes denuo a ſe invicem diſcedunt. Quoniam vero diſtantia aſſerculorum nec minui poteſt ſine rotulæ L convolutione, nec augeri; index monſtrabit incrementa humiditatis & ſiccitatis aeris. Eſt igitur machina conſtructa hygroſcopium (§. 197) Q. e. d.

Aliter.

Manoſcopium ſuperius deſcriptum in hygroſcopium abit, ſi globo evacuato E ſubſtituas ſpongiam, aut materiam quandam aliam, quæ humorem facile imbibit. Solet autem ſpongia primum aqua communi, deinde, ubi bonam partem rurſus exſiccata fuerit, aqua vel aceto, in quo aliquid ſalis Ammoniaci ſeu ſalis tartari diſſolutum fuerit, macerari atque in loco umbroſo denuo exiccari. Tab. II. Fig. 14

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim aer humidus evadit, ſpongia gravior reddita præponderat; ſi ille levior redditur, hæc rurſus altius tollitur experientia teſte, adeoque index incrementa & decrementa humiditatis indicat. Eſt ergo hygroſcopium (§. 197). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

221. *Omnia hygroſcopia, quæ hactenus deſcripta ſunt, ſenſim ſenſimque a perfectione ſua deficiunt, tandemque ab humiditate aeris parum aut nihil mutationis patiuntur. Uſus ultimi eſt magis diuturnus, quam cæterorum omnium.*

SCHOLION 2.

222. *In hygroſcopio ultimo* Gouldius (t) *loco ſpongiæ omnium maxime commendat oleum vitrioli, quod indies in tantum augeri obſervavit, ut intra ſpatium 57 dierum a tribus drachmis ad drachmas novem & 30 grana aſcenderet. Enimvero non annotat, num etiam humiditatem tam prompte rurſus dimittat, quam eam attrahit: de quo valde dubito, adeoque præſenti inſtituto oleum vitrioli minime congruum judico.*

SCHOLION 3.

223. *Cæterum quilibet me non monente videt, ſtructuram hygroſcopiorum multis modis variari poſſe.*

(t) in Actis Erudit. A. 1685. p. 315.

FINIS AEROMETRIÆ.

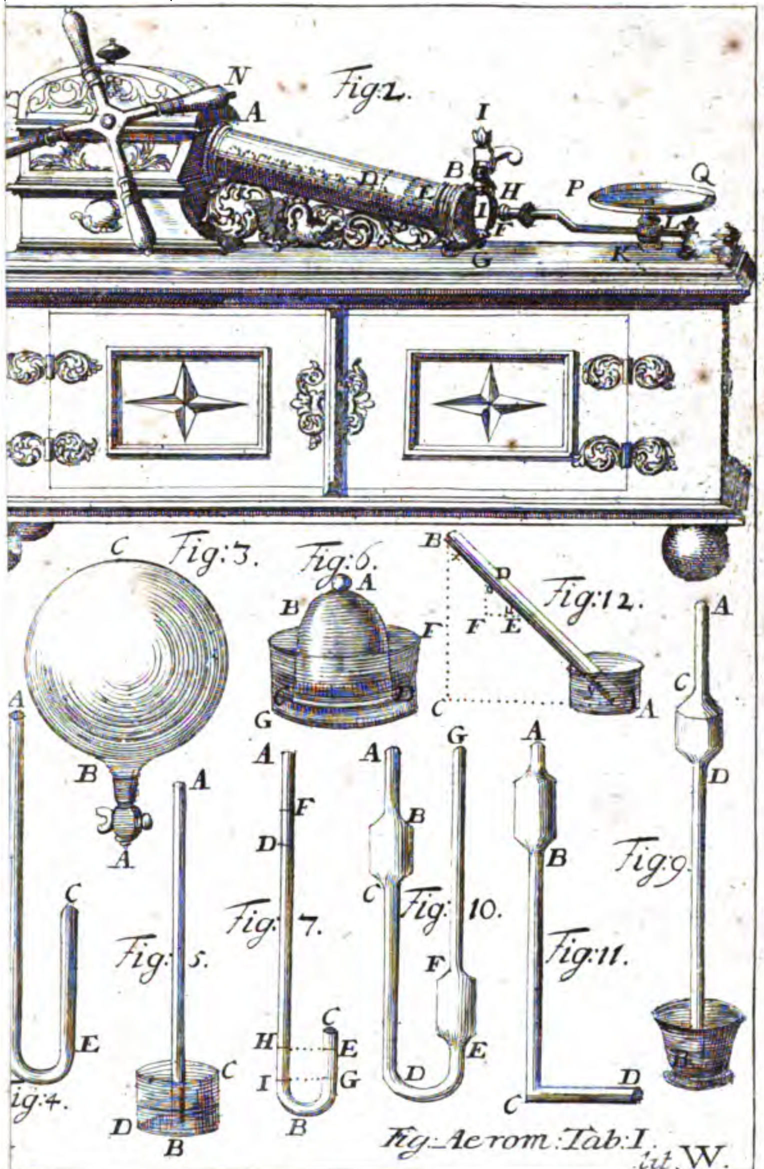


Fig: Aerom: Tab: I.

lit. W.

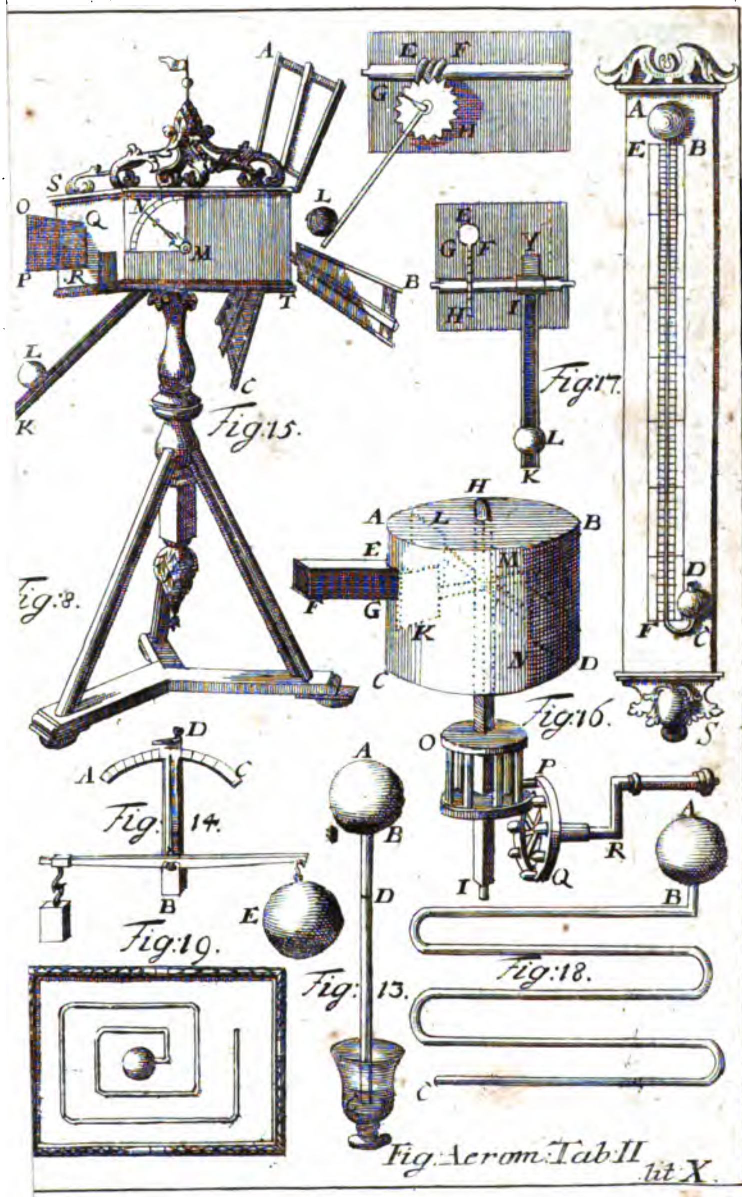


Fig. Aerom. Tab. II lit. X.

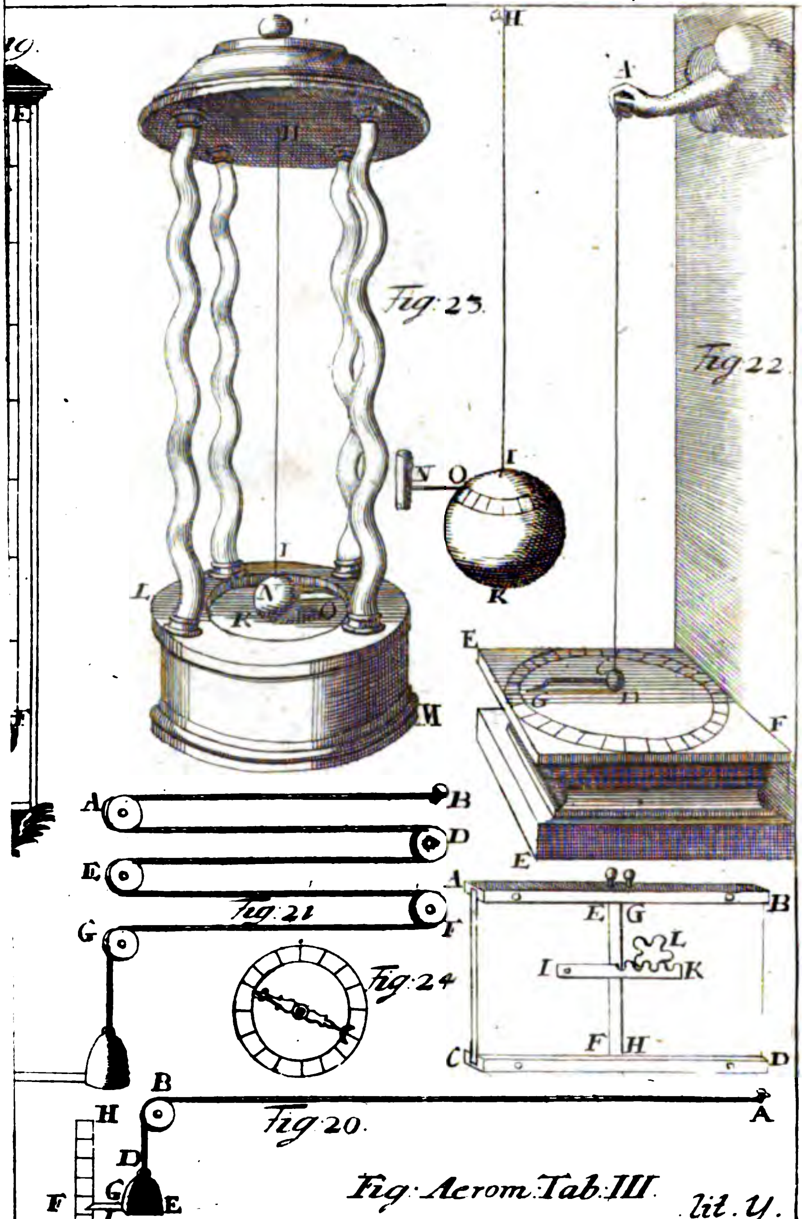


Fig: Aerom: Tab: III. lit. Y.

ELEMENTA
HYDRAULICÆ.

PRÆFATIO.

In Hydraulica non modo machinarum, quibus aqua elevatur, atque fontium ſalientium conſtructio edoceri debet; ſed explicandæ ſunt præterea leges motus corporum fluidorum. Quemadmodum vero argumentum prius ſtupenda diligentia jam olim excultum fuit, id quod vel ſoli libri ſpiritalium *Heronis* aperte loquuntur; ita diffiteri non poſſumus, in poſterore excolendo poſteris adhuc multum relictum eſſe, utut præclara jam dederint viri de Hydraulica optime meriti *Majottus*, *Caſtellus*, *Torricellius*, *Borellus*, *Guilielminus*, *Mariottus* & inprimis celeberrimus *Varignonius* (a). Immo ipſa machinarum Hydraulicarum conſtructio Matheſeos puræ opem adhuc flagitat. Dignum vero utrumque argumentum, quod indies magis magisque excolatur. Si enim machinas Hydraulicas fonteſque ſalientes ſpe-

(a) Memoires de l'Academie Royal. des Sciences A. 1703. p. 285.

ctes, de Hydraulica non inepte dixeris, quod vulgo de Poëtis ingeminari ſolet, quod non minus prodeſſe, quam delectare velit. Egregia ſcilicet vitæ humanæ commoda præſtat, dum varias vias oſtendit, per quas aqua ad locum datum derivari poteſt. Mirifice delectat, dum jucunda fontium ſalientium aliorumque admirandorum ſpectacula oculis objicit. Leges motus aquarum tum ad ſcientiæ naturalis, tum ad machinarum perfectionem tendunt: & ſi quando perfectam habebimus, motus fluidorum in corpore animali diſtinctius cognoſcetur, unde multa commoda in genus humanum redundabunt. Quamvis vero mihi potiſſimum propoſitum ſit, machinarum Hydraulicarum conſtructionem exponere & ad cauſas ſuas revocare; non tamen leges motus fluidorum prorſus inſuper habebo, ſed eas propoſiturus ſum, quæ ad ulteriorem diſquiſitionem viam ſternunt & præ reliquis ſcitu neceſſariæ ſunt. Has meditentur inprimis illi, quos rerum naturalium cognitio ſolidior juvat. Nemo autem ad Hydraulicam accedat, niſi notionem virium ex Mechanica, æquilibrium fluidorum ex Hydroſtatica; proprietates aeris ex Aerometria perſpexerit.

ELE-

ELEMENTORUM HYDRAULICÆ
CAPUT I.
DE
MOTU FLUIDORUM A GRAVITATE PENDENTE.

DEFINITIO 1.

1.

Hydraulica eſt ſcientia motus fluidorum, præſertim aquarum.

SCHOLION.

2. *Quare cum in Hydroſtatica explicetur æquilibrium fluidorum, ex ſublato autem æquilibrio motus naſcatur; Hydraulica Hydroſtaticam ſupponit. Unde contigit, ut nonnulli, qui de Hydraulica ſcripſere, hydroſtaticam cum ea conjunxerint.*

DEFINITIO 2.

ab. ig. 1. 3. Per *tubum* atque *Canalem* intelligo cylindrum quemcunque AB intus cavum.

DEFINITIO 3.

4. *Lumen* eſt apertura tubi.

DEFINITIO 4.

5. *Epiſtomium* vel *Clavicula* eſt inſtrumentum, quo lumen ad arbitrium obturari & aperiri poteſt.

SCHOLION.

6. *Quoniam in machinis Hydraulicis epiſtomis creberrimus eſt uſus, non inconſultum ducimus, ut ejus ſtructura hic exponatur.*

PROBLEMA 1.

Tab. I. Fig. 2. 7. *Epiſtomium vel claviculam conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Paretur ex orichalco cubus AB CD cum gemina tubi parte GH & EF, quarum altera GH cochlea inſtrui debet, ut ad arbitrium ad tubum vel vas firmari, iterumque ab eo removeri poſſit, aut ſi cochlea deſtituantur, tubo vel vaſi afferruminetur.

2. Cubus cylindrice excavetur, ut cavitati ejus immitti poſſit cylindrus ſolidus HI perforatus in K & in L matrice, in O manubrio inſtructus, ut per cavitatem cylindri trajectus mediante cochlea M in hoc ſitu firmari, & ope

ope manubrii O huc illucque verſari poſſit.

3. Perforetur ſimiliter uterque tubulus GH & EF.

Quodſi enim cylindrum ſolidum HI ita convertas, ut cavitas ejus K foraminibus tubulorum GH & EF reſpondeat, aqua in F effluere poteſt: ſi vero idem cylindrus HI ſoliditatem foraminibus iisdem obvertat, nihil aquæ egredi poterit, adeoque inſtrumeutum eſt epiſtomium vel clavicula (§. 5).

SCHOLION.

8. *Perfectiſſimam epiſtomii conſtructionem hic exponere lubuit. In praxi enim facile apparebit ex circumſtantiis ſingularibus, ſi qua omitti poſſint. Ita e.gr. communiter omittitur cochlea* M *cum matrice, qua cylindrum* HI *intra cavitatem cubi* AC *firmandum eſſe diximus. Neque cochlea* F *ſemper adeſt & tubus* GF *ſæpius horizontalis eſt.*

THEOREMA I.

Tab. I. Fig. 3. 9. *Locus* A, *ad quem aqua ex loco alio* B *ſive per alveum, ſive per tubos aut canales derivanda, humilior ſeu centro Telluris propior eſſe debet hoc ipſo altero.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aqua non fluat, niſi vi gravitatis, gravitas vero ſit niſus verſus centrum Telluris (§. 4. *Mechan.*): per alveum fluere nequit, niſi quamdiu ad centrum Telluris propius accedere poteſt. Neceſſe igitur eſt, ut locus, ad quem aqua per alveum fluere debet, centro Telluris propior ſit altero, unde derivatur. *Quod erat unum.*

Quodſi aqua per canales BC & CA derivari debet ex B in A, ita ut primum deſcendat ex B in C, deinde rurſus aſcendat ex C in A: ſit DE linea horizontalis per C ducta & BD atque AE ad eandem perpendicularis. Sit jam AE $<$ BD, preſſio aquæ in tubo BC major eſt preſſione aquæ in tubo AC (§. 34. *Hydroſt.*). Iſta igitur prævalet, adeoque aquam AC impellit per A effluxuram. Enimvero ſi AC $>$ BD; quamprimum aqua in tubo AC aſcendit ad altitudinem ipſi BD æqualem, alteri in tubo BC æquilibratur (§. 34. *Hyproſt.*), ab ea igitur ad ulteriorem aſcenſum ſollicitari nequit (§. 75. *Mechan.*) Sed vi gravitatis deorſum nititur verſus C (4. *Mechan.*), adeoque nec vi intrinſeca aſcendere poteſt. Ibi igitur ſubſiſtit, conſequenter aqua ex loco B in alium A per tubos aut canales recurvos derivari nequit, niſi A ſit humilior B. *Quod erat alterum.*

CO-

COROLLARIUM 1.

10. Cum alveus vel tubus BC, per quem aqua fluit ex B in C, ſit planum inclinatum (§. 258. *Mechan.*); ad aquas fluentes applicari poſſunt, quæ in Mechanica cap. 6. de deſcenſu gravium in plano inclinato demonſtrata ſunt.

COROLLARIUM 2.

11. Sunt igitur velocitates aquarum per diverſos tubos fluentium eodem tempore acquiſitæ ut tuborum longitudines reciproce (§. 302. *Mechan.*).

SCHOLION.

12. *Inſuper hic & in ſequentibus habemus reſiſtentiam, quæ oritur ex affrictu in fundo alvei & parietibus tubi* (§. 933. Mechan.).

PROBLEMA 2.

13. *Aquam ex loco uno derivare in alterum.*

RESOLUTIO.

1. Libelletur aqua (§. 912. *Mech.*) hoc eſt, inveſtigetur, quam propior centro Telluris ſit locus, ad quem aqua derivanda eſt, altero unde derivatur. (§. 904. *Mech.*)
2. Quodſi locus ille hoc humilior fuerit, non alia re opus eſt, quam ut aqua vel per canalem, vel per tubos declives ex loco excelſiore in humiliorem deducatur. prout vel magna, vel exigua ejus ſuppetit copia.
3. Ut aqua per intervalla nobis commoda viſa effundatur, extremum tubi epiſtomio muniatur (§. 5).
4. Et quia experientia teſte fontes naturales non omni tempore eandem aquæ copiam effundunt; non modo tubus capacior fieri debet, ſed & circa fontem alveus quidam muro includendus, ut aqua intra ipſum aſſurgens inferius in tubum ruentem fortius premat, ſicque per ipſum celerius fluat.
5. Si tubus vel canalis per intervalla ſufficientem aquæ copiam non præbeat, aut præbeat nimis tarde; aqua remoto epiſtomio continuo fluens intra puteum ex ſaxis exſtructum colligatur neceſſe eſt: qui tanto amplior vel profundior fieri debet, quo terminus ad quem fuerit termino a quo humilior.
6. Si denique aqua ad terminum infimum C delapſa rurſus aſcendere debet, deducenda eſt per canales inclinatos BC & CA, ita ut altitudo AE fuerit minor altitudine BD (§. 9). Tab. I. Fig. 3.

SCHOLION 1.

14. *Utimur autem in deducendis aquis tubis vel ligneis, vel plumbeis, vel argillaceis, aut canalibus lapideis. Luminis diameter in tubo ligneo eſt* 4, 5 *vel* 6 di-

6 digitorum pro quantitate aquæ effundendæ, conjunguntur autem annulo ferreo CD. *Tubi plumbeo locus eſt, ſi aqua in altum elevanda ad fontes ſalientes: neque vero ſanitati conducere deprehenſa eſt aqua, quæ per plumbeos fluit. Argillaceorum interior ſuperficies lithargyrio obducenda; immo & exterior, niſi ſumtibus parcas. Longitudo eorum eſt duorum aut unius & dimidii pedum, craſſities duorum digitorum, diameter luminis duorum aut trium. Commiſſuris pyxidatis conjunguntur, quæ calce viva oleo permixta obducuntur, ne noceat humiditas.*

Tab. I Fig. 4.

SCHOLION 2.

15. *In alveo, quem prope fontem conſtruxiſti, ita aptandus eſt tubus, ut aquam nec ex fundo, nec ex ſuperficie hauriat, quia prope fundum turbida, gravioribus quæ in aquam incidunt eundem petentibus, ſuperficiei vero inſecta aliæque impuritates leviores innatant. Solent etiam ad arcendas ſordes lumini canalis primo cribrum ferreum, ſed ſtanno obductum apponere, immo ad percolandam aquam turbidam ſpongiam. Ut aqua conſervetur limpida, alveum tecto aut fornice muniri præſtat.*

SCHOLION 3.

16. *Ne Aer interceptus curſum aquarum in canale intercipiat, ſed exitus ei concedi queat, atque canalis ipſe purgari poſſit, quoties opus fuerit; hinc inde eſt perforandus & obturaculo figuram coni truncati habente foramen obturandum.*

SCHOLION 4.

17. *Cæterum omni ſtudio in deducendis aquis vitandus eſt aquarum aſcenſus, quia aqua aſcendens majorem vim infert, quam deſcendens.*

PROBLEMA 43.

18. *Fontem naturalem arte conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. In loco elevato paretur foſſa aggeribus undiquaque cincta & variis meatibus ex cruſtis lapideis excitatis hinc inde diſtincta, qui omnes in unum hient exiguo foramine inſtructum.
2. Foſſa hæc deſuper ſilicibus, calculis & ad duos tresve pedes glarea operiatur, & quicquid aquæ pluvialis aliunde derivari poteſt, cum cura eo derivetur.

Ita enim per glaream & calculos in meatus deſtillabit aqua & filtrata ab exhalationibus immixtis purgabitur, atque per orificium meatus ultimi ad radicem foveæ profluet.

SCHOLION

19. *Si intra meatus fovea tot aquæ non contineatur, ut perennis fluat, orificio meatus ultimi tubus cum epiſtomio aptandus.*

THEO-

THEOREMA 2.

Tab. Fig. 20. *Si duo tubi æquales altitudines* AB & CD *atque æqualia lumina* E & F *habuerint, fuerintque ambo conſtanter pleni; æquali tempore æquales aquæ quantitates effundent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumina E & F æqualia ſunt & altitudines aquæ ſuper iisdem etiam æquales, *per hypoth.* aquæ luminibus proxime imminentes eadem vi premuntur (§. 42. *Hydroſt.*), adeoque æqualia volumina æqualem adhibent egrediendi conatum, conſequenter ſi aqua actu egreditur, æquali tempore æquales quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

21. Quoniam fundus tubi perpendicularis eadem vi premitur, qua fundus inclinati, ubi utriusque altitudo eadem fuerit, ipſique fundi inter ſe æquentur (§. 47. *Hydroſt.*); ſi tuborum utcunque inclinatorum, modo æquealtorum lumina fuerint æqualia, tubique conſtanter pleni, eodem tempore eadem aquæ quantitas effluet.

THEOREMA 3.

Tab. Fig. 22. *Si duo tubi æquales altitudines* AB, & CD, *ſed lumina inæqualia* E & F *habuerint, fuerintque conſtanter pleni, quantitates aquarum effluentium eodem tempore ſunt ut lumina* E & F.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur lumen majus diviſum in plura minora alteri E æqualia: per ſingulas majoris partes æquali tempore quantitates aquæ effundentur illi æquales, quæ per lumen minus effuuditur (§. 20). Sunt adeo quantitates aquarum per utrumque lumen tempore æquali effuſarum ut lumen minus ad numerum partium, in quas diviſum concipitur majus, hoc eſt, ut lumen minus ad majus (§. 86. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

23. Si lumina fuerint circularia: quantitates aquæ eodem tempore ex tubis æque altis & conſtanter plenis effuſæ ſunt in ratione duplicata diametrorum luminis (§. 409. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

24. In tubis etiam inclinatis æque altis, quantitates aquarum eodem tempore effluentium ſunt in ratione duplicata diametrorum. Patet eodem modo, quo corollarium theorematis præcedentis (§. 21).

SCHOLION.

25. *Legem hanc experimentis non*

exacte reſpondere autor eſt Mariottus (a). *Obſervavit enim, ſi diameter luminis* F *erat diametri luminis* E *dupla, ex tubo minore plus quam quartam aquæ ex majore effluentis partem eodem tempore effundi, tuborum altitudine modica exiſtente. Enimvero in demonſtratione abſtrahimus ab omnibus obſtaculis accidentalibus, quæ irregularitatem inducere ſolent, qualia plura hic concurrunt. Scilicet altitudo aquæ ſuper lumine minor, quam ad latera vaſis: aqua enim in ea voluminis parte, quæ lumini reſpondet, cavitatem aſſumit, cum effluenti nonextemplo alia a lateribus ſuccedere valet. Quoniam vero hoc decrementum altitudinis majus eſt in tubo majore, quam in minore, preſſura quoque ſeu exeundi conatus minor erit in majore, quam in minore* (§. 44. Hydroſt) *Porro dum aqua ſuperior effluentis locum occupare nititur, vim, qua premit, ad deſcendendum impendit, non ad premendum. Unde denuo conatus ad exeundum minuitur. Tandem hic quoque habenda eſt reſiſtentia aeris & affrictus aquæ in ſuperficie tubi & orificio inprimis ratio. Enimvero omnia illa impedimenta ad certas leges nondum revocata: immo hactenus nequidem conſtitutum eſt, quodnam eorum in caſu quolibet dato prævaleat.* Dechales (b) *affrictus unice rationem habens, in aqua effundenda prærogativam majoribus luminibus tribuit, quia proportionaliter minorem ſuperficiem habent, cum tamen ex modo dictis pateat, Mariottum prorſus contrarium expertum eſſe. Ipſe vero* Mariottus (c) *non diffitetur, dari ſubinde cauſas, quæ multas irregularitates inducant, ita ut nunc majoribus, nunc minoribus luminibus in aqua effundenda tribuenda ſit prærogativa, & aſſertum ſuum experimentis confirmat.*

THEOREMA 4.

26. *Si duorum tuborum conſtanter plenorum* AB *&* CD *lumina* E *&* F *æqualia fuerint; quantitates aquarum eodem tempore effluentium ſunt ut celeritates.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. aquam ex tubo AB effluere ea celeritate, quæ ſit ad alteram ex tubo CD effuſæ in ratione dupla. Quia hic tantum ratio habetur motus inſtantanei per foramen; motus aquæ ut æquabilis conſiderari poteſt, adeoque celeritates erunt ut ſpatia eodem tempore percurſa (§. 33. *Mechan.*). Quodſi ergo filum aliquod aquæ in tubo AB extenderetur uſque ad G; filum ex altero uſque ad I: erunt longitudines EG & IF in ratione dupla ſeu celeritatum. Enimvero quantita-

(a) Tract. du mouvement des Eaux part. 3. diſc. 1. p. 267.
(b) in Tract. de fontibus naturalibus prop. 30. f. 132. Tom. 3. Mund. Mathem.
(c) loc. cit. diſc. 2. p. 276.

titates aquarum eodem tempore effluentium ſunt ut fila iſta ſeu cylindri EG & FI: quorum baſes E & F cum æquales ſint, *per hypoth.* altitudinum EG & FI rationem habent (§. 573. *Geom.*). Sunt adeo etiam quantitates aquarum effluentium ut celeritates (§. 167. *Arith.*(*Q. e. d.*).

THEOREMA 5.

ab. ig. 27. *Si duo tubi habuerint lumina* E & F *æqualia, ſed altitudines* AB & CD *inæquales, fuerintque conſtanter pleni, quantitas aquæ effluentis ex majore* AB *erit ad quantitatem aquæ effluentis ex minore* CD *eodem vel æquali tempore, in ratione ſubduplicata altitudinum* AB & CD.

DEMONSTRATIO.

Cum vires aquas per lumiua E & F expellentes ſint gravitates abſolutæ aquarum luminibus imminentium; ob luminum æqualitatem *per hypoth* altitudinum AB & CD rationem habent (§. 573. *Geom.*). Sed quia gravia tantum prementia ſunt vires mortuæ (§. 9. *Mechan.*), ſi quantitates aquarum eodem tempore effluentium fuerint ut A & a, celeritates ut C & c; erunt vires ut A. C ad $a. c.$ (§. 278. *Mechan.*), conſequenter A. C ad $a. c = AB:CD$ (§. 167. *Arithm.*) Eſt vero etiam $A:a = C:c$ (§. 26), adeoque (cum porro ſit $A:a = A:a$) $A.C:a.c = A^2:a^2$ (§. 185. *Arithm.*). Quare $A^2:a^2 = AB:CD$ (§. 167. *Arithm.*) & hinc $A:a = \sqrt{AB}:\sqrt{CD}$ (§. 124. *Analyſ. finit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

28. Altitudines aquarum AB & CD per æqualia lumina E & F effluentium ſunt in ratione duplicata ipſarummet aquarum eodem tempore effuſarum.

COROLLARIUM 2.

29. Et quia quantitates aquarum fluentium ſunt ut velocitates (§. 26); velocitates quoque erunt in ratione ſubduplicata altitudinum.

PROBLEMA 4.

30. *Data ratione aquarum effluentium per utrumque tubum* AB & CD *una cum altitudine unius, invenire altitudinem alterius.* Tab. I. Fig. 7.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad numeros, quæ rationem aquarum effluentium exprimunt & radicem altitudinis datæ numerus quartus proportionalis (§. 302. *Arithm.*)
2. Ducatur is in ſeipſum: erit factum altitudo CD quæſita (§. 28).

SCHOLON 1.

31. *Cum ex altitudine data rariſſime radicem perfectam extrahere liceat, ut altitudo quæſita exacte inveniatur, per regulas Arithmetica irrationalium operandum. Sit e. gr. ratio data* 3:5, *altitudo data* 7, *reperietur radix altitudinis quæſita* $5\sqrt{7:3}$. *Unde habetur altitudo ipſa quæſita* $\frac{25}{9}\cdot 7 = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$.

SCHOLION 2.

32. *Quodſi cui leges Algorithmi irrationalium non fuerint perſpecta, is faciat ut* 3 *ad* 5 *ita* 7 *altitudo data ad numerum quartum proportionalem* $\frac{35}{3}$ *& porro ut* 7 *ad* $\frac{35}{3}$ *ita* $\frac{35}{3}$ *ad altitudinem quæſitam, quæ ut ante* $= \frac{5\cdot 35}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$. *Sit enim univerſaliter* $3:5 = a:b$, $7 = c$; *reperietur per reſolutionem proplematis altitudo quæſita* $= b^2c:a^2$. *Sed quarta proportionalis ad* a, b *&* c *eſt* $bc:a$ *& tertia proportionalis ad* c *&* $bc:a$ *eſt ut ante* $b^2c:a^2$. *Unde patet inferri poſſe,* ut quadrata numerorum datam rationem aquarum effluentium exprimentium, ita altitudo data ad quæſitam: *id quod etiam ex demonſtratione theorematis quinti* (§. 27) *liquet. Atque hac analogia commodiſſime utuntur, qui a tricis algorithmi irrationalium ſibi metuunt.*

PROBLEMA 5.

33. ***Data ratione altitudinum tuborum conſtanter plenorum & per æqualia lumina aquas effundentium, una cum quantitate aquæ ex uno effuſa, invenire quantitatem aquæ eodem tempore ex altero effluentem.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad altitudines datas & quadratum quantitatis aquæ per lumen unum effuſæ numerus quartus proportionalis (§. 302. *Arithm.*), qui erit quadratum quantitatis aquæ per lumen alterum effluentis (§. 28).
2. Inde itaque ſi radicem quadratam extrahas (§. 269. *Arithm.*) prodibit ipſa quantitas aquæ quæſita.

E. gr. Sint altitudines tuborum ut 9, ad 25, quantitas aquæ ex uno tubo effuſa trium pollicum; erit quantitas aquæ ex altero effluens $= \sqrt{(9\cdot 25:9)} = \sqrt{25} = 5$.

THEOREMA 6.

34. *Si duorum tuborum conſtanter plenorum altitudines* AB *&* CD *fuerint inæquales, lumina* E *&* F *itidem inæquales; erunt quantitates aquarum eodem tempore effluentium in ratione compoſita ex ſimplici luminum & ſubduplicata altitudinum.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Sit altitudo communis duorum tuborum lumina inæqualia L & *l* habentium $= a$, quantitates aquarum eodem tempore effluentium ſint P & *q*. Porro altitudo tubi tertii $=$ A, lumen $=$ L, quantitas

tas aquæ dato tempore effluentis Q : erit

$P : q = L : l$ (§. 22).

$Q : P = \sqrt{A} : \sqrt{a}$ (§. 27).

Ergo $PQ : Pq = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 213. *Arithm.*)

Unde $Q : q = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 180. *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

35. Si $Q = q$; erit $L\sqrt{A} = l\sqrt{a}$, conſequenter $L : l = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 299. *Arithm.*) & $L^2 : l^2 = a : A$ (§. 260. *Arithm.*), hoc eſt, ſi quantitates aquarum ex duobus tubis conſtanter plenis & altitudines atque lumina inæqualia habentibus eodem tempore effluentes fuerint æquales; lumina ſunt reciproce ut radices altitudinum, altitudines vero in ratione reciproca quadratorum luminum.

THEOREMA 7.

Tab. I. Fig. 5.

36. *Si altitudines duorum tuborum conſtanter plenorum* AB *&* CD *æquales fuerint, aquæ per lumina* E *&* F *utcunque inæqualia eadem celeritate effluunt.*

DEMONSTRATIO.

Illud per ſe patet, ſi præter altitudines etiam lumina fuerint æqualia, aquam ex utroque tubo eadem celeritate egredi, cum nulla adſit diſparitatis ratio. Concipiamus itaque lumen majus diviſum in partes quotcunque, quæ ſingulæ minori lumini æquales ſint. Quoniam aqua, quæ per partem luminis movetur, non aliter movetur, ac ſi per reliquas nihil flueret, cum impetus totus pendeat a preſſione perpendiculariter imminentis (§. 225. *Mechan.*); evidens eſt, eandem in ſingulis partibus lumini minori æqualibus eadem celeritate moveri, qua fertur per lumen minus. Aqua igitur per totum lumen majus eadem celeritate fluit, qua per minus. *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

37. *Si altitudines tuborum conſtanter plenorum* AB *&* CD, *itemque lumina* E *&* F *inæqualia fuerint; celeritates aquarum effluentium ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Sint altitudines trium tuborum a, a & A, lumina eorundem L, l & L, velocitates aquarum effluentium u, v & c. Quia $L = L$; erit $u : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 29). Eſt vero $a = a$, *per hypoth.* adeoque $\sqrt{a} = \sqrt{a}$. Ergo $u : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168. *Arithm.*) Porro ob $a = a$, *per hypoth.* etiam $u = v$ (§. 36). Ergo $v : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168. *Arithm.*) *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM 1.

38. Cum altitudinibus inæqualibus exiſtentibus aquarum per æqualia lumina fluentium celeritates ſimiliter ſint in ratione altitudinum ſubduplicata (§. 29), hæc vero ratio æqualis fit, ſi altitudines æquales; patet in genere celeritates aquarum ex tubis conſtanter plenis effluentium eſſe in ratione altitudinium ſubduplicata.

COROLLARIUM 2.

39. Quadrata igitur velocitatum ſunt ut altitudines (§. 260 *Arithm.*).

SCHOLION.

40. Mariottus (d) *multiplici experimento docuit, ſi ad vas* ABCD *applicetur tubus* EF, *plus aquæ per tubum æquali tempore effluere, quam per idem lumen vaſis* E, *tubo remoto, & motum aquæ eo magis accelerari, quo tubus* EF *longior. Cum altitudo vaſis* AC *eſſet unius pedis, tubi vitrei* EF *longitudo trium pedum, diameter luminis trium linearum; intervallo unius minuti effundebantur* $6\frac{1}{8}$ *ſextarii aquæ, tubo autem remoto nonniſi* 4 *circiter. Cum longitudo tubi* EF *eſſet 6 pedum, diameter luminis* F *unius digiti, aqua omnis intra* 37 *minuta ſecunda effluxit. Cum vero tubi dimidium* FH *reſcinderetur, vas integrum intra* 45''; *tubo prorſus remoto intra* 95'' *evacuatum eſt. Tubo nimirum applicato altitudo aquæ incumbentis & egreſſum orificio tubi proxime urgentis major eſt, adeoque motus aquæ magis acceleratur.*

THEOREMA 9.

41. *Si duo tubi* AB *&* CD *fuerint ejuſdem altitudinis & lumina* E *atque* F *æqualia habuerint; tempora, quibus deplentur, ſunt in ratione baſium.*

DEMONSTRATIO.

Sit baſis tubi CD dupla baſis tubi AB. Quoniam altitudines æquales ſunt *per hypoth.* quantitates aquarum in tubis contentæ baſium rationem habent (§. 573 *Geom.*), adeoque ex hypotheſi aqua in tubo CD dupla eſt aquæ in tubo AB. Concipiatur altitudo utriusque tubi in partes infinite parvas diviſa, erit cylindrulus ejusmodi altitudinis in tubo majore CD duplus cylindruli in tubo minore AB. Uterque autem in utroque tubo eadem celeritate per lumen ejicitur (§. 36) & quia lumina æqualia ſunt *per hypoth.* eædem quantitates aquæ eodem inſtanti fluunt per utrumque lumen. Ergo eodem tempore, quo cylindrulus HI effluit, nonniſi dimidium alterius LK ejicitur: ut adeo alterum dimidium expellatur opus eſt inſtanti altero. Tempuſcula itaque, quibus cylindruli HI & LK effluunt, ſunt in ratione ſubdupla, nempe ut

(d) Traité du mouvement des eaux part. 3, diſc. 6. p. 269. & ſeqq.

ut baſes tuborum AB & CD. Idem ſcum de ceteris eodem modo demonſtretur, patet tempora, quibus integri tubi evacuantur, eſſe in ratione baſium (§.187. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

Tab. 42. *Vaſa cylindrica & priſmatica* ABCD *ita deplentur, ut quantitates aquarum temporibus æqualibus effluentium decreſcant ſecundum numeros impares ordine retrogrado ſumtos.*

Fig.

DEMONSTRATIO.

Velocitas nempe libellæ FG deſcendentis continuo decreſcit in ratione ſubduplicata altitudinum decreſcentium (§. 38). Velocitas gravis deſcendentis creſcit in ratione ſubduplicata altitudinum creſcentium (§. 87. *Mechan.*). Talis igitur eſt motus libellæ FG ex G in B deſcendentis, ac ſi inverſa ratione ex B in G deſcenderet. Sed ſi ex B in G deſcenderet, æqualibus temporibus ſpatia creſcerent ſecundum numerorum imparium progreſſionem (§. 86 *Mech.*). Ergo ſecundum eandem progreſſionem inverſe ſumtam altitudines libellæ FG æqualibus temporibus decreſcunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

43. Libella igitur aquæ FG eadem lege deſcendit, qua vi impreſſa per altitudinem ipſi GB æqualem aſcenderet (§. 329. *Mechan.*)

SCHOLION.

44. *Ex hoc principio multa alia de motu fluidorum demonſtrari poſſunt, quæ nunc brevitatis gratia omittimus.*

PROBLEMA 6.

45. *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes ſingulis temporibus vacuandas, dato tempore, quo depletur totum, itemque tempore, quo depletur pars una.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Vas cylindricum, cujus omnis aqua intra 12 horas effluit, dividendum in partes ſingulis horis evacuandas.

1. Fiat ut pars temporis 1 ad tempus integrum 12 ita idem tempus 12 ad numerum quartum proportionalem 144.
2. Dividatur altitudo vaſis in partes 144 æquales. Dico ultimam cedere horæ ultimæ, tres proxime ſuperiores horæ penultimæ, quinque ulteriores horæ decimæ &c. 13 denique poſtremas horæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tempora creſcant in ſerie numerorum naturalium 1. 2.3. 4. 5.&c. altitudines vero, ſi numeratio ordine retrogrado fiat ab hora duodecima, creſcant in ſerie numerorum imparium 1. 3.5.7.9 &c. (§. 42); erunt altiitudnes ab hora undecima computatæ ut quadrata temporum 1. 4. 9. 16.25.&c. (§. 83. *Analyſ. finit.*). Quadratum ergo temporis integri 144. complectitur omnes altitudinis vaſis evacuandi partes. Sed numerus tertius proportionalis ad 1 & 12 eſt quadratum ipſius 12 (§. 246. *Arithm.*), conſequenter numerus partium æqualium, in quas altitudo dividenda, ſecundum ſeriem numerorum imparium per horarum intervalla æqualia diſtribuendus (§. 42). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

46. Cum partibus ejusdem vaſis ſubſtituere liceat vaſa minora ipſis æqualia; data altitudine vaſis intra datum temporis ſpatium deplendi, inveniri poteſt altitudo vaſis alterius intra tempus datum aliud evacuandi, faciendo nempe altitudines ut temporum quadrata.

SCHOLION.

47. *Patet ergo methodus clepſydras conſtruendi, quibus veteres uſos eſſe conſtat.*

THEOREMA 11.

48. *Aqua per foramen vaſis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ ſupra orificium.*

DEMONSTRATIO.

Si aqua per foramen vaſis vi ſolius gravitatis abſolutæ exiret, foret celeritas ejus ad eam, qua egreditur ab aqua ſupra orificium conſiſtente preſſa, in ratione ſubduplicata altitudinis iſtius aquæ tempuſculo infinite parvo per foramen exeuntis, ſeu, quod perinde eſt, altitudinis foraminis, & altitudinis aquæ ſupra orificium (§. 37). Enimvero ſi aqua eadem gravitate naturali caderet per altitudinem altitudini aquæ ſupra orificium æqualem, celeritas cadendo acquiſita foret itidem ad eam, qua vi gravitatis ejusdem per foramen exiret, in ratione ſubduplicata altitudinis aquæ ſupra orificium ad altitudinem foraminis (§. 87. *Mechan.*). Aqua igitur per foramen vaſis ea celeritate erumpit, quam cadendo ex altitudine aquæ ſupra orificium acquireret (§. 177. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

49. *Si aqua per tubum* KE *deſcendens per lumen* G, *cujus directio verticalis, proſiliat, ad eam alti-* Tab. I. Fig. 9.

altitudinem GI *aſcendit, ad quam libella aquæ* LM *in vaſe* ABCD *conſiſtit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen G, vi gravitatis columnæ EN impellitur; ea ipſius celeritas eſt, quam cadendo per altitudinem EN acquirit (§. 48) conſequenter ea ipſi vis eſt, qua ad altitudinem ipſi EN æqualem aſcendere valet (§. 322. *Mechan.*). Quare cum directio luminis ſit verticalis *per hypoth.* adeoque aquæ per lumen G prorumpentis directio itidem verticalis exiſtat, nec quicqnam ſit, quod eandem mutet extra tubum; aqua ſurſum feratur neceſſe eſt ad eam altitudinem GI ad quam libella aquæ LM in vaſe conſiſtit. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

50. *Experientia conſtat, aquam per lumen* G *proſilientem elevari ad altitudinem ipſa* GI *minorem. Conſtant præterea, lumen* G *eo minus eſſe debere, quo minor eſt altitudo libellæ* LM *in vaſe* ABCD. *Immo propriis experimentis didici, minus eſſe debere lumen, ſi mercurius ſalire debet, quam ut aqua ſaliat, conſequenter ſi fluidum majore vi urgetur, quam ſi minore: Inde vero non concluditur theorematis falſitas; ſed tantum colligitur, ſubeſſe impedimenta quædam, quæ aſcenſui reſiſtant. In ea igitur inquirendum.*

SCHOLION 2.

51. *Plerique præcipuam reſiſtentiæ cauſam aerem allegare ſolent, per quem aqua ſaliens aſcendit. Enimvero quamvis non negem, aeris reſiſtentiæ inter impedimenta locum aliquem eſſe concedendum, quæ obſtant, quo minus ad eam præciſe altitudinem aſcendat, unde decidit; cauſis tamen aliis majorem reſiſtentiæ totalis partem tribuendam eſſe, mihi quidem ſatis probabile videtur. Aquas enim in vaſe ab aere evacuato* (§. 40. Aerom.) *ſalientes non ulteriorem terminum attingere quam in libero aere, ubi altitudo aſcenſus unius circiter pedis ſit, vel etiam minor, iterato experimento didici: utut in hoc aqua ſaliens* FI *longe infra libellam aſcenſum ſiſteret. Illud autem obſervare licuit, aquam in vacuo minime in tot guttulas ramuloſque dividi, in quot in aere diſpergitur; ſed fere unitam verſus eam plagam defluere, verſus quam lumen* G *parumper inclinatur. Unde apparet, figuram aquæ verticaliter ſalientis magis ab aere reſiſtente immutari, quam celeritatem minui. In majoribus tamen ſaltibus, circa quos experimenta in vacuo capere non licet, aeris reſiſtentiam ſenſibiliorem eſſe puto. Ipſa enim aqua in guttulas ramuloſque diviſio fieri nequit, niſi aliqua celeritatis parte imminuta, quemadmodum ex regulis motus abunde conſtat.*

SCHOLION 3.

52. *Cæterum hinc mirum non eſt, quod regula* Mariotti *defectum altitudinis* GI *a perpendiculo aquæ computandi, quam reſiſtentia aeris potiſſimum ſuper-*

ſtruxit (e), *& quæ defectus iſti in ratione duplicata altitudinum eſſe perhibentur, non ſatis exacte experientia reſpondeat. Quoniam tamen ejus aliquis eſſe poteſt uſus; ideo non piget tabulam hic apponere, in qua altitudinibus aquarum ſalientium altitudines tuborum, per quos delabuntur, juxta illam aſſignantur, in pedibus quidem Pariſinis & ejus digitis ſeu partibus duodecimis.*

Altitudo aquarum ſalientium.	Altitudo tuborum.		Altitudo aquarum ſalientium.	Altitudo tuborum.	
5'	5'	1''	55	55'	121''
10	10	4	60	60	144
15	15	9	65	65	169
20	20	16	70	70	196
25	25	25	75	75	225
30	30	36	80	80	256
35	35	49	85	85	289
40	40	64	90	90	324
45	45	81	95	95	361
50	50	100	100	100	400

53. *Ego quidem multum tribuo gravitati aquæ aſcendentis, quia obſervavi quod argentum vivum ad minorem altitudinem elevatur, quam aqua. Nimirum guttarum anteriorum motus ſi langueſcit, poſteriores in eas incurrentes retardantur: id quod ipſiſmet oculis ſuis videre poterit, qui aquas ſalientes attentius contemplare voluerit. Atque inde eſt, quod, ſi lumen* G *angulo quantolibet exiguo inclinetur, ut aqua ſaliens a perpendiculo non admodum declinare videatur, ſaltus altitudo ſtatim major evadat. Huc pertinet, quod* Torricellius (f) *a ſe obſervatum annotavit.* „*Quando inquit, oppoſita manu foramen* G *penitus occluditur, deinde retracta quam citiſſime manu*
„ *repente aperitur: videbantur primæ* Tab. I. Fig. 9.
„ *& præeuntes guttæ altius pervenire,*
„ *quam ſit deinceps culmen* I, *poſtquam*
„ *aqua deorſum fluere cœperit. Addo quod diſperſionem in guttulas ipſa gravitas aquæ juvet.*

SCHOLION 5.

54. *Maximum autem impedimentum in affrictu poſitum eſt: unde lumen ſeu orificium* G *optime levigatum requiritur.*

SCHOLION 6.

55. *Quamvis autem lumen non nimis ingens eſſe debeat, ut ſufficiens aquæ copia conſtanter affluere poſſit, cum alias ſal-*

(e) Traité du mouvement des eaux part. 4. diſc. 1. p. 304. & ſeqq.
(f) De motu projectorum lib. 2. Oper. Geometr. p. 192.

ſaltus non modo minuatur, ſed prorſus impediatur; idem tamen nec nimis exiguum ſit neceſſe eſt. Experimur enim, aquæ ſalientis altitudinem majorem eſſe, ſi lumen majus, quam ubi minus fuerit. Certe Mariottus (g) *obſervavit aquam ſalientem per lumina in eadem linea horizontali ſita & in eodem tubo facta, quorum diametri erant unius, 4, 6, 10, 12 &c. linearum, notavitque altius aſcendere eam, quæ per majora egreditur, quam quæ per minora ejicitur.*

THEOREMA 13.

Tab. I. Fig. 10. 56. ***Aqua per tubum inclinatum* AB *vel per tubum quomodocunque inflexum* CD *deſcendens per lumen* G *ad eam altitudinem in* L *vel* M *aſcendit, ad quam aqua in vaſe* HK *ſubſiſtit.***

DEMONSTRATIO.

Aqua ad lumen G in tubo inclinato AB, vel inflexo CD eadem vi impellitur, qua impellitur ad lumen G in tubo NO (§. 34. *Hydroſt.*). Sed vi impreſſa per lumen iſtud aſcendit ad altitudinem altitudini libellæ ML æqualem (§. 49). Ergo etiam per lumen tuborum reliquorum ſaliens ad eandem altitudinem aſcendere debet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

57. *Veritatem theorematis experimento confirmaturus fieri curavi ex lamina ferrea ſtanno obducta vas* HK *figuram parallelepipedi habens. Ad fundum afferruminari juſſi quatuor tubos, quorum duo* NO & ST *ſunt ad fundum perpendiculares, ſed inæqualium diametrorum, tertius* AB *eſt inclinatus, quartus vero* CD *ex pluribus partibus diverſimode inclinatis compoſitus; omnes una ad fundum pelvis* RZ *aquam ſalientem excipientis afferruminati. Denique in* M & L *ad vas aptati ſunt tubuli inclinati, ut, ſi per canalem* ab *plus aquæ affluat, quam per lumina tuborum* G *ſalit, ſuperflua per eos effluat: quo artificio quoque utendum, ſi experiri volueris, quæ in antecedentibus de motu aquarum in tubis conſtanter plenis demonſtrata ſunt. Quamdiu igitur aqua eandem libellam* ML *tuebatur, altitudo ſalientium per omnes tubos erat eadem, neque augebatur, unius, duorum vel trium luminibus obturatis. Quodſi vero libella* ML *vel deſcenderet, vel obturatis tubulis in* M & L *aſcenderet; ſalientium quoque altitudines omnes æqualiter decreſcebant, vel augebantur.* Tab. I. Fig. 10.

THEOREMA 14.

58. ***Aquarum per lumen horizontale vel ad horizontem inclinatum* D *ſalientium longitudines* DE & DF, *vel* IH & IG, *ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum in vaſe vel tubo* AB & AC.** Tab. I. Fig. 11.

(a) Traité du mouvement des eaux part. 4. diſc. I. p. 303.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen D ejecta vi impreſſa per lineam horizontalem DF progredi nititur (§. 71. *Mechan.*), vi gravitatis autem deorſum tendit per rectas ad eam perpendiculares (§. 215. *Mechan.*), nec vis una alteram impedire poteſt, quia directiones non ſunt contrariæ; aqua a premente AB impulſa eodem tempore pervenit ad rectam IG ipſi DF parallelam, quo aqua a premente AC impulſa eandem attingit, ſuntque rectæ IH & IG ſpatia, quæ interea vi impetus impreſſi deſcrpſiſſent eædem aquæ. Sunt vero ſpatia IH & IG, quia motus per DF eſt uniformis (§. 490. *Mechan.*), ut celeritates (§. 33. *Mechan.*); celeritates in ratione ſubduplicata altitudinum AB & AC (§. 38): ergo longitudines quoque aquarum per lumina horizontalia vel inclinata ſalientium ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum (§. 167. *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

59. Cum in medio non reſiſtente omne corpus vel horizontaliter, vel oblique projectum parabolam deſcribat (§. 480. 482. *Mechan.*); aqua etiam per lumen horizontale, vel ad horizontem inclinatum ſaliens parabolam deſcribit.

COROLLARIUM 2.

60. Aqua igitur per plures tubos inclinatos, in eadem recta collocatos, ſaliens arcuatum opus efficit, ſub quo citra periculum madeſcendi deambulare licet, impetu, quo abripiuntur guttæ deſcenſum impediente.

SCHOLION 1.

61. *Jucundum admodum ſpectaculum præbent ejusmodi arcus aquei, dum radiis ſolaribus illuſtrati iridis coloribus ſuperbiunt.*

SCHOLION 2.

62. *Equidem tum aeris reſiſtentia, tum aquæ facilis diviſio impediunt, quo minus arcus ſint exacte parabolici; ſed qui ſpectaculo ad oblectandum in hortis deambulantes utuntur, parum curant, quamnam figuram opus arcuatum referat.*

CAPUT

CAPUT II.

DE MOTU FLUIDORUM VI AERIS CONTIGUI PRODUCENDO.

PROBLEMA 7.

63. *Conſtruere vas ad hortos irrigandos idoneum.*

RESOLUTIO.

Tab. Fig. 2. 1. Fiat vas cylindricum ABCD, exiguo orificio E inſtructum, ut digito appoſito claudi poſſit.

2. Fundus vaſis CD conſtet ex lamina exiguis foraminulis pertuſa.

Vel.

Tab. Fig. 3. Fiat vas ſphæricum HB collo tenui HE inſtructum, & heriſphærium DCB ſit ut ante foraminulis pertuſum.

Dico, ſi utrumque vas in aquam demergas, eam per foraminula fuudi intrare: ſi digito ad orificium E applicato vas extrahas, nihil aquæ effluere: ſi tandem digitum iterum removeas, aquam per foraminula inſtar roris ſtillare, adeoque ad hortos irrigandos adhiberi poſſe.

DEMONSTRATIO.

Si vas in aquam demergas, ut orificium E ultra libellam ejus extet, eo uſque per foraminula fundi implebitur, donec aqua in vaſe cum ambiente in eadem libella exiſtat (§. 34. *Hydroſt.*). Aſt ſi digito ad lumen E applicato idem extrahas, cum altitudo ejus unius alteriusve pedis longitudinem non excedat, & foraminula fundi adeo exigua ſint, ut juxta aquam effluentem aeri in vas aditus denegetur; aer ambiens impediet, quo minus quid piam aquæ effluere poſſit (§. 95. *Aerom.*). Si digitum removeas, aeris integra columna ab orificio E usque ad extremitatem atmoſphæræ extenſa in aquam in vaſe contentam & una cum aqua in aerem ad fundum AB gravitat. Quare cum preſſio aeris per orificium in aquam æqualis ſit reſiſtentiæ aeris ad fundum (§. 34. *Hydroſt.*); aquæ pondus hanc ſupera-

perabit, adeoque ea per fundum vaſis rorabit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

64. *Siphonem conſtruere, hoc eſt, inſtrumentum, cujus ope liquor ex vaſe hauriri poteſt.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 14. Conſtruatur vas FE, cujus pars media ABCD figuram cylindri, extremæ autem AFB & CED figuram conorum truncatorum habeant: ſintque orificia F & E utrinque aperta, nec majora, quam quæ digito appoſito commode claudi posſunt.

Dico, ſi vas in liquorem demergas, fore ut eodem repleatur, etſi ſuperius orificium F exſtet: ſi digito ad F applicato extrahatur, fore ut per lumen E nihil effluat: ſi denique digitum removeas, fore ut totus effluat.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis præcedentis.

Aliter.

Tab. I. Fig. 15. Cum globo AB connectantur duo tubuli graciles CD & EF arbitrariæ longitudinis, quorum lumina D & F ſint aperta.

Dico, ſi tubuli EF extremum liquori immergas & aerem ex vaſe per tubulum CD exſugas, liquorem in globum AB aſcenſurum. Quodſi jam digito ad lumen D applicato ſiphonem extrahas, fore ut nihil effluat: aſt ſi digitum removeas, fore ut totus liquor per tubulum EF rurſus exeat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aerem exſugis, perinde eſt, ac ſi vaſis ab aere evacuati orificium F in liquorem demergas, adeoque liquor in globi AB cavitatem aſcendere debet (§. 101. *Aerom.*). Quodſi digito ad orificium D applicato ſiphonem extrahas, liquor ex eo per lumen F effluere nequit (§. 95. *Aerom.*) Quamprimum vero digitum ab orificio D removes, cum in F tantum reſiſtat pondus atmoſphæricum, liquor autem præter vim gravitatis ab eodem pondere atmoſphærico per tubulum DC impellatur; reſiſtentia a vi majore utique vincetur adeoque liquor per F effluet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

65. *Siphone ſecundo commode utimur ad fluida ſpecifice leviora a gravioribus, quibus innatant, ſeparanda: unde Chymicis ſubinde non contemnendum prabet uſum.*

PROBLEMA 9.

66. *Siphonem conſtruere, cujus ope*

ope totus liquor ex vaſe quolibet in aliud quodcunque educi poteſt.

RESOLUTIO.

Fiat tubus recurvus ABC, ita ut orificio A in plano horizontali poſito altitudo minoris DB 31. pedes nunqnam excedat. Ad communes uſus altitudo dimidii, aut unius vel alterius pedis ſufficit. Quodſi brachium minus AB liquori immergatur & per lumen C aer exſugatur, liquor ex vaſe tam diu per tubum BC effluet, quamdiu lumen A ſub liquore conſtituitur.

DEMONSTRATIO.

Quando aerem ex ſiphone ABC exugimus, in eo reſiduus dilatatur (*§. 37. Aerom.*), adeoque elater ejus debilior evadit (§. 79. *Aerom.*). Quare cum antea ponderi atmoſphærico æquaretur (§. 33. *Aerom.*); nunc eodem minor eſt. Aqua igitur in tubum AB impellitur, donec elater aeris incluſi cum fluidi aſcendentis gravitate pondus atmoſphæræ iterum adæquet (*§. 93. Aerom.*). Quodſi ergo non tanta fuerit altitudo BD, ut aqua intra tubum AB contenta vi gravitatis reſpectivæ, qua in atmoſphæram aquæ ſuperficiei extra tubum incumbentem gravitat (*§. 28. Aerom.* & §. 34. *Hydroſt.*), defectum elateris ſuppleat; in tubum BC deſcendet. Si jam orificium C infra libellam aquæ, cui alterum A immerſum eſt, ſubſiſtit; gravitas aquæ reſpectiva in crure BC eſt ad gravitatem reſpectivam aquæ in crure AB ut altitudo BE ad altitudinem BD (*§. 34. Hydroſt.*). Quoniam itaque niſus aeris in ſuperficiem aquæ circa orificium A gravitantis & aquam ad aſcenſum urgentis continuatur per aquam in tubo BC contentam, utpote quæ ad deſcenſum iſto aeris niſu urgetur; aer ad orificium C reſiſtens urgetur vi ponderis atmoſphærici & gravitate reſpectiva aquæ, quæ eſt ut altitudo BC. Et eodem modo patet aeris niſui prope orificium A reſiſti vi ponderis atmoſphærici (quod ob exiguam ſiphonis altitudinem BE pro eodem habere licet) & gravitate reſpectiva aquæ in tubo BA, quæ eſt ut altitudo BD. Cum igitur aeri ad orificium A minus reſiſtatur, quam ad orificium C; niſus illius ibidem prævalet, atque adeo aqua continuo per AB aſcendit & per alterum BC deſcendit, quamdiu orificium A ſub fluido demerſum & alterum C ſub libella conſtituitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

67. Quoniam vi ponderis atmoſphærici

rici aquam nonniſi ad altitudinem 32. pedum Rhenanorum elevari poteſt (§. 27. *Aerom.*); altitudo cruris AB, nempe BD, minor eſſe debet 32. pedibus Rhenanis, ut aqua per ſiphonem fluat.

SCHOLION 1.

68. *Evidens adeo eſt, recte rejici artificium* Heronis *ope ſiphonis per montium vertices in oppoſitam planitiem aquas deducendi. Jubet enim* Heron, *ut extremitatibus ſiphonis applicentur epiſtomia & ad nexum crurum infundibulum, per quod aqua infundi poſſit, utrique ſiphonis cruri implendo ſufficiens. Quoniam itaque aeris auxilio non modo eſt opus ad primum aquæ in crus minus aſcenſum, verum etiam ad continuationem motus; fieri non poteſt, ut aqua altius attollatur, quam a pondere atmoſphærico elevari ſolet. Suffragatur experientia: notum enim nobis eſt artificium* Heronis *irrito ſucceſſu fuiſſe tentatum, ubi altitudo major fuerat 32. pedibus Rhenanis.*

SCHOLION 2.

Tab. II. Fig. 17. 18. 19. 69. *Illud quoque notatu dignum eſt, figuram ſiphonis ad arbitrium variari poſſe, modo orificium* C *ſit infra libellam fluidi exhauriendi. Quanto autem longiori intervallo ab ea removetur, tanto celeriore motu fluidum fertur. Et, ſi ex fluido extrahitur orificium* A, *fluidum omne per lumen inferius* C *egreditur &, quod in minore crure* AB *continetur, ſecum veluti trahit. Quodſi ſipho plenus ita conſtituatur, ut lumen utrumque* A & C *ſit in eadem linea horizontali, fluidum in utroque crure pendulum hærebit. Videntur adeo fluida in ſiphonibus unum veluti continuum formare, ita ut pars præponderans deſcendens inſtar catenæ ſecum trahat leviorem.*

SCHOLION 3.

70. *Si vas quodpiam æquabiliter exhaurire volueris, tabulæ ligneæ* AB *infige alterum ſiphonis orificium* C, *quæ aquæ innatans & cum imminuta deſcendens id conſtanter ad eandem profunditatem demerget.* Tab. II. Fig. 20.

SCHOLION 4.

71. *Denique notandum, fluere aquam per ſiphonem etiam interruptum, ſi nempe crura* AD & EC *conjungantur mediante tubo capaciore* DE, *aere pleno.* Tab. II. Fig. 21.

PROBLEMA 10.

72. *Diabetem conſtruere, hoc eſt, vas, quod plenum liquorem omnem effundit, non plenum vero retinet.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 21. Fundo vaſis AFGB afferruminetur ſipho inverſus CDE ea lege, ut crus longius DE ultra baſin vaſis exporrigatur, aut minimum ejus orificium ſit in baſi vaſis: crus vero minus CD eandem non prorſus attingat: altitudo denique ſiphonis minor ſit altitudine vaſis AG.

Aliter.

Tab. II. Fig. 22. Fundo vaſis AFBG afferruminetur

netur tubus DE, qui cruris majoris vicem ſuſtinet : loco autem crucis minoris imponatur tubus alius capacior DC in C apertus.

Dico, ſi vas AFBG aqua vel alio liquore impleas, quamdiu non fuerit plenum, nihil inde effundi; quamprimum vero plenum extiterit, liquorem omnem effluere.

DEMONSTRATIO.

Tab. II. Fig. 12. Dum enim aqua infunditur, in tubo DC ſeu crure minore ſiphonis ad eandem altitudinem aſcendit, ad quam in vaſe conſiſtit (§. 34. *Hydroſt.*). Quamdiu igitur vas non fuerit plenum, aqua infra orificium D tubi DE ſeu cruris longioris ſubſiſtit, conſequenter per hoc nihil ejus effluere poteſt. Quamprimum vero plenum extiterit, ultra orificium D ſubſtiſtit, adeoque vi gravitatis propriæ per tubum DE deſcendit, dumque ſemel fluit per ſiphonem CDE, tamdiu fluere debet, quamdiu lumen cruris minoris C fuerit aquæ immerſum (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

73. Quodſi vas non fuerit plenum, ad orificium E ore applicato aerem ex ſiphone CDE exſugas; liquor itidem omnis ex vaſe effluet (§ 66).

COROLLARIUM 2.

74. Hinc conſtrui poteſt poculum KL, quo bibenti illuditur. Si nempe tu bibis, poſtquam ſufficienter vinum hauſiſti, per tubum HI ulterius fluxurum flatu oris repelle & pauliſper expecta, donec nihil amplius effluere ſentis. Tum poculum KL alteri porrige & jube, ut ore ad orificium I applicato liquorem exſugat. Ubi igitur hauſtu abſoluto poculum ab ore removerit, vinum adhuc fluens veſtem madidabit. Tab. II. Fig. 13.

SCHOLION 1.

75. *Si tubus* CD *vitreus fuerit, aerem in ſuprema ejus parte reſiduum una cum aqua fluente per tubum* DE *ſucceſſive abripi obſervabis. Jucundum inprimis ſpectaculum, ubi aerem per tubulum vitreum fundo vaſis in* E *infixum magna celeritate cum aqua defluentem conſpicies. Hoc phænomenon primus obſervavit* R. P. de la Roche (h), *cumque experimentum repeterem, varias adhuc circumſtantias annotavi, unde uſus in praxin redundat* (i). *Expertus inter alia ſum, quod, cum diameter orificii* D *eſſet 6 linearum ſeu digiti dimidii, diameter vero inferioris* E *unius ſaltem linea, aer tubum* DE *per ſuperius* D *ingreſſus per inferius egredi non potuerit & aqua fluxum impediverit. Hinc vero jam conſtat ratio, cur in diabetis iſtiuſmodi aqua fluxus interdum ſiſtatur, antequam omnis effluxerit, continuandus tamen* Tab. II. Fig. 12.

Kkk 2 *ali-*

(h) Vid. Diarium Trevoltienſe A. 1709. art. 86. p. 1709.

(i) in actis Erudit. A. 1711. p. 13.

aliquantiſper, ſi tubus DC *elevetur, atque hinc manifeſtum mihi videtur, quod luminis tam ſuperioris* D, *quam inferioris* E *diameter eadem eſſe debeat, nec ipſe tubus luminibus capacior.*

SCHOLION 2.

76. *Quodſi altitudo tubuli* DE *major fuerit altitudine vaſis* AG, *hoc non obſtante, aqua per eum fluit. Ut vero fluxus initium fiat, digito ad* E *appoſito, tubus* DC *attollatur, ita enim aer in tubo* DE *contentus dilatabitur ac elatere ejus imminuto* (§. 71. Aerom.), *aqua intra tubum* DC *altius aſſurgens in tubum* DE *ſeſe præcipitem dabit. Quodſi itaque poculi* KL *operculo* K *intus afferruminetur, ubi ebibere volueris, non opus eſt, ut ſugas; ſed operculum attolli ſufficit.*

PROBLEMA 11.

77. *Aquam per ſiphonem interruptum elevare.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 24.

1. Duo vaſa æqualia AB & IK in eadem planitie collocentur, quorum unum AB ſit apertum, alterum vero clauſum; utrumque aqua plenum.
2. Ex vaſe tertio QR undique clauſo & ab aqua vacuo tendant duo tubi DC & SH, (quorum longitudo minor quidem, ſed non major quam 31. pedum eſſe poteſt) in vaſa AB & IK, quorum prior fundum vaſis AB fere attingit, alter SH operculo vaſis IK afferruminatur.
3. Denique vaſi IK afferruminetur tubus alius LN epiſtomio M inſtructus & tubo DC longior.

Dico, dum aqua per tubum LN deſcendit, epiſtomio M aperto, aliam ex vaſe AB in vas QR per tubum DC aſcendere debere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim gravitas aeris in tubo SH contenti reſpectu gravitatis aquæ tubum LN implentis fere nulla ſit, motum vero aquæ continuum per tubos LN & DC non impediat; perinde eſt ac ſi tubus DC conjungeretur cum tubo LN. Sed in hoc caſu, ubi tubus DC alteri LN immediate jungitur, aqua per tubum LN deſcendit, per alterum DC aſcendit (§. 66). Ergo etiam in altero caſu, ubi tubus LN alteri DC mediante tubo SH & vaſe QR jungitur, aqua per DC aſendere debet, dum per LN deſcendit. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

78. *Poterat idem eodem modo demonſtrari, quo aſcenſum & deſcenſum aquæ continuum in cruribus ſiphonis communis ſupra evicimus.*

CO-

COROLLARIUM.

ab. 79. Data igitur qualibet exigua caducitate, aqua ad maximam altitudinem elevabitur, ſi in eadem altitudine collocentur plura vaſa A, B, C, D &c. & in locis editioribus alia E, F, G &c. vaſaque G & D, F & C, E & B tubis Pa, Mb, lc, vaſa vero G & F, F & E, E & A tubis GN, FK, EL conjungantur, tandemque vaſis D, C & B tubi R, S, T cum epiſtomiis V afferruminentur, qui tubis GN, FK, EL longiores ſint. Epiſtomiis enim apertis, aqua fluens per tubum T elevabit aquam ex A in E; fluens per tubum S eandem attrahet ex E in F; fluens denique per tubum R eam ex F in G attollit, atque ita porro.

g. f.

SCHOLION.

80. *Aut magnum requiritur præcipitii perpendiculum, aut ingens vaſorum apparatus, ſi ad notabilem altitudinem aqua evehenda. Equidem ſi in vaſa* B, C, D, *Mercurius infunderetur, tubus* BT 27 *digitorum reſponderet tubo* AE 31. *pedum* (§ 29. Aerom.); *ſed hac ratione elevatio aquæ nimis ſumtuoſa foret. Praxi adeo in altitudinibus majoribus hic aquam elevandi modus parum reſpondet.*

THEOREMA 15.

Tab. I. Fig. 16. 81. *Fluidum per ſiphonem* ABC *eodem modo acceleratur, quo accelleratur fluidum per foramen vaſis effluens a fluido intra vas ad altitudinem profunditati orificii* C *cruris longioris* BC *infra libellam fluidi* AD, *cui crus ſiphonis minus* BA *immerſum, æqualem conſiſtente.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonſtratione problematis 9 (§. 66), vim, qua fluidum per ſiphonem urgetur, eſſe ut gravitatem fluidi abſolutam in ea cruris longioris parte contenti, qua excedit longitudinem cruris minoris ſupra libellam fluidi, cui immerſum, conſequenter ut altitudinem DE (§. 34. *Hydroſt.*), quæ eſt exceſſus iſtius profunditas infra libellam. Eodem igitur modo motus fluidi per ſiphonem accelerari debet, quo acceleratur fluidum per vaſis foramen effluens, ſi intra ipſum ad altitudinem DE conſiſtat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

82. Quoniam aqua per foramen vaſis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ ſupra orificium (§. 48); celeritas, qua eadem per ſiphonem fertur, eadem eſt, quam acquireret cadendo per profunditatem orificii extra aquam infra ipſius libellam DE.

COROLLARIUM 2.

83. Et quoniam aquarum per foramina ex diverſis vaſis erumpentium celeritates ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum earum ſuper foraminibus (§. 38); celeritates aquarum per diverſos ſiphones fluentium erunt in ratione ſubdupli-

duplicata profunditatum orificiorum, per quæ effluunt, infra libellam aquarum, quibus crura minora ſiphonum immerſa.

COROLLARIUM 3.

Tab. II. Fig. 24. 84. Eodem modo patet, in ſiphone interrupto CDSN celeritatem aquæ per orificium N effluentis eam eſſe, quam acquireret cadendo per altitudinem, quæ eſt æqualis differentiæ tubi LN & partis tubi DC ultra libellam aquæ in vaſe conentæ (§. 77).

COROLLARIUM 4.

85. Similiter patet, per diverſos ſiphones interruptos aquam fluere in ratione ſubduplicata earundem differentiarum tuborum LN & DC, longitudine hujus a libella aquæ in vaſe AB computata.

SCHOLION.

86. *Hinc prono alveo fluunt alia in theoria & praxi ſiphonum utilia, quæ antecedentium gnarus ſua ſponte inde inferet.*

PROBLEMA 12.

Tab. II. Fig. 26. 87. *Aquam vi elaſtica aeris compreſſi movere.*

RESOLUTIO.

Sit vas quodcunque ABCD, e cujus medio asſurgat tubus EF fundum non prorſus contingens, ſitque apertura aliqua in G epiſtomio ad arbitrium obturanda. Quodſi jam per aperturam G ſive ope follis, ſive ſyringis, ſive antliæ pneumaticæ, ſive flatu oris vehementiore aerem intruſeris in vas CD ad medietatem AB aqua repletum, aer comprimetur in parte vaſis reliqua (§. 17. *Aerom.*) adeoque elater ejus intendetur (§. 78. *Aerom*).. Cum adeo elater externi ambientis minor ſit, ſi clauſo epiſtomio G epiſtomium F aperias: aqua ex vaſe AD per tubum EF ab aere ſeſe expandente expelletur.

SCHOLION.

88. *Si aer ope antliæ comprimitur, non opus eſt epiſtomio G, ſed ſufficit cochlea muniri aperturam. Tubus vero* FE *in cochleam deſinit, ut ad antliam firmari poſſit.*

PROBLEMA 13.

89. *Vi aeris loco ſuo expulſi aquam movere.* Tab. II. Fig. 27.

RESOLUTIO.

1. Sit vas quodcunque PQ per diaphragma EH in duo receptacula diſtinctum.
2. In ſuperiori ſit catinus DB foramine in K pertuſus, quod cochlea obturari poſſit.
3. Per ejus medium tranſeat tubus AC diaphragma CE non prorſus attingens & epiſtomio I munitus.
4. Fundo catini conferruminetur

tubus

tubus DEL ultra diaphragma ad fundum fere vaſis inferioris HQ protenſus, tuboque AC longior.

5. Denique diaphragmati conferruminetur alius tubus GF in vas inferius HQ hians & ad catinum fere aſſurgens.

Dico, ſi receptaculum ſuperius PR aqua repleas per foramen K & illo obturato aquam etiam catino infundas, fore ut omnis ex receptaculo ſuperiore PR ejiciatur & per tubulum DL in inferiu deſcendat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubum DL defluit, aer in receptaculo inferiore comprimitur (§. 17. *Aerom.*), adeoque elater ejus intenditur (§. 78. *Aerom.*). Quodſi ergo epiſtomium I aperias elater aeris incluſi fortior magis premit aquam in vaſe PR, quam externus ad A reſiſtit. Aquam igitur ex vaſe PR per tubum AC expellit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

90. *Quodſi tubulus* AB *exiguo lumine fuerit inſtructus, ut aqua ex eo ſaliat; ingenioſa hac machina ab inventore* Herone *Alexandrino* Fons Heronis *appellatur. Patet ex demonſtratione aquam hic urgeri ad ſaltum vi elaſtica aeris compreſſi, quemadmodum in problemate praecedente, conſequenter fontem Heronis pendere a modo ingenioſo aerem intra vas vi ſtructura fontis comprimendi.*

PROBLEMA 14.

91. *Aquam per rarefactionem aeris expellere.*

RESOLUTIO.

1. Sint duo vaſa ABCD & CDEF per diaphragma CD a ſe invicem ſeparata habeatque ſuperius ABCD catinum AGHB conferruminatum ejusdem cum ipſo capacitatis. Tab. II. Fig. 23.
2. Ex diaphragmate CD aſcendat tubulus IK fundum catini non prorſus attingens.
3. Per fundum catini exſurgat alius tubulus LM, cujus lumen L a diaphragmate exiguo intervallo diſtet.

Dico, ſi vas CF prunis imponatur, aut faces ardentes fundo ejus EF ſupponantur, fore ut aqua ex vaſe AD per tubulum LM ejiciatur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aer in vaſe CEFD incaleſcit, rarefit (§. 23. *Aerom.*) ejusque elater intenditur (§. 146. *Aerom.*). Elater igitur aeris incluſi fortius premit aquam in vaſe AD contentam, quam externus ad M reſiſtit, conſequenter aqua

qua per tubulum LM ejicitur. *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

91. *Si aqua vi aeris compreſſi per tubum ejicitur, motus eodem modo acceleratur, quo acceleraretur preſſione aquæ ad tantam altitudinem conſiſtentis, quanta ſufficit ad æquilibrium cum exceſſu elateris aeris compreſſi ſupra elaterem primitivi, ſeu ejus, qui ad orificium tubi reſiſtit.*

DEMONSTRATIO.

Si enim aqua vi aeris compreſſi per tubum ejicitur, vis, quæ impenditur ad eam ejiciendam, eſt exceſſus vis elaſticæ aeris compreſſi ſupra vim elaſticam aeris ad orificium tubi reſiſtentis, reliqua ad vincendam reſiſtentiam imſumta. Quoniam igitur perinde eſt, ſive aqua ejicienda urgeatur vi elaſtica aeris, ſive vi gravitatis aquæ eidem æqualis; motus ejus eodem modo accelerari debet, quo acceleratur preſſione aquæ ad tantam altitudinem conſiſtentis, quanta ſufficit ad æquilibrium cum exceſſu elateris aeris compreſi ſupra elatrem ejus, qui ad orificium tubi reſiſtit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

93. Ea igitur celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo per altitudinem, ad quam conſtituta aqua æquilibrium cum exceſſu elateris aeris compreſſi ſupra elaterem ad orificium reſiſtentis ſervat (§. 48).

COROLLARIUM 2.

94. Et ſi diverſimode compreſſus aer ejicit aquam, celeritates, quibus ejicitur, ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum, ad quas conſtituta aqua cum exceſſu elateris aeris compreſſi ſupra elaterem ad orificium reſiſtentis æquilibrium ſervat (§. 38).

COROLLARIUM 3.

95. Quoniam elater aeris magis compreſſi eſt ad elaterem minus compreſſi ut maſſa aeris magis compreſſi ad maſſam aeris minus compreſſi ſub eodem volumine (§. 80. *Aerom.*); ſi aer primitivus in vaſe, antequam comprimitur, fuerit idem cum exteriore ad orificium tubi, per quem aqua ejicitur, reſiſtente, vis qua aqua ejicitur eſt ut differentia maſſarum aeris compreſſi & primitivi.

THEOREMA 17.

96. *Si aqua vi aeris compreſſi ſalit, ad eam altitudinem aſcendit, ad quam conſtituta aqua æquilibrium ſervat cum exceſſu elateris aeris compreſſi ſupra reſiſtentiam aeris ad orificium tubi.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim aqua vi aeris compreſſi ſaliens ea celeritate ejicitur, quam acquiteret cadendo per

per altitudinem ad quam conſtituitur aqua æquilibrium ſervans cum exceſſu elateris aeris compreſſi ſupra elaterem ad orificium reſiſtentis (§. 92); dum vi aeris compreſſi urgetur, perinde eſt ac ſi per illam altitudinem deſcendiſſet. Enimvero ſi per eam aſcendiſſet, ad altitudinem ſaliret, iſti æqualem (§. 322. *Mechan.*) Ad tantam igitur etiam ſalire debet, dum vi aeris compreſſi impellitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

ab. 97. Quia in fonte *Heronis* vis elaſtica aeris in vaſe PR compreſſi æquilibratur columnæ aquæ in tubo DL contentæ (§. 89); aqua ex eodem ſalit ad altitudinem æqualem altitudini orificii D a libella aquæ in vaſe HQ.

COROLLARIUM 2.

98. Quoniam tantundem aquæ per tubum DL deſcendit, quantum per orificium A ejicitur, adeoque altitudo orificii D ſupra libellam aquæ in vaſe HQ continuo decreſcit; altitudo quoque ſaltus continuo decreſcit.

COROLLARIUM 3.

ab. 99. Et cum in vaſe AD aer continuo
l. magis magisque dilatatur, dum aqua
ig. per tubum EF ſalit (§. 36. *Aerom.*),
6. ac præterea aquæ libella in eodem vaſe AD continuo deſcendente, reſiſtentia aquæ in tubo EF creſcat (§. 34. *Hydroſt.*); altitudo quoque aquæ ſalientis continuo decreſcere debet (§. 95).

SCHOLION.

100. *Nimirum gravitas aquæ in tubo EF ultra libellam in vaſe AD conſiſtentis ſuperaccedit reſiſtentiæ aeris ad orificium F & cum eadem unita agit, ita ut reſiſtentia totalis, quam experitur vis elaſtica aeris compreſſi aquam in vaſe ad aſcenſum per tubum urgens compenſatur ex elatere aeris ad orificium F reſiſtentis & gravitate aquæ in tubo FE ultra libellam in vaſe conſiſtentis elevatæ. Sed quoniam aqua in aere ſaliente reſiſtentia iſta æquatur columnæ aquæ 32 pedes Rhenanos alta* (§. 28. Aerom.), *tubus vero EF vix dimidii vel unius pedis in vaſe vacuo exiſtit, reſiſtentia aquæ in tubo vulgo non attenditur.*

PROBLEMA 15.

101. *Data ratione aeris primitivi ad compreſſum, invenire altitudinem ſaltus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam aer comprimitur in ratione ponderum (§. 73. *Aerom.*), vis autem elaſtica aeris primitivi æquilibratur columnæ aquæ 31. pedum Rhenanorum (§. 28. *Aerom.*); ex data ratione aeris primitivi ad compreſſum inveniri poteſt altitudo aquæ cum compreſſo æquilibrium ſervantis in vacuo (§. 302. *Arithm.*).

2. Quodſi ergo aqua in aere libe-

ro ſalit, cum reſiſtentia aeris prope orificium æquetur columnæ aquæ 31. pedum Rhenanorum (§. 28. *Aerom.*); altitudo inventa mulctanda eſt 31. pedibus Rhenanis, ut relinquatur altitudo ſaltus.

E. gr. Sit aer compreſſius duplus aeris primitivi, adeoque ratio primitivi ad compreſſum ut 1 ad 2; reperietur columna aquæ compreſſo æquilibratæ 62 pedum Rhenanorum. Quodſi ergo aqua in aere libero ſalit, reſiſtentia eſt 31. pedum, adeoque altitudo ſaltus itidem 31. pedum. Eodem modo patet, ſi aer compreſſus ſit triplus vel quadruplus primitivi; fore altitudinem ſaltus in caſu priore 62. in poſteriore 93. pedum & ita porro.

COROLLARIUM.

102. Quoniam data ratione voluminis aeris rarefacti ad volumen condenſati ſeu primiti datur ratio elateris, quo rarefiens expanditur, ad elaterem primitivi (§. 148. *Aerom.*); eodem modo inveniri poteſt altitudo ſaltus, ſi conſtet quantum eo gradu caloris, qui aeri incluſo ineſt, idem dilatari poſſit.

SCHOLION.

103. *Ex his principiis alia bene multa deducere licet: ſed nobis dicta ſufficiant.*

CAPUT III.

DE MACHINIS QUIBUS AQUA ELEVATUR.

DEFINITIO 5.

104. *Valvula* ſeu *aſſarium* eſt obturaculum vaſis vel tubi, quod introrſum aperiri poteſt; aſt quo magis contra fundum ſeu diaphragma comprimitur, eo exactius foramen claudit.

COROLLARIUM.

104. Valvula igitur fluidum in vas vel tubum admittit, regreſſum vero impedit.

PROBLEMA 16.

106. *Valvulam ſeu aſſariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Valvulæ ſimpliciſſimæ C conſiciuntur ex corio, habentque figuram circularem & anſula D clavis affigitur fundo vaſis aut diaphragmati, ubi ad obturandum foramen aptantur. Tab. II Fig. 15.

Fieri

b. Fieri etiam poſſunt ex aliquot orbibus coriaceis intra duos orichalceos firmiter compreſſis AB & foraminibus circum circa pertuſis, quæ alio orbiculo orichalceo CD ſurſum deorſumque mobili teguntur.

ab. Parantur porro ex lamina cuprea E, & corio tenui obducuntur, circa cardinem in H mobiles. Ut autem certius relabantur, elatere G inſtruuntur.

Quemadmodum vero hactenus deſcriptæ valvulæ embolis potiſſimum conveniunt, ita in fundo vaſorum vel tuborum ſequente utendum:

Tab. I. Fig. 2. 1. Foramen A torno excavetur, tantiſper in conum deſinens.

2. Eidem immittatur corpus conicum orichalceum B torno itidem elaboratum & clavo aut tigillo transverſo D impediatur, ne inverti poſſit.

Vel foramen hemiſphæricum excavetur eique globus orichalceus immittatur.

PROBLEMA 17.

107. *Syringem, hoc eſt, machinam conſtruere, ex qua aqua attracta violenter expelli poteſt.*

Tab. III. Fig. 33.

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur cylindrus ABCD ex materia ſolida, intus cavus, inferius tubulo EF inſtructus.

2. Immittatur embolus K ex corio vel alia materia, quæ humorem facile imbibit, confectus; qui cavitatem cylindri exacte repleat, ita ut inter ipſum & cylindrum aeri vel aquæ nullus concedatur tranſitus.

Quodſi tubulo F aquæ immiſſo embolum K extrahas, in cavitatem ab aere vacuam ea aſcendet (§. 101. *Aerom.*). Embolo igitur intruſo, per tubulum EF violenter expelletur.

COROLLARIUM 1.

108. Impetus aquæ eo major ipſaque aqua per longius ſpatium propellitur, quo major fuerit vis embolum detrudens.

COROLLARIUM 2.

109. Quare cum vis major celerius intrudat embolum, quam minor; quo celerius embolus intruditur, eo majore impetu eoque per longius ſpatium aqua propellitur.

PROBLEMA 18.

110. *Conſtruere antliam attractivam, cujus ope aqua ex loco profundo in altum evehi poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus cavus ex materia ſolida in aqua verticaliter Tab. III. Fig. 34.

ter erigendus, cujus inferior baſis I valvula introrſum hiante inſtruatur (§. 105).

2. Immittatur embolus EK valvula ſurſum hiante in L inſtructus.

3. Pro ejus faciliori extractione & depreſſione vectis FG applicetur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam L elevat & in cavitatem cylindri ſeu tubi AD ruit (§. 101. *Aerom.*). Quodſi ergo idem rurſus deprimatur, valvula L aquæ exitum negante (§. 104), valvula I aperitur & aqua ultra embolum aſcendit, repetita emboli agitatione per tubum MH effluxura. *Q. e. d.*

PROBLEMA 19.

111. *Conſtruere antliam, quæ per meram expulſionem aquam elevat.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 35. 1. Cylindrus AB diaphragmate CD, ad quod valvula E aptata eſt, diviſus in aqua collocetur.

2. Embolus F valvula G inſtructus ita immittatur & regulæ ferreæ IH circa caidinem H mobili affigatur, ut manu in K applicata commode attolli ac deprimi poſſit.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim F depreſſo valvula G aperitur (§. 104) & aqua in cavitatem cylindri BC aſcendit (§. 34. *Hydroſt.*). Sed dum rurſus elevatur, valvula G clauditur, ut per embolum nullus ei exitus concedatur: aperitur vero valvula E (§. 105. 106), & ſic aqua vi emboli, agitatione ſæpius repetita, per tubum M expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si quod vitium contrahit hoc antliarum genus, non commode id corrigere licet. Unde non libenter eodem utuntur, utut ad quamlibet altitudinem datam aquam elevet, ſi vis ſufficiens in* K *applicetur: ea enim attolli aquam palam eſt.*

PROBLEMA 20.

113. *Conſtruere antliam, quæ aquam attractam violenter aliorſum expellit.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus ex orichalco ABCD in L valvula inſtructus & in aqua collocetur. Tab. III. Fig. 36.

2. Immittatur embolus K ſine valvula ex ligno viridi, quod humore imbibito non amplius intumeſcit, tornatus & corio vel ſtupa veſtitus.

3. In H afferrruminetur tubus alius NH

NH cum valvula ſurſum hiante I.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus K attollitur, aqua valvulam L aperit (§. 105) & in cavitatem cylindri aſcendit (§. 34. *Hydroſt.*). Sed cum rurſus deprimitur, valvula I aperitur (§. 105) & per tubum HN aqua expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

114. *Ingenioſa hujus machinæ inventor fuit* Cteſibius, *qui primus de aqua antliarum ope elevanda cogitavit, plurimis inventis mechanicis & hydraulicis ſuo ævo celebris*, Vitruvio *autore* (k). *Ab eo antliæ dicuntur* machinæ Cteſibianæ.

SCHOLION 2.

115. *Ejus vires, ſublato affrictu, multiplicare ſtuduit diu multumque in theoria & praxi aquarum elevandarum verſatus* Morlandus (l). *Virga nimirum* Tab. II. Fig. 47. *ferrea* D *inter trochleas,* B *&* C *evitandi affrictus gratia ſurſum deorſum movetur* (§. 956. Mechan.) *& ponderibus* E, F, G, H *oneratur, ut aquam fortius per tubum plumbeum* TV *expellat embolus* LM *ex orichalco tornatus & intra exiguum circulum coriaceum ad baſin ſuperiorem* NO *cylindri orichalcei* RN *dextre aptatum ſine omni fere frictione mobilis, ad quam tollendam & duodecim annorum ſtudium, & multum argenti ſe impendiſſe fatetur laudatus inventor.*

PROBLEMA 21.

116. *Aquam ope catenarum ſitulis inſtructarum elevare.*

RESOLUTIO.

1. Intra aquam horizontaliter collocetur cylindrus aut priſma ſexangulare MN circa axiculum ferreum mobile. Tab. III. Fig. 38.
2. Eo in loco, quo aqua elevari debet, conſtituatur cylindrus aut priſma ſimile OP alteri parallelum & circa axiculum ferreum itidem mobile.
3. Situlæ S catenis connectantur, quæ utrumque cylindrum vel priſma ambiant. Alii ſitulas coriaceas funibus connexas præferunt, tum ne facile diffringantur, tum ne hieme (quod ſæpius accidit) catenis diſſilientibus fundum aquæ petant.

Quodſi cylindrum ſuperiorem OP convertas, inferior ſimiliter convolvitur & ſitulæ per aquam trajectæ aquam hauriunt ſuperius in T effundendam.

SCHOLION.

117. *Quoniam ſitula utrinque vacua*

(k) lib. 10. c. 12. conf. lib. 9. c. 9.
(l) Elevation des Eaux c. 4. art. 1. p. 35. & ſeqq.

in æquilibrio ſunt; pondus elevandum eſt aqua in ſitulis ex altera parte contenta, ubi ab affrictu diſceſſeris, qua in his machinis non exigua eſt.

PROBLEMA 22.

118. *Roſarium conſtruere ad elevandam aquam.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 39. 1. Tubus ligneus AB in aqua conſtituatur tantæ altitudinis, ad quam aqua elevanda.

2. Tum ſub aqua, tum in ſuperiori loco, quo aqua elevanda, collocentur ut in problemate præcedente duo cylindri GH & ED circa axiculos ferreos mobiles.

3. Ad funem, cujus extremitates inter ſe connexæ, circa cylindros GH & ED circumductum aptentur globi ex corio aliaque materia molli compacti, aut (ut minor ſit frictio) hemiſphæria circulo coriaceo tecta, qui cavitatem tubi exacte replet.

Dum enim cylindris circumvolutis globi aut hemiſphæria per tubum AB trahuntur, aquam binis interjectam una attollunt, in L effluentem.

SCHOLION.

119. *Alii utuntur prismatibus quadratis loco tuborum & tabulis ligneis quadratis loco globulorum. Immo & in tubis nonnulli orbiculos ligneos catena connexos globulis ſubſtituunt. Cæterum hæc machina uſum quoque habet in foſſis & fluminibus a fæcibus purgandis. Ingens tamen affrictus eſſe ſolet, quem parum curare ſolent, ubi virium ad aquam elevandam compendium quæri neceſſitas nulla jubet: id quod & de aliis machinis, in quibus ingens affrictus eſt, notandum.* Tab. III. Fig. 41.

PROBLEMA 23.

120. *Aquam tympano vel rota ſitulis inſtructa elevare.*

RESOLUTIO.

Structura admodum variari ſolet pro diverſitate quantitatis aquarum elevandarum & altitudinis, ad quam evehenda.

Si magna aquæ quantitas ad exiguam altitudinem elevari debet; tympanum conſtruitur AB in 8 cavitates diviſum, quæ aperturas habent tum in peripheria tympani C ad hauriendum aquam, tum ad tubum DE, qui axis vices ſuſtinet, ut aqua per ejus foramina E in ciſtam G effundi poſſit. Tab. IV. Fig. 41.

Si minor aquæ quantitas ad majorem altitudinem elevanda, ſitulæ ligneæ pice obductæ A ad peripheriam rotæ aptantur, quæ aquam hauriunt, dum per eam trajiciuntur, rota circumacta, & ſuperius in B effundunt. Tab. IV. Fig. 44.

Quod-

b. Quodſi rotæ palmulas non in fronte gerant, ſpatium binis interjectum hinc inde clauditur, nonniſi foramine in palmula ſuperiori A relicto, per quod aqua hauritur, & apertura B ad latus facta, per quam rurſus effunditur.

ab. r. g. §. Sunt qui ſitulas congiales A vel (quod præſtat, ne ſcilicet tantum aquæ perdatur) capſas quadratas unico foramine inſtructas B ad latus rotæ aptant: ſunt & qui helicibus CD a peripheria ad centrum fere tendentibus inſtruunt. Alios modos ſilentio præterimus.

SCHOLION.

121. *Rota iſtiusmodi ſtructura plurimum inter ſe variant; non tamen omnes ejusdem nota. Sunt enim, quæ multum aquæ inutiliter diſſipant, antequam in receptaculum commune effundatur. In praxi tamen ejus non ſemper habetur ratio, modo aqua ſufficiens copia elevari poſſit.*

PROBLEMA 24.

122. *Cochlea* Archimedis *aquam elevare.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 40. 1. Circa cylindrum AB circumvolvitur tubus plumbeus ea lege, qua helicem in cochlea deſignare ſolemus (§. 854. *Mech.*).

2. Cylindrus inclinetur ad horizontem ſub angulo 45. circiter graduum, ſitque orificium tubi B ſub aqua demerſum.

Qudſi cochleam ita circumagas, ut orificium B contra aquam volvatur, aqua per helicem aſcendet tandemque in A effundetur.

Aliter.

1. Baſis cylindri tam ſuperior, quam inferior dividitur in 4. vel 8. partes æquales & puncta diviſionum D & E, F & G, B & L &c. connectuntur rectis DE, FG, BL &c. in ſuperficie cylindri deſcriptis, in quas transfertur ex F in O, ex O in M &c. dimidium latus quadrati FN. Intervalla FO, MO &c. dividuntur in tot partes æquales, quot ſunt lineæ verticales DE, FG, BL &c. & in primam DE transferatur pars una, in HE partes duæ, in CK tres &c transferantur, ut adeo tota cylindri ſuperficies in areas quadratas fit diviſa. Tab. IV. Fig. 47.

2. Anguli diagonaliter oppoſiti connectantur lineis, quæ filo ab uno angulo usque ad alterum extenſo facile deſignantur, & juxta harum ductum helice ſulcetur cylindrus.

Ad helicem firmentur aſſerculi ad- Tab. IV. Fig. 48.

admodum tenues, quorum longitudo 8 circiter digitorum, & pice oblinantur.

4. Baſibus denique circum circa affigantur aſſeres tenues & annulis ferreis minuantur, totaque ſuperficies exterior pice vel bitumine oblinatur.

SCHOLION 1.

123. *Peripheria baſium cylindri dividi poteſt in quotcunque partes aquales & in lineas verticales puncta diviſionum conjungentes transfertur diſtantia helicum. quoties fieri poteſt, in tot partes aquales ſubdividenda, quot ſunt linea verticales, ut inde diviſiones earum determinentur, quemadmodum in reſolutiones problematis pracepimus. Si diameter totius cochlea 18 digitorum, diameter axis 6 vel 4, diſtantia helicum 9 digitorum eſſe ſolet.*

SCHOLION 2.

124. *Hac machina exigua vi multum aqua attolli poſſe, experientia dudum docuit: unde ad exhauriendos lacus eadem utuntur.*

COROLLARIUM.

125. Si ad ingentem altitudinem aqua elevanda, una cochlea non ſufficit; ſed quæ ab una effunditur, haurienda eſt ab altera & ita porro.

PROBLEMA 25.

126. *Aquam ex loco humiliore in excelſiorem deducere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur turris, aut aliud ædificium, prout elevatio locorum ultra libellam aquarum eo derivandarum requiſiverit.
2. Intra turrim ſeu ædificium aqua elevetur vel ope rotæ ingentis ſitulis inſtructæ (§. 121), vel ſitulatum catenis connexarum (§. 116), vel roſarii (§. 118), vel cochlearum Archimedearum (§. 122.), vel antiliarum (§. 110. 112), viribus vel animatis, vel inanimatis legitime applicatis juxta regulas c. 17. Mechanicæ (§. 876. & ſeqq.). traditas.
3. Aqua effuſa in aheno cupreo colligitur, ad cujus fundum aptati ſint tubi, per quos iterum deſcendet.
4. Ne aqua ultra latera aheni unquam aſſurgat, unus alterve ad ſummitatem fere protendatur tubus, per quem nimia in fluvium refluat, unde hauritur.
5. Hi tubi verticales connectantur cum aliis horizontalibus vel inclinatis intra terram defoſſis & ad eum usque locum protenſis (§. 14), in quem aqua deducenda.
6. Iis denique in locis, in quæ aqua deducitur, erigantur tubi verticales quantælibet amplitudinis, in

in quos hient lumina horizontalium epiſtomio munita, quod ope virgæ ferreæ aperire ac claudere licet, ut aqua ad arbitrium admitti poſſit (§. 5).

Aperto enim epiſtomio aqua in tubo verticali aſcendet (§. 34. *Hydroſt.*).

SCHOLION.

127. *Antliarum emboli agitantur ope axis curvati duplicis, ita ut unus deprimatur, dum alter attollitur. Inſeritur autem axis curvatus axi rotæ aquariæ. Cochleæ* Archimedis *ac cylindri ſuperiores roſariorum & catenarum fiſtulis inſtructarum inſtruuntur rotis radiatis, quibus alia dentata occurrunt. E. g. Ponamus roſarium calcando moveri debere. Conſtruendum igitur erit tympanum ingens* (§. 886. Mechan.), *cujus axi una infigenda rota ſtellata, occurrens radiata, de qua ante diximus. Jungitur autem rota radiata verticularis ad conſervandum impetum. Quodſi equus eandem machinam movere deberet, axi verticali temone inſtructo* (§. 888. Mechan.) *infigi deberet rota dentes in plano habens, reliquis manentibus ut ante. Quodſi homo partim trahendo, partim deprimendo aquam ope roſarii elevare teneretur, tympano ſubſtitueretur axis cum ſcytalis & rota verticulari* (§. 882. Mech.). *Si vero motus partim trahendo, partim protrudendo fieri debeat, axi curvato ope vectis homodromi verſando* (§. 884. Mech.) *infigenda rota radiata, quæ circumagat ſtellatam, cui communis cum alia radiata axis, alii dentata dentes in plano, axem cum cylindro roſarii communem habenti occurrente. Unde facile intelligitur, quid in aliis caſibus fieri debeat, modo problemata mechanica de potentiarum ad machinas applicatione fuerint perſpecta.*

CAPUT IV.
DE
FONTIBUS SALIENTIBUS.

PROBLEMA 26.

128. *Conſtruere fontes ſalientes.*

RESOLUTIO.

1. Elevetur aqua ex loco humiliore in altiorem (§. 110. & ſeqq.) & intra vas ſatis capax colligatur, ex quo per tubos applicatos rurſus deſcendat.
2. Cum tubis hiſce connectantur alii horizontales ſub terra defoſſi, per quos aqua usque ad originem fontium ſalientium deducatur.

3. Denique tubis horizontalibus jungantur alii verticales, quorum tamen altitudo ſit multo minor altitudine tuborum, per quos aqua in horizontales defluit.

Aqua per hos in altum proſiliet, quomodocunque fuerint inflexi (§. 56).

SCHOLION 1.

129. *Quodſi aqua ſaliens ad altitudinem datam aſcendere debet, quæſito ſatisfieri poteſt per ſchol. 3. theor. 22. (§. 52).*

SCHOLION 2.

130. *Quodſi deſideretur, ut tubi dato tempore datam aquæ quantitatem effundant, vel plures tubi ejusdem fontis in data ratione aquas emittant; id obtinere licebit per ther. 3. Cor. 1. (§. 23) & per theor. 5. (§. 27).*

SCHOLION 3.

131. *Si denique aquarum ex diverſis unius fontis tubis ſalientium altitudines inæquales requirantur; quæſito potiemur per theor. 12. (§. 49) & theor. 13. (§. 56): ubi & obſervaſſe juvabit quæ ſuperius in ſcholiis theor. 12. (§. 50. & ſeqq.) monuimus.*

PROBLEMA 27.

132. *Fontem conſtruere, ex quo aqua erumpens pilam æneam projiciat, deſcenſumque parantem continuo repellat.*

RESOLUTIO.

1. Fiat globus æneus intus cavus A ex lamina tenui, ne gravitate ſua impetum impreſſum eludat. Ta. V. Fi.

2. Tubus, per quem aqua ſalit, BC ſit ad horizontem exacte perpendicularis.

3. Aquæ ſufficiens copia ex inſigni altitudine in tubum BC deducatur.

Dico, aquam ex tubo erumpentem globum projicere in altum & deſcendentem conſtanter in altum repellere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tubus ſit ad horizontem exacte perpendicularis, *per hypoth.* aqua per eum prorumpens perpendiculariter aſcendit. Quoniam vero ex inſigni altitudine delapſa, *per hypoth.* & ex tubo ea celeritate erumpit, quam cadendo per iſtam altitudinem acquireret (§. 48), magna quoque celeritate movetur (§. 91. 473. *Mechan.*), adeoque globo impetum imprimit in linea ad horizontem perpendiculari aſcendendi (§. 534. *Mechan.*). Sed dum ad eam altitudinem pervenit, ad quam vi impreſſa aſcendere licet (§. 317. *Mech.*); vi gravitatis ſuæ juxta eandem perpendicularem relabitur (§. 215. *Mechan.*). In deſcenſu igitur aqua eidem occurrit novoque impetu impreſſo,

ut

ut ante, aſcendere cogit. Quamobrem globus in aere pendulus ſurſum deorſum feretur, quamdiu aqua ex tubo ſaliens ſatis impetus ad globum repellendum habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

133. Cum ad globi aſcenſum deſcenſumque reciprocum figura nil conferat; corpus quodcunque alterum non nimis grave eidem ſubſtituere licet, e. gr. avem cum alis expanſis.

SCHOLION.

134. *Quoniam globus, ut ex alto rurſus deſcendens in aquam ſalientem incurrat, in eadem conſtanter linea perpendiculari aſcenſus deſcenſusque reciprocos continuare debet; hoc fontium genus amat loca ventorum libidini minime expoſita.*

PROBLEMA 28.

135. *Conſtruere fontem, quæ aquam verſus diverſas plagas projiciat.*

RESOLUTIO.

ab.
ig.
o.

Sit tubus AB aquam advehens verticalis & ipſi infixi ſint alii horizontales DE & GH, alii ad horizontem verſus diverſas plagas inclinati OP & MN, alii denique infra horizontem verſus plagas illis intermedias reclinati, ut FL.

Quoniam aqua directionem luminis, per quod prorumpit, retinet; per lumen A ſaliens perpendiculariter aſcendet, per lumina vero L, H, N, P, E prorumpens arcus diverſæ amplitudinis (§. 59) & ad diverſas plagas tendentes deſcribet. Fons igitur aquam verſus diverſas plagas ejicit.

Aliter.

Tubus AB, per quem aqua ſa- Tab.
lire debet, ſit ſuperius clauſus in A, IV.
& luminis loco vel undiquaque, Fig.
vel in dimidia ſuperficiei parte fo- 51.
raminulis exiguis pertuſus.

Quodſi tubus fuerit ad horizontem perpendicularis, aqua verſus omnes plagas per foraminula ſaliet, eruntque jactus horizontales pro altitudine lapſus (§. 58) ſatis ampli.

COROLLARIUM.

136. Quodſi ergo tubum AB ad altitudinem hominis fere aſſurgentem epiſtomio C inſtruas; eo aperto, ſpectatores veluti ab imbre improviſo madidati recedent.

SCHOLION.

137. *Probe autem tenendum eſt, luminum, per qua aqua egreditur, diametros ipſorum tuborum aquam advehentium diametris minores fieri debere, ne aeris reſiſtentia aliaque impedimenta* (§. 50. & ſeqq.) *impetum aquæ ſtatim eludant. Ipſi quoque fontes ſufficientem aquæ copiam ſuppeditare; aquæ impetu ſufficiente gaudere debent.*

PROBLEMA 29.

138. *Fontem conſtruere, ex quo aqua inſtar pluviæ proſiliat.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 52. Tubo, ex quo aqua ſalire debet, afferruminetur globus, vel corpus lenticulare ex duobus ſegmentis ſphæricis compoſitum AB, ex lamina metallica confectum, cujus ſuperior ſuperficies minimis foraminulis pertundatur.

Ita enim futurum, ut aqua cum impetu verſus ſuperiorem laminam AB propulſa ſub forma tenuiſſimorum filamentorum in varias guttulas mox diſpergendorum proſiliat.

PROBLEMA 30.

139. *Fontem conſtruere, ex quo aqua proſiliens ad modum lintei expanditur.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 53. Tubo AB afferruminentur duo ſegmenta ſphærica C & D, quæ fere ſe invicem tangant & mediante cochlea E ad eum ſitum facile reducuntur, ut crena ambobus interjecta vel arctior, vel latior fiat, prout uſus poſtulaverit.

Alii vel in tubis lumine deſtitutis, vel in corporibus ſphæricis aut lenticularibus tubo afferruminatis crenam efficiunt bene politam.

Aqua per crenam ſaliens ad modum lintei expanditur, ſi impetus fuerit ſufficiens.

PROBLEMA 31.

140. *Fontem conſtruere, quæ aquam ſpumeſcentem jucundo ſpectaculo ejiciat.*

RESOLUTIO.

Sit tubus AB & paulo infra lumen in ejus medio matrix DE, ut ope cochleæ globus C ita ad lumen B firmari poſſit, quo omnis fere exitus aquæ denegetur. Tab. V. Fig. 54.

Aqua intra contactum globi & tubi prorumpens ſpumeſcet ac fere nivis aerem opplentis floccos æmulabitur.

PROBLEMA 32.

141. *Fontem conſtruere, ubi e variis animantium vel hominum figuris aqua erumpit.*

RESOLUTIO.

Cum aqua per tubos quomodocunque ſitos derivari poſſit & directionem luminis retineat; non alia re opus eſt, quam ut intra hominum animantiumque figuras tubi abſcondantur, quorum orificia hient per eas partes, unde aqua proſilire debet.

SCHOLION.

142. *Ex traditis hactenus principiis haud*

haud difficulter eruitur, quicquid de fontium ornatu, quo aquæ ſalienti figuras varias conciliare licet, concipi poteſt. Omnia nimirum a luminum magnitudine, figura & directione pendent.

PROBLEMA 33.

143. *Conſtruere fonticulum ſalientem, qui ubi ſalire deſiit, clepſydræ inſtar inverti poteſt.*

RESOLUTIO.

ab. . g. ſ.

1. Fiant duo vaſa LM & NO tanto quidem majora, quanto plus temporis aqua ſaliens conſumere debet, tantoque majori intervallo PN a ſe invicem remota, quanto major aquæ ſalientis altitudo deſideratur (§. 49).
2. Sit BAC tubus recurvus in C epiſtomio inſtructus & DEF tubus alius itidem recurvus in D epiſtomio munitus.
3. In I & K ſint tubuli alii utrinque aperti & fundos vaſorum NO & LM fere attingentes: quousque ſimiliter tubi QR & ST pertingunt.

Quodſi jam vas LM fuerit aqua plenum, aperto epiſtomio C, ea proſiliet fere ad K, & delapſa per tubulum I apertum in vas NO ruet aeremque contentum per tubum QR expellet. Ubi vero aqua omnis ex vaſe LM effluxerit, machina inverſa, delapſa ex vaſe NO ſalientem efficiet.

COROLLARIUM.

144. Si vaſæ LM & NO tantam aquæ copiam contineant, quæ intra horæ ſpatium tota effluat; Clepſydram habebimus ſalientem in ſuas graduationes (§. 45) legitime dividendam.

PROBLEMA 34.

145. *Conſtruere malluvium cum fonticulo ſaliente.*

RESOLUTIO.

1. Sit ABCD receptaculum vaſis, cui aqua infunditur. Tab. V.
2. Ex vaſe deſcendat tubus ab L uſque ad M, ubi verſus I inflectitur. Fig. 56.
3. In K applicetur epiſtomium, quo aperto aqua proſiliet fere ad L uſque (§. 49).
4. FG ſit catinus aquam excipiens, mox per foramina P & Q in vas quodpiam defluentem.

SCHOLION.

146. *Me non monente apparet, ſi aquæ ſalienti varias figuras inducere volueris, id fieri per artificia ſuperius expoſita* (§. 135. & ſeqq.).

PROBLEMA 35.

147. *Flatu oris aquam ſalientem efficere.*

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 56.
1. Sit AB ſphæra vitrea vel metallica &
2. in ea firmetur tubulus CD exiguo orificio in C inſtructus & in D infimum ſphæræ punctum fere attingens.

Dico, ſi aerem per tubulum CD exſugas & orificium C in frigidam ſtatim demergas, fore ut aqua per tubulum eundem in ſphæram aſcendat Quodſi iteratis ſuctionibus ultra medietatem fuerit repleta & ore in C applicato aerem per tubulum infles; remoto ore aqua proſiliet.

DEMONSTRATIO.

Si enim aerem exſugis, in ſphæra AB incluſis rarior evadit externo, adeoque orificio C in aquam immerſo tantum fere aquæ aſcendere debet, quantum aeris fuerit eductum (§.95. *Aerom.*). Quodſi vero per tubulum CD aerem infles, is per aquam ſpecifice graviorem (§.57. *Aerom.*) aſcendet (§.99. *Hydroſt.*), conſequenter aer incluſus comprimitur (§. 5. *Aerom.*). Saliet ergo aqua per tubulum CD (§. 87). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

148. Quodſi hanc ſphæram aquæ ebullienti immittas; aer rareſiet (§. 23. *Aerom.*), adeoque denuo aqua per tubulum CD ſalire debet.

SCHOLION.

149. *Fonticulus hic ab inventore* Herone *nomen* Pilæ Heronis *ſortitus eſt.*

PROBLEMA 36.

150. *Fonticulum conſtruere accenſis candelis ſalientem.*

RESOLUTIO.

1. Ex lamina metallica fiant duo vaſa cylindrica AB & CD. Tab. V.
2. Jungantur tubis utrinque apertis KL, ut aer ex ſuperiore in inferius deſcendere poſſit. Fig. 58.
3. Tubis afferruminentur candelabra H.
4. Operculo vero baſis inferioris CF in formam catini efformato tubus FE epiſtomio G inſtructus & ad fundum fere vaſis protenſus.
5. In Q ſit foramen cochlea munitum, ut aqua in vas CD infundi poſſit.

Dico, candelis in H accenſis, aquam per tubum EF ſalire debere.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis 14. (§.91).

SCHOLION.

151. *Hoc eodem artificio efficiet ſtatuam ad præſentiam ſolis, vel candelis accenſis,*

cenſis, lachrymas effundentem. Neque enim alia re opus eſt, quam ut ex cavitate, in qua aer rarefit, tubulos ducas ad quasdam alias cavitates oculis vicinas & aqua repletas.

PROBLEMA 37.

Tab. V. Fig. 9. 152. *Fontem intermittentem conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Per axem vaſis AB aſcendat tubus EF utrinque apertus, foramine in E exciſo.
2. Tubus hic afferruminetur tam vaſi ſuperiori in H, quam inferiuri in E.
3. Vas ſuperius in L habeat foramen cochlea munitum, per quod aqua infundi poſſit; in baſi autem inferiore multa foraminula, per quæ deſtillare queat.
4. In vaſe inferiore ſit foramen G ita aptatum, ut aqua per eam non defluat, niſi ad altitudinem EM conſtituta.

Dico, aquam ex hoc fonte per intervalla fluere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim foramine E aperto aeri externo per tubum EF in vas ſuperius AB aditus pateat; aeris incluſi elater æqualis eſt ponderi atmoſpherico (§.33. *Aerom.*). Gravitas igitur aquæ in eodem vaſe contentæ ipſi juncta preſſionem majorem efficit, quam reſiſtentia ponderis atmoſphærici ad foraminula, adeoque aqua deſtillare debet. Quam primum vero aqua delapſa foramen E occludit, ut nullus amplius aer in locum aquæ delapſæ ſuccedere poſſit; perinde eſt, ac ſi vas quoddam exiguo orificio inſtructum inverteres, adeoque fluxus aquæ per foraminula ſiſtetur (§.95. *Aerom.*). Sed dum aqua ad altitudinem EM usque aſſurgit, per foramen G in cavitatem vaſis CD deſcendit. Ea igitur defluente, foramen E rurſus aperitur aerique aditus in vas ſuperius AB denuo conceditur. Unde patet, aquam denuo per foraminula ejusdem effluere debere. Habemus adeo fontem intermittentem. *Q.e.d.*

Aliter.

Quodſi fonticulum per intervalla ſalientem deſideres, fiant omnia ut ante, niſi quod loco foraminulorum aptandi ſint tubi recurvi PQT & RSV. Tab. V. Fig. 60.

Aliter.

1. Sit tubus EF aquam advehens in cavitatem vaſis AB. Tab. V.
2. Ex hoc vaſe deſcendat ſipho GHI in minus CD lumine Fig. 61.

mine conveniente in L inſtructus.

Quamprimum aqua ultra ſiphonem AB deſcenderit, per ſiphonem fluet, donec vas exhauriatur, (§. 72) adeoque tamdiu per lumen L ſaliet. Quodſi igitur efficias, ut plus aquæ per lumen L ſaliat, quam per tubum EF advehitur; fontem habebis intermittentem.

SCHOLION 1.

153. *Hoc poſteriori artificio haud difficulter efficies, ut ſtatua aquas evomant ex improviſo in adſtantes.*

SCHOLION 2.

154. *Priori autem ſuperſtructa eſt lampas, quam in gratiam amici inventam publici deinde juris feci* (a) *& in ſequenti problemate denuo exhibeo.*

PROBLEMA 38.

155. *Lampadem conſtruere, quæ eandem quantitatem olei ellychnio conſtanter affundit, & in qua largius pabulum flammam nunquam extinguit, multo minus receptaculum ellychnii egreditur, maximo licet calore urgente.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 62.

1. Fiat vaſculum cylindricum AC BD, cui oleum infundi poſſit & ipſi afferruminetur aliud minus formam parallelepipedi habens FED & roſtro FH inſtructum, pro recipiendo ellychnio.
2. Illud diaphragmate KL dividatur fundo DB multo propiore, quam fornici AC.
3. Tubulus PO in P & O utrinque apertus interiori vaſculi AB parieti adhæreat, quem *tracheam* appello. Ejus oſculum ſuperius P fornicem AC propemodum attingit; inferius vero O ſuperficiem olei ad libellam HI conſtituti lambit.
4. Diaphragmati afferruminetur tubulus alius MN, utrinque ſimiliter apertus & ad eandem olei libellam HI protenſus.
5. Fundo vaſis DB afferruminetur tubulus QR, cujus oſculum ſuperius Q ultra libellam olei tantillo emineat & tranſeat per matricem cochleæ V, qua vas AB CD ad pedamentum VTX firmatur.
6. Intra hoc fiat vaſculum cavum *ab* & in G foramen exiguum, per quod aeri externo in civitatem DKLB pateat aditus.
7. Denique in fornice fiat foramen cochlea S munitum, ut lampas

(a) in Actis Erudit. A. 1711. p. 30. & ſeqq.

pas (ſi quando opus fuerit) a ſordibus purgari queat.

Dico, ſi lampas a pedamento avulſa invertitur & digito ad foramen G applicato oleum per tubulum QR altero MN paulo ampliorem infunditur, fore ut oleum cavitatem GB ingreſſum per tubulum NM, vaſe in latus DC inclinato, in proprium receptaculum AK delabatur, & lampas repleta & ad pedamentum VT rurſus firmata munere ſuo, ut decet, fungatur.

DEMONSTRATIO.

Quamdiu enim oleum ad libellam HI conſiſtit, ne guttula quidem una per MN effluere poteſt, vi eorum, quæ ad problema præcedens demonſtrata ſunt (§. 152). Inſenſibili autem ejus quantitate abſumta, aer per tracheam OP ingreditur & oleum per MN deſtillat. Eandem itaque quantitatem olei lampas conſtanter ellychnio affundit. *Quod erat unum.*

Quodſi lampas in locum calidum deferatur, aer ſupra oleum rareſit (§. 23. *Aerom.*), adeoque oleum per tubulum MN expellitur (§. 91): quod cum ultra libellam HI aſſurgat, per tubulum QR in vaſculum *ab* defluit, conſequenter nec flammam extinguere, nec extra receptaculum ellychnii egredi poteſt. *Quod erat ſecundum & tertium.*

SCHOLION.

156. *Ut demonſtratio ocularis evaderet, vas* ABCD *ex vitro fieri curavimus obſervavimusque, tracheam* PO *non nimis arctam eſſe debere, ſi deſideres, ut olei vel minima quantitas abſumta ſtatim refundatur. Etenim gutta olei aeri in tubulum nimis arctum aditum non concedit, niſi ejus vi per totam tubuli longitudinem in vas* ACLK *abripiatur. Unde ſimul colligitur, operam dandam eſſe ut orificium tracheæ ſit bene politum.*

PROBLEMA 39.

157. *Conſtruere fonticulum ſalientem, in quo avicula tantum aquæ ſorbeat, quantum ex illo profluit.*

RESOLUTIO.

1. Fiat vas BF per diaphragma ED in duas cavitates diviſum, quarum ſuperior AEPD in duas alias AC & CB per diaphragma CN ſubdividitur. Tab. VI. Fig. 63.
2. In Q, R & S fiant foramina cochleis munienda ut aqua infundi & effundi poſſit, prout uſus poſtulaverit.
3. Ex vaſe AB in vas EF deſcendat tubus GH fundo illius afferruminatus, fundum

vero hujus non prorſus contingens atque clavicula p inſtructus.

4. Ex vaſe DF aſſurgat tubus KI baſi illius ſuperiori afferruminatus, hujus vero baſin ſuperiorem non prorſus attingens.

5. A fundo fere vaſis CB aſcendat alius tubus LM tranſiens per fundum phialæ O aquam ſalientem excipientis, epiſtomio T inſtructus.

6. Denique per roſtrum, corpus & pedes aviculæ vaſi AB inſiſtentis ducatur ſiphon inflexus ZV.

Dico, ſi epiſtomia p & T aperias, vaſis A & B aqua repletis & roſtro aviculæ aquæ immerſo, fore ut aqua per tubulum LM ſaliat & avicula eam ſorbeat.

DEMONSTRATIO.

Dum epiſtomio p aperto aqua per tubulum GH, ex vaſe AC in vas DF deſcendit; aqua ex phiala per roſtrum avis aſcendere debet (§. 77). Dum vero per ſiphonem ZV ſemel fluit, motus continuatur, donec aqua omnis ex phiala fuerit exhauſta (§. 66). Enimvero quamdiu aqua per tubum GH deſcendit, aqua ex cavitate CB per tubum LM ſalire debet (§. 89). Habemus ergo fonticulum ſalientem & aviculam tantum aquæ ſorbentem, quantum ex illo profluit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

158. *Eadem prorſus ſtructura eſt fontis* Kircheriani, *in quo avis tantum aqua ſorbet, quantum a ſerpente in poculum exſpuitur. Abſconde enim tubum* LM *intra corpus ſerpentis & eum inflecte, ut lumen* M *per os hiet: nec difficulter forma fontis in Kircherianum mutabitur.*

PROBLEMA 40.

159. *Fontem conſtruere in vaſe vitreo clauſo ſalientem.*

RESOLUTIO.

1. Sit ſphæra vitrea A, cujus orificium cochlea BE munitum. Tab. VI. Fig. 64.
2. Per cochleam tranſeat tubulus DC, exiguo lumine in C, ſed ampliore in D inſtructus, cujus pars major ſit extra vitrum.
3. Eidem cochleæ afferruminetur tubulus admodum gracilis, ſed altero CD multo longior EF.
4. Sint duo vaſa IK & LM mediante tubo HN inter ſe connexa & baſi ſuperioris IK afferruminetur tubulus GH,
5. per quem ad vas inferius demittatur tubus EF.

Dico, ſi vas IK & aliquam ſphæræ A partem aqua repleas, aquam ex ſphæ-

ſphæra per tubulum EF in vas LM deſcenſuram & per tubulum DC in ſphæram aſcenſuram, per lumen exiguum C ſaliendo.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubulum EF deſcendit, aer in ſphæra dilatatur (§. 36. *Aerom.*), adeoque elater ejus minuitur (§. 78. *Aerom.*). Quare cum incluſus ante dilatationem ponderi atmoſphærico æqualis exiſteret (§. 33. *Aerom.*), quo aqua in vaſe IK premitur (§. 21. *Aerom.*); incluſus poſt dilationem ad lumen C minus reſiſtit, quam externus aquam in vaſe IK premit. Aqua igitur per tubulum DC aſcendere & quia lumen C exiguum *per hypoth.*, ſalire debet (§. 55). *Quod erat unum.*

Cum vero fonticulus hic ſaliens ſit ſipho interruptus, cujus crus minus BD, majus EF; motus aquæ ſalientis continuatio intelligitur per ea, quæ de continuatione motus fluidorum in ſiphonibus demonſtrata ſunt (§. 66). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

160. *Ex demonſtratione apparet, aquam per tubulum* DC *ſalire debere, modo orificium* D *in aquam immergatur, orificio* F *extra eam conſtituto. Unde ſtructura fontis multis modis variari poteſt.*

CAPUT V.
DE
VARIIS MACHINAMENTIS HYDRAULICIS.

PROBLEMA 41.

161. *Fores conſtruere, quibus apertis aqua conſpergatur ingrediens.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 65.

1. Ad latera valvarum juxta ſuperliminare collocentur vaſa AB & CD aqua plena, quibus

2. Tubus recurvus EFGH ita adaptetur, ut pars FG ſub limine lateat tubulis I, K, L per foramina liminis hiantibus.

3. In M & N tubo FG applicentur epiſtomia cum valvis P & Q ita con-

connexa, ut iis apertis & ipſa aperiantur.

Quo facto, aqua per tubulos I, K & L proſiliet & ingredientem madidabit (§.49).

SCHOLION.

162. *Eodem artificio riſcum conſtrues, quo aperto, facies aperientis aqua conſpergatur.*

PROBLEMA 42.

163. ***Efficere, ut in horto vel crypta deambulans ſubito aquis ex terra proſilientibus conſpergatur.***

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 66.

1. Sub terra ita abſcondatur antlia AB, ut virga ferrea GE, qua depreſſa embolus movetur, paulo ultra ipſius ſuperficiem promineat.
2. Embolus F ſit valvula inſtructus & ita aptetur, ut a pede calcantis depreſſus a lamina elaſtica H rurſus attollatur.
3. Sit CD tubus aquam in cylindrum AB advehens, contra pulverem terræ ac arenæ granula probe muniendum.
4. Fundo antliæ afferruminetur tubus ILM, cujus orificium M ultra ſuperficiem terræ paulo promineat.

Dico, aquam per M proſilire debere, ſi pede in G inſiſtas.

DEMONSTRATIO.

Aqua nimirum per tubum CD in ſuperiorem antliæ AB partem delapſa urget valvulam E, quæ cum in partem inferiorem hiet, aperitur & aquæ illuc tranſitum concedit, in tubo LM usque ad N aſcenſuræ (§.34. *Hydroſt.*). Quodſi jam pede calcantis embolus F deprimatur, valvula E clauſa aquæ regreſſum in ſuperiorem antliæ partem impedit (§.104): quare per tubum LM cum impetu ejicitur. Remoto autem pede ab embolo GF, piſtillum ſitui ſuo reſtituitur ope elateris H. Saliet itaque aqua ex M, quoties pes calcantis admovetur embolo G. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

164. *Cum aqua ex altitudine quadam delapſa, ad eam fere rurſus aſcendat (§.49); qua tubo* CD *advehitur, ex vaſe intra terram defoſſo & in planitie replendo illuc derivari debet.*

SCHOLION 2.

165. *Quodſi vero aqua per tubum* CD *advecta ex altitudine quadam fuerit delapſa; in* I *aptanda valvula, cui deprimenda ſolum aqua pondus non ſufficiat: vel totum machinamentum alia ratione conſtrui deberet.*

PROBLEMA 43.

166. *Conſtruere machinam, quæ aquam inſigni cum impetu elevet.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur antlia compresſiva AB (§. 113).
2. Ex ea tranſeat tubulus CD in vas cylindricum HI, cujus ex orichalco paratæ altitudo ſit 2 pedum, diameter octo digitorum.
3. Tubus CD ſit valvula in D inſtructus, quæ in cavitatem vaſis HI hiet.
4. Denique in K afferruminetur tubus recurvus KL, mediante epiſtomio O pro arbitrio claudendus & aperiendus.

Dico, hanc machinam aquam ad inſignem altitudinem elevaturam.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim EF elevato, valvula G aperitur & aqua in antliam AB aſcendit (§. 36. *Aerom.*): quo rurſus depresſo, illa clauditur & valvula D aperta aqua per tubum CD in vas HI ejicitur (§. 105). Quo facto, cum epiſtomium O ſit clauſum, aer in cavitate vaſis HI comprimitur (§. 17. *Aerom.*). Quodſi itaque ſufficienter fuerit compresſus; aperto epiſtomio, aqua inſigni cum impetu per tubum KL prorumpet (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

167. Quoniam agitatione emboli continuata, aër in eodem compresſionis gradu conſervari poteſt; hæc machina aquam continuo ejicit.

PROBLEMA 44.

168. ***Hydracontiſterium, hoc eſt, machinam conſtruere, quæ aquam ad incendia reſtinguenda ad datam altitudinem & in datum locum evomat.***

RESOLUTIO.

1. Fiat ciſta AB figuram parallelepipedi habens & rotis C inſtructa, ut commode ad locum incendii advehi posſit. Sunt & qui ciſtam trahæ imponunt, firmitatis gratia, quia non tam facile damnum patitur, quam rota. Tab. VII. Fig. 68.
2. Intra ciſtam firmetur machina Cteſibiana cum gemino cylindro (§. 113).
3. Ad agitandos embolos applicentur vectes DE cum axe curvato, ita ut embolus alter deprimatur, dum unus attollitur.
4. Tubus, per quem aqua ejaculatur, immittatur alteri mobili GH, qui ad locum deſideratum commode dirigi poteſt.

Si enim continuo aqua in ciſtam AB infundatur & emboli nunc e-

leventur, nunc deprimantur; aqua per tubum GH ad locum deſideratum ejaculabitur (§. *cit.*). Machina igitur ad reſtinguenda incendia commode utimur.

SCHOLION 1.

169. *Belgæ aliique ipſorum exemplo excitati tubo mobili* GH *ſubſtituunt tubum longum, flexilem, ex materia velorum vel corio factum, qui manu arreptus ad quævis loca incendio infeſtata trahitur ab homine ex conclavi uno in alterum libere deambulante, prout neceſſitas poſtulaverit. (Vocatur tubus iſtiusmodi Germanis* ein Schlauch). *Unde apparet, hac ratione hydracontiſteriis eſſe locum, etiamſi flamma in conclavibus ædificis tantum ſæviat, nec per tectum ac feneſtras foras erumpat.*

SCHOLION 2.

170. *Non inutiliter machinæ Cteſibianæ ſubſtituere licet alteram* in probl. 43. (*§. 166*) *deſcriptam, quia aquam non per intervalla, ſed continuo ejaculatur.*

PROBLEMA 45.

171. *Efficere, ut ad ſpeculum aut objectum aliud accedens aqua ex improviſo conſpergatur.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 69.

1. Sit AB ciſta aqua plena, cujus fundo adferruminetur tubus recurvus CDEF.
2. Pars tubi intra ciſtam AB paulo infra embolum elevatum foraminibus nonnullis pertundatur.
3. Denique embolus G ita immittatur, ut ceſſante vi deprimente, per elaterium rurſus attollatur.

DEMONSTRATIO.

Aqua enim per foraminula in tubum CD defluet ac in tubo EF eousque aſcendet, donec in eadem altitudine ſubſiſtat, ad quam aqua intra ciſtam AB conſtituitur (*§. 34, Hydroſt.*). Quodſi vero embolum in H pede deprimas, aquam per F ejiciet, adeoque eadem ex improviſo conſpergeris. *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Quodſi aqua ex alto delabatur, ſufficit, ut pede deprimatur valvula, quæ aquæ aditum in tubum* EF *concedat* (§. 85).

PROBLEMA 46.

173. *Conſtruere ſpeculam, in qua ſpeculator conſtitutus ſonum ingentem cornu edat.*

RESOLUTIO.

1. In ſuperiore loco ſpeculæ conſtituatur vas aqua plenum AB & in inferiore aliud aere plenum CD, contra omnem vero aeris acceſſum optime munitum. Tab. VI. Fig. 70.

2. Ex

2. Ex vaſe ſuperiori AB in inferius CD tranſeat tubus EF epiſtomio L inſtructus.

3. Ex vaſe inferiori CD aſcendat tubus HG per vas, pedem, corpus & os ſpeculatoris, cui cornu K ſit afferruminatum.

Etenim laxato exiſtomio L, aqua ex vaſe AB per tubum EF deſcendit & ingenti celeritate aerem ex vaſe CD per tubum HG expellit, qui dum per cornu egreditur eundem ſonum parit, qui aere in cornu inflato audiretur.

SCHOLION 1.

174. *Simili artificio ſonos alios produces.* Kircherus (b) *cantum ſingularum fere avicularum notis muſicis exprimere & in cylindrum phonotacticum aquis per tubos delabentibus facile convertendum transferre docuit: unde multa excerpſit* Schottus (c), *qua ad hoc argumentum hydraulicum perficiendum tendunt.*

SCHOLION 2.

175. *Huc referenda quoque ſunt organa hydraulica jam veteribus nota &* a Vitruvio (d) *deſcripta, a* Perraltio *in notis ſchematiſmo nitido egregie illuſtrata: de quibus, cum non amplius in uſu ſint, hic dicere non attinet.*

PROBLEMA 47.

176. *Ventum excitare ad flammam conſervandam aptum.*

RESOLUTIO.

1. Ad baſin dolii ſuperiorem AB aptetur tubus CE, cujus altitudo 5 minimum aut ſex pedum, amplitudo ea, ut tota aqua continuo affluente repleatur. Tab. VII. Fig. 71.

2. Tubus EC hinc inde inſtruendus eſt tubulis F aut, ſi mavis, foraminulis, ut ab aqua deſcendente aer una in dolium abripiatur.

3. In baſi inferiori CG e regione luminis E ſita ſit tabula marmorea aut lapidea alia polita, in quam aqua perpendiculariter incidat.

4. In G aptetur tubus I anguſtior eo, per quem aqua delabitur, ut delapſa ex dolio iterum effluat.

5. Denique in H ſit tubus ad eum locum protenſus, quo ventus ſpirare debet.

Dum enim aqua cum impetu in tabulam lapideam M incidit ac diſpergitur, aer ingenti impetu per tubum

(b) Muſurgiæ lib. 9. part. 5.
(c) in Magia Univerſali Naturæ & Artis part. 2. lib. 6.
(d) lib. 10. c. 13. f. m. 325.

tubum H expellitur. Habes ergo ventum valide ſpirantem (§. 166. *Aerom.*).

SCHOLION 1.

177. Franciſcus Tertius de Lanis (e) *autor eſt, ſe vidiſſe, hoc artificio ventum majorem fuiſſe excitatum, quam qui follibus decem aut duodecim pedibus longis efficiebatur. Hinc in fornacibus majoribus ad liquandum ferrum aliaque metalla eodem utuntur.*

SCHOLION 2.

178. *Enimvero opus non eſt, ut tubus* CE *ſit rotundus & vas* ABCD *figuram dolii habeat. Utriusque figura ad arbitrium variari, e. gr. quadrata fieri poteſt. Unde quidam loco dolii cameram ex lateribus conſtruunt. Opera tantummodo danda, ne aer ex vaſe* ABCD *ullibi, quam per tubum H erumpere poſſit.*

SCHOLION 3.

Tab. VII. Fig. 72. 179. *Succedit etiam artificium, ſi nullum adſit dolium; ſed aqua per tubum quadratum* AB *nullis ſpiraculis inſtructum tantum delabatur, ad quem aptatus ſit tubus* GH, *unde ventus ſpirat. Quodſi uſus poſtulaverit, ut ventus interrumpatur, obturato orificio* H, *aperiatur aliud* I, *vento exitum concedens.*

PROBLEMA 48.

180. *Duo vaſa conſtruere, quorum unum utut plenum vino, nihil tamen ejus effundit, niſi alterum fuerit aqua plenum eamque effundat: quæ* Vaſa concordiæ *vocantur.*

RESOLUTIO.

1. Sint AB & CD duo vaſa, quæ mediante tubo recurvo EFGH inter ſe communicent. Tab. Fig. 7
2. In utroque vaſe aptetur ad fundum diabetes (§. 72), ita ut orificium tubi minoris I ſit infra orificia E & H tubi recurvi EFGH.

Quodſi vas AB vino repleatur, donec lumen I ſit in libella ejus; nihil effluet (§. 72). Sed ſi vas alterum CD aqua adimpleas totum; per tubum EFGH vas alterum AB ingreditur (§. 34. *Hydroſt.*) & quantitatem liquoris ibidem auget. Quare cum jam utrinque liquor ultra orificium I aſcendat; per M omnis aqua ex vaſe CD, per L vero vinum omne ex vaſe AB effluet (§. 72). *Q. e. d.*

PROBLEMA 49.

181. *Vas conſtruere, quod tantum vini effundit, quantum aquæ infuderis.*

RE-

(e) in Magiſterio Naturæ ac Artis lib. 5. c. 3. artif. 25. f. 197.

RESOLUTIO.

1. Fiat vas ADBC in duas cavitates per diaphragma GF diviſum & undiquaque contra acceſſum aëris probe munitum.
2. Operculo AD afferruminetur tubulus HI per cavitatem unam GB ad fundum fere vaſis CB pertingens.
3. Cavitates duæ inter ſe communicent tubo recurvo LK.
4. Denique cavitati alteri immittatur tubulus M & utraque cavitas inſtruatur foramine cochlea munito, ut, ſi opus fuerit, liquor infundi & rurſus effundi poſſit.

Quodſi enim cavitatem AF vino repleas, nihil infuſi per MN effluet (§. 34 *Hydroſt.*). Enimvero ſi per tubulum HI aquam cavitati alteri affundas; aer per tubum KL in cavitatem alteram propellitur adeoque vinum per tubum MN expellit.

PROBLEMA 50.

182. *Vas conſtruere, quod liquorem excipit, donec fuerit plenum, ſi conſtanter eum affuderis; ſed ne guttam amplius admittit, ubi ſemel ceſſaveris.*

RESOLUTIO.

1. Vas AB per diaphragma CD in

duas cavitates ACD & CDB dividatur, quarum ſuperior aperta eſſe poteſt.
2. Ad diaphragma in cavitate ſuperiore AD aptetur diabetes GF: ſub diaphragmate autem in cavitatem inferiorem hiet tubulus H. Tab. VII. Fig. 75.

Quodſi aquam conſtanter affundas, ea per diabetem GF defluet in cavitatem inferiorem CD aeremque per tubulum H expellet (§. 72). Sed ſi aliquamdiu deſiſtas, aer tubum longiorem diabetæ replebit, excepta parte FE aquæ immerſa. Nihil ergo amplius per tubum iſtum in cavitatem BC defluet.

PROBLEMA 51.

183. *Vas conſtruere, ex quo per idem orificium vel aqua, vel vinum fluit, prout deſideraveris, vel etiam mixtum ex aqua & vino.*

RESOLUTIO.

1. Sit vas AB per diaphragma CD in duas cavitates diviſum. Tab. VII. Fig. 76.
2. In operculo vaſis AE fiant duo foramina F & G, per quæ aeri in utramque cavitatem aditus patet.
3. In fundo fiant duo alia L & D, per quæ liquores in cavitatem IHB deſcendere poſſunt.

4. Ex terria hac cavitate procedat tubulus M.

Quodſi foramen G obtures, per tubum M effluet vinum ex cavitate CI. Si foramen F obtures, fluxus vini ceſſabit, fluetque aqua ex cavitate CB per eundem tubulum M. Quodſi denique utrumque foramen F & G fuerit apertum; aqua & vinum una per tubulum M effluent.

SCHOLION.

184. *Ex his principiis innumera alia derivare licet.*

CAPUT VI.

DE

CURSU FLUMINUM.

DEFINITIO 6.

185. *Alveus fluminis* eſt cavitas in ſuperficie Telluris effecta, intra quam aqua continuo decurrit.

DEFINITIO 7.

186. *Alveus naturalis eſt*, qui a natura effectus eſt. *Alveus* vero *artificialis* vocatur, qui arte effectus fuit.

SCHOLION.

187. *Iſtiusmodi alveos artificiales parant molitores ad aquas in rotas molares derivandas* (§. 925. Mech.). *Germanico idiomate alveus naturalis* der wilde Bach, *alveus autem artificialis* der Mühlgraben *appellatur.*

DEFINITIO 8.

188. *Sectio alvei* eſt planum ad fundum perpendiculare, cujus termini aquam per alveum decurrentem non egrediuntur.

SCHOLION.

189. *Ponamus aquam intra alveum totam ſubito abire in glaciem & ſecari plano ad fundum alvei perpendiculari Qua hinc prodit ſectio, erit ea, quæ nobis hic ſectio alvei vocatur.*

DEFINITIO 9.

190. *Sectio naturalis* eſt ſectio alvei naturalis: *Sectio vero artificialis* ſectio alvei artificialis.

SCHOLION.

191. *Definitio adeo ſectionis fluminis, quam dedimus, cum de molendinis ageremus* (§. 914. Mech.), *eſt ſectionis artificialis, quoniam ibi cum alveo artificiali, per quem aqua ad rotas molares deducitur, nobis fuit negotium.*

COROL-

COROLLARIUM 1.

192. Quoniam conſtat alveos naturales figuram habere prorſus irregularem, quæ ad aliquam geometricam commode reduci nequit; ſectio naturalis figura plana irregularis eſt.

COROLLARIUM 2.

193. Quia vero alvei artificiales figuram parallelepipedi habent; ſectio artificialis eſt rectangulam parallelogrammum (§. 462. *Geom.*).

SCHOLION.

194. *Qualis figura ſit ſectio artificialis jam oſtendimus alibi,* (§. 915. Mech.). *Poteſt vero figura quæcunque irregularis ad parallelogrammum reduci, cujus baſis latitudini fluminis æqualis. Unde in ſequentibus per ſectionem intelligemus rectangulum, cujus latitudo eadem cum latitudine fluminis, niſi res ipſa loquatur poſſe quamcunque ſectionem ſupponi.*

DEFINITIO 10.

195. *Sectiones* dicuntur *æquevelocés*, per quas aqua eadem celeritate media fluit. Quid vero ſit velocitas ſeu celeritas media, commodius docebitur deinceps.

DEFINITIO 11.

196. *Sectio velocior* eſt, per quam aqua celerior fluit; *Sectio tardior*, per quam fluit tardior.

DEFINITIO 12.

197. *Flumina in ſtatu manente* ſunt, ſi ſuperficies aquæ intra alveum nullibi nec attollitur, nec deprimitur, ſed eadem manet in eodem loco profunditas.

SCHOLION.

198. *Neque enim repugnat, ut propter alvei irregularitatem flumen alibi ſit profundius, alibi minus profundum.*

DEFINITIO 13.

199. *Flumen intumeſcit*, ſi ſuperficies aquæ intra alveum attollitur; *detumeſcit*, ſi eadem deprimitur.

THEOREMA 28.

200. *Aquæ libere fluentis in alveo declivi curſus acceleratur propter declivitatem fundi; in horizontali propter preſſionem, quam inferior ſuſtinet a ſuperiori.*

DEMONSTRATIO.

Aqua enim fluidum grave eſt & quidem gravitatis eximiæ (§. 64. *Hydroſt.*). Sed gravia per declivia ſeu ad horizontem inclinata motu accelerato deorſum ruunt (§. 384. *Mech.*). Ergo etiam aqua per alveum declivem motu accelerato ruere debet, atque adeo curſus fluminis acceleratur per fundi declivitatem. *Quod erat unum.*

Cum aqua in alveo horizontali ad aliquam a fundo altitudinem aſſurgit; inferiori incumbit ſuperior.

Enimvero motus aquæ ob preſſionem, quam à ſuperiore ſuſtinet. perinde ac cadendo per aliquam altitudinem, acceleratur (§. 48). Ergo curſus fluminis acceleratur quoque per preſſionem, quam aqua inferior a ſuperiore ſuſtinet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

201. Quo declivior adeo fundus alvei eſt, eo celerius aqua per eundem decurrit.

COROLLARIUM 2.

202. Quo profundior aquæ in alveo horizontali altitudo eſt, ad quam intra alveum aſſurgit, eo celerior curſus fluminis.

COROLLARIUM 3.

203. Quoniam aqua fundo propior magis premitur, quam ab eo remotior; quo fundo propior eo curſus ejus magis acceleratur.

COROLLARIUM 4.

Tab. I. Fig. 7. 204. Quoniam celeritas per planum inclinatum AB a gravi in B acquiſita eſt ut radix altitudinis AD (§. 288. *Mechan.*); aqua etiam ſi libere fluit per canalem declivem AB in B eandem celeritatem acquirere debet, quæ eſt ut radix altitudinis AD.

COROLLARIUM 5.

205. Quodſi aqua per foramen B egrederetur ex vaſe, in quo ad altitudinem BF ipſi AD æqualem conſiſteret; ejus quoque celeritas eſſet ut radix altitudinis BF ſive AD (§. 48). Aqua igitur per canalis inclinati ſectionem eadem velocitate movetur, ac ſi flueret ex vaſe per lumen ſectioni congruens a ſuperficie aquæ tantundem remotum, quantum ſectio ab horizontali per initium canalis ducta diſtat.

THEOREMA 29.

206. *In qualibet ſectione canalis inclinati celeritas aquæ libere fluentis major eſt in fundo, quam in ſuperficie.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur per originem canalis A linea horizontalis AE, ſitque ſectio, per quam aqua fluit BC, quæ eſt ad fundum AB perpendicularis (§. 188). Demittantur ex B & C perpendiculares ad AE, ducaturque HC ipſi DB parallela: erit GF perpendicularis ad HC (§. 230. *Geom.*) & FG = EC (§. 326. *Geom.*), conſequenter FB > FG vel EC. Enimvero aquæ in C celeritas ea eſt, quam cadendo per altitudinem EC acquiviſiviſſet, aquæ autem in B ea, quam cadendo per FB haberet (§. 287. *Mechan.*). Major igitur celeritas in B quam in C (§. *cit.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

207. *Sequitur ex iis, quæ demonſtrata ſunt, fluminis curſum continuo celeriorem fieri debere, quo longius juxta fluvium progrederis: id quod tamen experientia parum convenire videtur. Tenendum itaque & ripas, & fundi inæqualitates cauſari reſiſtentias, per quas celeritas continuo imminuitur, immo modo acquiſita rurſus extinguitur. Sed de his impedimentis accidentalibus noſtrum jam non eſt dicere. Id tantummodo inculcandum eſſe cenſemus, cum declivitas fundi exigua ſit, gravitatem quoque acceleratricem exiguam eſſe, cum maxima pars ad actionem in fundum, minima autem ad deſcenſum impendatur* (§. 161. Mech.).

DEFINITIO 14.

208. Per *celeritatem* ſeu *velocitatem mediam* intelligo eam, qua ſi aqua flueret omnis per ſectionem, tantundem eodem tempore per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur.

SCHOLION.

209. *Hinc intelligitur, cur ſectiones æqueveloces definiverimus per eas, per quas aqua eadem celeritate media fluit* (§. 195). *Quoniam enim aqua inferior celerior fluit ſuperiori ob diverſam preſſionem & fundi declivitas diverſa diverſa quoque celeritatis cauſa eſt; per ſectiones eadem celeritate variabili non fluit aqua, niſi eædem & æquales, & ſimiles fuerint, adeoque theoremata de ſectionibus æquevelocibus non eam acciperent latitudinem, quam habere poſſunt, niſi variabilis celeritas ad mediam quandam conſtantem reduceretur.*

THEOREMA 30.

210. *Per ſectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt.*

DEMONSTRATIO.

Per ſectiones enim æqueveloces aqua fluit eadem celeritate media (§. 195.) Quare cum vi celeritatis mediæ tantundem aquæ per ſectionem fluat, quantum celeritate variabili eodem tempore per eandem fluit (§. 208) & ſectiones æquales ſint *per hypoth.* eodem tempore per ſectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

211. Quodſi ergo ſectiones æqueveloces fuerint inæquales, cum minor parti majoris æquetur (§. 20. *Arithm.*); per partem majoris tantundem aquæ eodem tempore fluit, quantum per minorem, conſequenter per majorem totam plus fluit.

COROLLARIUM 2.

212. Et quoniam per ſectionem æquevelocem duplam dupla, per triplam tripla, per quadruplum quadrupla aquæ quan-

quantitas fluere debet, ac ita porro in quacunque ratione inæqualitatis (§. 210); Quantitates aquarum per æqueveloces ſectiones fluentes eodem tempore ſunt inter ſe ut ſectiones.

THEOREMA 31.

213. *Per ſectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ ſunt ut velocitates mediæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ ſectiones æquales A & B, & aqua fluat per B dupla celeritate, qua fluit per A. Concipiatur ſectio infinite parvæ craſſitiei & huic reſpondens aqua tranſeat tempuſculo infinite parvo per ſectionem A. Quoniam celeritas media in ſectione B dupla eſt *per hypoth.* dum aqua a ſectione A diſtat intevallo craſſitiei iſti reſpondente, altera a B duplo iſtiusmodi intervallo diſtare debet (§. 33. *Mechan.*). Dupla igitur quantitas aquæ tempuſculo infinite parvo eodem fluit per ſectionem B. Jam cum tempus quodcunque in iſtiusmodi tempuſcula æqualia reſolvi poſſit, & ſingulis per B dupla fluat aquæ quantitas *per demonſtrata;* evidens eſt quod omnibus iſtis tempuſculis ſimul ſumtis, hoc eſt dato quocunque tempore aquæ per ſectionem B dupla quantitas fluere debeat: quod cum eodem modo fieri intelligatur in ratione celeritatum quacunque: per ſectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ ſunt ut velocitates mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 32.

214. *Si ſectiones fuerint inæquales, nec æqueveloces; quantitates aquarum per eas eodem tempore fluentes ſunt in ratione compoſita ſectionum & celeritatum mediarum.*

DEMONSTRATIO.

Fluat dato tempore per ſectionem S celeritate media C quantitas aquæ Q & eodem vel æquali tempore per aliam quamcunque ſectionem *ſ* alia quacunque celeritate *c* quantitas aquæ *q*. Fluat vero eodem tempore per ſectionem S celeritate *c* quantitas aquæ *m*. Quoniam aquæ quantitates *q* & *m* per ſectiones inæquales *ſ* & S eadem celeritate media fluunt; erunt eædem in ratione ſectionum (§. 212). Et quia quantitates Q & *m* per æquales ſectiones S diverſa celeritate C & *c* fluunt; erunt eædem in ratione celeritatum C & *c* (§. 213). Habemus adeo $Qm : mq = SC : ſc$ (§. 213. *Arith.*), & hinc $Q : q = SC : ſc$ (§. 181. *Arithm.*)

con-

conſequenter quantitates aquarum Q & q per ſectiones inæquales, nec æqueveloces fluentes ſunt in ratione compoſita ſectionum S & $ſ$ atque celeritatum mediarum C & c (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

215. Si $Q = q$, erit $SC = ſc$, adeoque $S : ſ = c : C$ (299. *Arithm.*), hoc eſt, ſi eodem tempore quantitates aquarum per inæquales ſectiones diverſa celeritate media fluunt, erunt ſectiones in ratione celeritatum mediarum reciproca.

COROLLARIUM 2.

216. Quodſi præterea fuerit $S = ſ$, erit etiam $C = c$, adeoque ſi quantitates aquarum eædem per æquales ſectiones fluunt; celeritas media eadem eſt, conſequenter ſectiones æqueveloces ſunt (§. 195).

COROLLARIUM 3.

217. Quodſi ponatur $C = c$; erit etiam $S = ſ$, adeoque ſi celeritas media eadem & quantitates aquarum eodem tempore per utramque ſectionem fluentes æquales, conſequenter ſi ſectiones æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fundunt (§. 195); æquales ſunt.

COROLLARIUM 4.

218. Quoniam $Q : q = SC : ſc$ (§. 214); erit $qSC = Qſc$ (§. 297. *Arithm.*) & hinc $C : c = Qſ : qS$ (§. 299. *Arithm.*), hoc eſt, celeritates mediæ ſunt in ratione compoſita ex reciproca ſectionum & directa quantitatum aquarum, quas eodem tempore fundunt.

THEOREMA 33.

219. *Si fluvius fuerit in ſtatu manente, per omnes ſectiones quomodocunque inæquales* AB, CD, EF, GH *aquæ eadem quantitas eodem tempore fluit.* Tab. VIII. Fig. 78.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim per ſectionem CD eodem tempore minorem quantitatem aquæ fluere quam per ſectionem AB: inter ſectiones AB & CD aquæ quantitas continuo major fieri debet, adeoque fluvius in alvei ABDC parte continuo intumeſcit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de ſectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in ſtatu manente (§. 197). Hoc cum ſit contra hypotheſin, aquæ per ſectionem aliquam inferiorem minor quantitas fluere nequit, quam per ſuperiorem quamcunque.

Ponamus ex adverſo per ſectionem CD aquæ majorem quantitatem eodem tempore fluere, quam per ſectionem AB: inter ſectiones AB & CD quantitas aquæ continuo minor fieri debet, adeoque fluvius in parte alvei ABCD continuo detumeſcit (§. 199):

199): quod idem cum eodem modo pateat de ſectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in ſtatu manente (§.197) *contra hypotheſin*. Aquæ igitur per ſectionem aliquam inferiorem major quantitas fluere nequit, quam per ſuperiorem quamcunque.

Quoniam itaque per ſectionem inferiorem aliquam nec minor, nec major quantitas fluere poteſt, quam per ſuperiorem quamcunque; per omnes omnino ſectiones quomodocunque inæquales eodem tempore eadem fluere debet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

220. Quoniam Sectiones AB, CD, EF, GH inæquales ſunt, eodem tamen tempore æquales aquæ quantitates per ſingulas fluunt; aqua per ſectiones minores celerius fluere debet, quam per majores.

COROLLARIUM 2.

221. Flumen igitur coarctando aquæ celeritas augetur, conſequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aqua ibidem altius aſſurgere (§. 206), adeoque fluvius intumeſcere debet (§. 199).

COROLLARIUM 3.

222. Ex adverſo flumen dilatando aquæ celeritas imminuitur, conſequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aquæ ibidem altitudo imminui (§.206), adeoque fluvius detumeſcere debet (§.199).

COROLLARIUM 4.

223. Quoniam in quibuscunque fluvii ſectionibus æquali tempore æquales aquæ quantitates fluunt (§.219), ſectiones vero inæquales ſunt *per hypoth.* celeritates mediæ in duabus quibuscunque fluminis ſectionibus ſunt ut ſectiones reciproce (§. 215).

SCHOLION.

224. *Quæ corollariis tribus prioribus continentur, experientiæ conſona ſunt. Videmus enim aquam ibidem celerius fluere & profundiorem eſſe, ubi minor eſt fluvii latitudo; ibi autem fluere tardius & minus profundam deprehendi, ubi major ejus latitudo, niſi forſan ex accidente adſit quædam vorago. Uſu quoque in praxi receptum eſt, ut ad accelerandum motum fluminis alveus coarctetur.*

THEOREMA 34.

225. *Si fluvius intumeſcit, aqua fluens per quamlibet ſectionem dato quodam tempore eſt ad aquam, quæ ante intumeſcentiam ibidem fluxerat in ratione compoſita ſectionis ac celeritatis mediæ auctæ ad ſectionem & celeritatem mediam priſtinam.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim fluvius intumeſcit, aqua intra alveum fit altior, conſequenter non modo ſectio, verum

rum etiam celeritas media (§.199. 206) augetur. Nova igitur ſectio majorem quantitatem aquæ eodem tempore fundit quam priſtina. Quoniam vero ſectio major jam facta & priſtina ſpectari poſſunt inſtar ſectionum duorum fluminum, per quas aqua diverſa celeritate fluit, cum fluvius intumeſcens a ſeipſo differat, quemadmodum a fluvio altero profundiori, ſed ejusdem declivitatis, quæ tamen hic attendenda non venit; aqua fluens per ſectionem auctam celeritate media aucta erit ad aquam fluentem æquali tempore per ſectionem priſtinam celeritate priſtina in ratione compoſita ſectionis auctæ ad ſectionem priſtinam & celeritatis mediæ auctæ ad celeritatem mediam priſtinam. (§.214.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

226. Erit adeo augmentum aquæ fluentis ad aquam priſtinam æquali tempore fluentem ut differentia factorum ex velocitatibus mediis in ſectiones ad factum ex ſectione priſtina in celeritatem (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

227. Quodſi ſectio in eodem alvei naturalis loco ad parallelogrammum propius accedit, cum parallelogramma ejusdem baſis altitudinum rationem habeant (§.389. *Geom.*); augmentum aquæ fluentis poſt intumeſcentiam erit ad aquam fluentem ante eandem ut differentia factorum ex altitudine aquæ aucta in celeritatem mediam auctam & ex altitudine priſtina in celeritatem priſtinam ad factum poſterius: id quod in alveo artificiali ſemper locum habet (§. 193).

SCHOLION.

228. *Quando de altitudinibus ſectionum vel aqua in alveo fuerit ſermo, per eam intelligitur ea perpendiculi a ſuperficie aquæ in fundum demiſſi pars, per quam aqua continuo fluit, ita ut, ſi fluxus omnis protinus ceſſare ponatur, nulla aqua in defluentis locum ſuccedente, nihil prorſus aqua in ea remanere intelligatur. Etenim aqua in cavitatibus fundi ſtagnantis nulla in fluxu habenda ratio eſt, cum perinde ſit ac ſi prorſus abeſſet fundo plano exiſtente. Vulgo autores, qui de aquis currentibus ſcripſere, perpendiculum iſtud, per quod aqua fluit,* altitudinem vivam *vocare ſolent, quod ſit altitudo aquæ vivæ: aqua enim currens ad differentiam ſtagnantis viva appellari ſolet* (§. 10. Mech.).

THEOREMA 35.

229. *Si fuerit* AB *canalis declivis* & BC *altitudo ſectionis continuetur, donec lineæ horizontali* AL *per initium ejus* A *ductæ, ubi ſuperficies aquæ canalem ſecat, in* L *occurrat & circa axem* LB *deſcribatur parabola quæcunque* LGH; *ſemiordinata* CG *exponet celeritatem aquæ in* C, BH *celeritatem fundo proximam & ſemiordinatæ intermediæ inter* CG & BH *celeritates* Tab. VIII. Fig. 79.

quaſcunque in perpendiculari BC *inter* C & B *intermedias.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim aquarum in C & B ſunt in ratione ſubduplicata rectarum EC & FB (§. 204). Et quoniam CE & BF perpendiculares ad AL *per hypoth.* erit CE ipſi BF parallela (§. 296. *Geom.*). Quamobrem cum ſit LC : LB = CE : BF (§. 268. *Geom.*); celeritas in C & B etiam in ratione ſubduplicata rectarum CL & LB exiſtunt (§. 124. *Analyſ. fin.* & §. 156. *Arithm.*). Enimvero ſemiordinatæ parabolæ CG & BH ſunt itidem in ratione ſubduplicata rectarum CL & BL (§. 412. *Analyſ. fin.*). Ergo etiam celeritates in C & B ſunt ut ſemiordinatæ CG & BH (§. 156. *Arithm.*), adeoque ſemiordinatæ CG & BH celeritates in C & B exponunt. Et quoniam de ſingulis ſemiordinatis intermediis idem eodem modo conſtat; ſemiordinatæ quoque intermeditæ celeritates intermedias exponunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

230. Si ergo BC fuerit perpendiculum ſectionis fluminis; ſpatium parabolicum CGHB eſt complexus omnium velocitatum iſtius ſectionis.

COROLLARIUM 2.

231. Quoniam $CG^2 : BH^2 = BL : CL$ (§. 412. *Anal. fin.*) adeoque $BH^2 - BG^2 : BH^2 = BC : BL$ (§. 193. *Arithm.*); ſint vero celeritates aquæ in B & C ut BH ad CG perpendiculari ſectionis exiſtente CB (§. 229); datis celeritatum in C & B ratione ac altitudine ſectionis BC, inveniri poteſt axis parabolæ B L.

COROLLARIUM 3.

232. Cum ducta IG ipſi BC parallela ſit CG = BI (§. 238. *Geom.*), adeoque IH differentia ſemiordinatarum CG & BH, conſequenter ut BC ad HI ita CG + BH ad parametrum (§. 404. *Anal. fin.*); datis CG & BH in eadem menſura, qua datur perpendiculum ſectionis BC, in eandem quoque menſura reperietur parameter parabolæ menſurantis celeritates & amplitudo ejus erit definita.

PROBLEMA 52.

233. *Dato angulo inclinationis alvei ſeu canalis* ABK *una cum altitudine ſeu perpendiculo ſectionis* BC *& celeritatum in* C *&* B *ratione, invenire diſtantiam fundi ab horizontali* AL *per initium alvei ducta atque diſtantiam* AF *ab initio alvei una cum hujus longitudine* BA. Tab. VIII. Fig. 79.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam BK parallela ipſi AL

per hypoth. angulus BAL angulo inclinationis ABK æqualis eſt (*§.233. Geom.*). Et quoniam rectus ABL recto KBA æqualis; demto communi ABF; erit FBL angulo inclinationis ABK æqualis (*§. 91. Arithm.*). Dantur itaque in triangulo BFL præter rectum ad F anguli obliqui FBL & FLB, itemque in triangulo ABF præter rectum ad F obliqui BAF & FBA.

2. Ex datis CG & BH una cum BC inveniatur axis ſeu altitudo parabolæ BL (*§.231*). Unde porro

3. Calculo trigonometrico definietur recta BF (*§.36. Trigon.*) & hinc tandem

4. recta AF, atque AB (*§. cit. Trigon.*).

THEOREMA 36.

234. *Si ſemiordinatæ parabolæ menſurantis celeritates aquæ intra minutum ſecundum ſeu tempus quodcunque datum per perpendiculum ſectionis fluentis* CB *&* GH *ſint æquales ſpatiis, quæ aqua per extrema perpendiculi ſectionis* BC *fluens dato tempore deſcribit, & in partibus hujus aſſignentur; ſpatium parabolicum* BCGH *definiet quantitatem aquæ per ſectionis perpendiculum* BC *tempore iſto fluentem.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur perpendiculum ſectionis BC diviſum in particulas infinite parvas, quæ deſignabunt aquæ particulas eodem tempore in perpendiculo BC conſtitutas. Quoniam vero ſemiordinatæ ad BC applicatæ ſunt æquales ſpatiis intra tempus datum veluti minutum ſecundum deſcriptis ab iisdem particulis aquæ; arcus parabolicus GH terminabit omnem aquam, quæ initio hujus temporis in BC conſtituebatur, conſequenter ſpatium BCGH definit quantitatem aquæ per perpendiculum BC intervallo unius minuti ſecundi fluentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

235. Quoniam ſpatium parabolicum GCL = ⅔ LC. CG & BLH = ⅔ BL. BH (§. 104. *Anal. infin.*), BCGH vero illorum ſpatiorum differentia; ſi ex datis ſpatiis, quæ aqua per extrema perpendiculi ſectionis fluens intra tempus datum deſcribit, quæratur axis parabolæ (§. 231;) quantitas aquæ intra tempus datum per perpendiculum fluens determinari poteſt.

COROLLARIUM 2.

236. Quoniam in ſectione artificiali perpendicula omnia æqualia ſunt (§. 193);

 aqua

aqua fluens per totam ſectionem reperitur, ſi quantitas fluentis per perpendiculum ducatur in latitudinem alvei. Quamobrem cum hæc inveniri poſſit (§. 235); etiam quantitas per totam ſectionem artificialem fluens definiri poteſt.

DEFINITIO 15.

Tab. VIII. Fig. 79. 237. Velocitates aquæ transeuntis per extrema C & B perpendiculi ſectionis dico brevitatis gratia *celeritates terminales*. Dantur autem celeritates terminales per ſpatia CG & BH, quæ intra tempus datum aqua fluens per B & C deſcribit.

PROBLEMA 37.

238. *Datis celeritatibus terminalibus una cum perpendiculo ſectionis invenire celeritatem mediam.*

RESOLUTIO.

1. Ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo ſectionis inveſtigetur quantitas aquæ per perpendiculum iſtud tempore dato fluens (§. 235).
2. Quantitas hæc inventa dividatur per perpendiculum ſectionis: dico quotum definire celeritatem mediam in partibus perpendiculi ſectionis. Q. e. i.

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo ſectionis inveſtigetur quantitas aquæ dato tempore per perpendiculum iſtud BC fluens, ſpatium parabolicum BCGH prodit (§. 234). Quoniam vero celeritate media eadem quantitas aquæ per BC fluit eodem tempore, quæ variabili fluit (§. 280); & ob celeritatem eandem in ſingulis perpendiculi partibus, etiam infinite parvis (§. *cit.*), per parallelogrammum rectangulum exprimitur, cujus altitudo perpendiculum ſectionis BC; area rectanguli, cujus altitudo BC, celeritas media baſis, æquatur ſpatio parabolico BCGH. Quamobrem ſi area ſpatii hujus parabolici dividatur per perpendiculum ſectionis BC; prodibit celeritas media quæſita (§. 375. *Geom.*). Q. e. d.

PROBLEMA 38.

Tab. VIII. Fig. 79. 239. *Datis celeritatibus terminalibus* CG & BH *una cum ſectionis perpendiculo* BC, *punctum* K *in eodem definire, per quod aqua celeritate media fluit.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quæratur celeritas media (§. 238) &
2. ex ſemiordinata Parabolæ velocita-

citates exhibentis BH, quæ maximam celeritatem repræſentat, reſecetur recta BM eidem æqualis.

3. In M erigatur perpendicularis MO ſecans parabolam in O.

4. Denique ex puncto O demittatur perpendicularis ad axem parabolæ OK, quæ erit ſemiordinata puncto O reſpondens (§. 370. *Anal. fin.*) atque adeo BK eſt diſtantia puncti perpendiculi a fundo, in quo aqua celeritate media movetur.

5. Hinc porro calculo definitur profunditas puncti K, in quo aqua movetur celeritate media inferendo (§. 404. *Anal. fin.*): ut parameter quam ex datis reperire licet (§. 232) ad aggregatum ex celeritate minima CG & media KO ita harum celeritatum differentia MH ad profunditatem quæſitam KC.

PROBLEMA 39.

ab. III. ig. 9. 240. *Data longitudine canalis inclinati* AB *una cum angulo inclinationis* BAF *& perpendiculo ſectionis* BC *invenire celeritates terminales, atque mediam una cum axe parabolæ celeritates menſurantis* BL *& verticis* L *ab initio canalis* A *diſtantia.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex data longitudine canalis inclinati AB & angulo inclinationis BAF invenitur in triangulo ABF diſtantia fundi ab horizontali BF & in triangulo ABL ad B rectangulo (§. 188) diſtantia verticis parabolæ ab initio canalis AL, una cum axe parabolæ BL (§. 36. *Trigon.*).

2. Subducta altitudine ſectionis BC ab axe parabolæ BL modo invento, relinquitur CL. Unde datis abſciſſis LC & LB reperitur ſemiordinatarum CG & BH ratio (§. 402. *Anal. fin.*); quæ cum celeritates terminales exprimant, tandem quoque

3. celeritatis mediæ ad illas ratio inveniri poteſt (§. 238.)

AXIOMA 1.

241. *Eadem vi uno eodemque momento duplex motus produci nequit.* Ponamus vim totam A impendi in accelerando motu corporis B, fieri non poterit, ut eodem tempore impendatur in accelerandum motum corporis C. Nempe ſi ſimul agat in B & C pro parte una in B, pro altera autem in C agit. Alias effectus foret vi major: quod merito abſurdum habetur.

SCHOLION.

242. *Veritas hujus axiomatis per experimenta hydroſtatica confirmatur. Etenim*

enim corpus grave in fluido ſpecifice leviori deſcendit exceſſu ponderis ſui ſupra pondus fluidi mole æqualis (§.88.Hydroſt.); *quod vim gravitatis reliquum impendat in preſſionem fluidi motui reſiſtentis* (*§*.114.Hydroſt.) *experimentorum conſenſu. Vis igitur, qua fluidum ſubjectum premitur, non ſimul impenditur in deſcenſum; nec vis, qua motus deſcendentis acceleratur, una impenditur ad premendum aquam ſubjectam.*

THEOREMA 37.

243. ***Aquæ per canalem declivem ruentis celeritas non augetur ob preſſionem, quam inferior a ſuperiori ſuſtinet.***

DEMONSTRATIO.

Ponamus celeritatem aquæ per canalem declivem ruentis augeri ob preſſionem, quam inferior a ſuperiori ſuſtinet, ita ut inferior celerior moveatur, quam vi deſcenſus per declive acquiſivit (§. 284. *Mechan.*). Quoniam motus per declive deſcendentis acceleratur gravitate reſpectiva, pars vero reliqua in actionem in fundum impenditur declivem (§.261. *Mech.*), aut vis illa, qua agitur in planum inclinatum, ſimul impendi deberet ad deſcenſum, aut vis, qua acceleratur motus deſcendentis ſimul impendenda eſſet preſſioni aquæ ſubjectæ. Quicquid horum accidat, eadem vis eodem tempore in duplicem effectum impendi debet, ſeu duplex motus eadem vi eodem tempore producitur: id quod abſurdum (*§*. 241). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

244. *Alii ita adſtruunt veritatem propoſitionis præſentis. Si aqua in B omnem habet celeritatem, quam deſcenſu per planum inclinatum* AB *acquiſivit, eam eſt, quam cadendo perpendiculariter ab eodem termino* A *ad eandem horizontalem* KB, *nempe per altitudinem* AK *vel* BF *acquiſiviſſet* (*§*.303. Mech. *Ponamus jam aqua* B *motum quoque accelerari ob altitudinem incumbentis ſuperioris: erit ergo major celeritas, quam perpendiculariter cadendo acquirere poterat. Sed hoc abſurdum exiſtimant, cum fluxus aquæ ſit effectus gravitatis, quæ in deſcenſum perpendicularem tota inſumitur. Sed evidentia hujus demonſtrationis pendet ab axiomate noſtro. Tacite enim ſupponitur in deſcenſu perpendiculari nullum eſſe effectum aquæ ſuperioris in inferiorem, ſed quamlibet aquæ guttam ita accelerari, acſi ſola deſcenderet in medio non reſiſtente. Id vero recte ſupponi, ex eo intelligitur, quod vis, qua ad accelerandum motum guttæ ſuperioris impenditur, non una impendi poſſit in preſſionem, qua inferioris guttæ acceleratur motus: quemadmodum fit, ubi aqua ſuperior vel quieſcit, vel lente admodum deſcendit inferioris motu per foramen accelerato. Hic enim vis, qua ad motum per preſſionem acce-*

Tab. VII. Fig. 79.

celerandum impenditur, non una conſumitur in deſcenſu prementis.

SCHOLION 2.

245. *Hinc & aqua in fundo fluminum tardius moveri deprehenditur, quam in ſuperficie, propterea quod motus ob declivitatem plerumque non differat in ſuperficie & in fundo; major vero cum ibidem ſit reſiſtentia, quam prope ſuperficiem, magis quoque retardetur.*

SCHOLION 3.

246. *Inprimis autem notandum eſt, quod* Mariottus (a) *annotavit, aquam in alveo naturali fluminis ob eam, quam patitur, reſiſtentiam (§. 207) brevi temporis ſpatio acquirere celeritatem non augendam, quamdiu eadem manet declivitas. Unde porro infert, ſi declivitas alvei imminuatur, celeritatem denuo ſucceſſive, ſed brevi temporis ſpatio imminui, ut per iſtam alvei partem lentius fluat aqua, quam per anteriorem. Et eodem modo intelligitur, quomodo in eodem alveo naturali motus fluminis accelerari poſſit ut in ſequente alvei parte aqua celerius fluit, quam in anteriore. Atque hinc porro intelligitur, cur in diverſis alvei naturalis partibus diverſa ſit aquæ fluentis celeritas.*

SCHOLION 4.

247. *Nulla in hoc difficultas poſita eſt, quod manente eadem declivitate fundi motus evadat celerior flumine coarctato, ut minor evadat ejus latitudo (§. 221), experientia ſuffragante (§. 224). Etenim tum initium canalis ob altitudinem aquæ auctam cui pars alvei naturalis reſpondet, e longinquiori intervallo petendum. Initium canalis inclinati* A *ibi ſtatuitur, ubi planum inclinatum ejusdem* BA *concurrit cum ſuperficie aquæ* AC, *quemadmodum ex demonſtrationibus anterioribus intelligitur, ut determinari poſſit deſcenſus perpendicularis* EC *aquæ in ſuperficie. Etenim aqua in* C *dici nequit deſcendiſſe intervallo* EC, *niſi aliquo tempore fuerit in* A. *Sed idem mox oſtendemus apertius* (§. 249). Tab. VIII. Fig. 97.

SCHOLION 5.

248. *Ceterum hinc intelligitur in motu fluminum plerumque aſſumi poſſe aquam per perpendiculum ſectionis eadem celeritate moveri; non tamen aſſumere licet, quod per totam ſectionem eadem celeritate moveatur, propterea quod juxta ripas motus ob majorem reſiſtentiam tardior eſſe ſoleat quam in medio. Quodſi iſtiusmodi canales inclinati, quales in theorematis antecedentibus ſupponimus, eſſent alvei naturales, eadem quoque ad hos alveos transferre liceret ſine ulla immutatione.*

THEOREMA 38.

249. *Si in canale inclinato* AB *ſectio* BC *obſtruatur, ut aqua nonniſi per partem* BI *fluere poſſit, aqua intumeſcet & ad ſtatum manentem reducta celerius fluet per ſectionem* BI, *quam ante, initio canalis* G *ultra priorem* A *promoto.* Tab. VIII. Fig. 80.

DE-

(a) Trait. du Mouvement des Eaux part. 4. disc. 4. p. 436. Oper.

DEMONSTRATIO.

Etenim dum Sectio BC ex parte obſtruitur, per partem reſiduam apertam BI priſtina aquæ quantitas eadem celeritate fluere eodem tempore nequit, quo fluxerat per integram BC (§. 211). Quoniam tamen aquæ eadem quantitas affluit, quæ ad ſectionem BC nondum obſtructam ferebatur; neceſſe eſt aliquid ejus continuo remanere adeoque altitudinem fieri majorem, conſequenter aqua intumeſcit (§. 199). *Quod erat primum.*

Enimvero quando ad ſtatum manentem reducitur, non amplius intumeſcit (§. 197), adeoque per ſectionem minorem BI eodem tempore eadem aquæ quantitas fluit, quæ ante fluxerat per totam BC. Neceſſe igitur eſt ut fluat celerius (§. 215). *Quod erat ſecundum.*

Jam dum aquæ ſuperficies AC attollitur in OG *vi num. 1.* evidens eſt, quod ea canalem BA non amplius in A, ſed in G ſecet. Initium adeo canalis G ultra terminum priſtinum A promovetur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

250. Quoniam ibi vertex parabolæ FBE, ubi ſectionis perpendiculum BI productum horizontalem GF per initium canalis declivis AB ſecat, & ſemiordinatæ BE & IK exponentes celeritatem in punctis B & I majores ſunt rectis BD & IL, quæ ante intumeſcentiam aquæ ſeu obſtructionem ſectionis easdem in iisdem punctis exponebant (§. 249); parabola FKE metitur celeritates in perpendiculo IB & majoris amplitudinis eſt, quam altera HLD quæ metitur velocitates in perpendiculo majoris ſectionis BC.

COROLLARIUM 2.

251. Quodſi impedimentum, quo obſtruitur ſectio, fuerit minor CO, veluti IN; aqua ad O usque intumeſcere nequit, adeoque per NO ſupra impedimentum effluit.

COROLLARIUM 3.

252. Celeritas aucta aquæ per ſectionem minorem fluentis BI in B ea eſt, quam cadendo per altitudinem BM acquirere poterat, & celeritas priſtina in B ea erat, quam cadendo per altitudinem BN acquiſiviſſet (§. 303. *Mech.*) Quare cum celeritates per BN & PM acquiſitæ ſint in ratione ſubduplicata rectarum BN & BM (§. 87. *Mech.*); erit celeritas aucta in B ad celeritatem priſtinam ut radix rectæ BN ad radicem alterius BM.

THEOREMA 39.

235. *Aqua per ſectionem canalis horizontalis eodem modo fluit, qua fluit ex vaſe pleno cujus eadem, quæ ſectionis altitudo.*

DEMONSTRATIO.

Etenim in tubo horizontali, cum nulla ſit declivitas, aqua non fluit niſi quatenus ſuſtinet presſionem inferior a ſuperiori. Ex vaſe aqua pleno per foramen ſimiliter fluit aqua vi presſionis ejusdem: quod utrumque per ſe manifeſtum eſt. Quodſi ergo lumen vaſis ſit ſectioni canalis æquale ac ſimile; & altitudo fluidi utrobique eadem eſt, cum motus totus pendeat ab altitudine fluidi prementis, nulla adeſt diverſitatis ratio. Quamobrem aqua per ſectionem canalis horizontalis eodem modo fluere debet, quo fluit ex vaſe pleno, cujus eadem, quæ ſectionis altitudo. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

254. *Sane ſi canalem horinzontalem tegas quodam operimento, convenit is cum vaſe pleno, cujus eadem qua ſectionis altitudo. Ecquis vero non videt operimentum nihil facere ad motum aquæ, cum eadem maneat fluidi altitudo, qua ante, conſequenter presſio ab eadem pendens nullo modo varietur.*

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 81. 255. In ſectionis adeo perpendiculo BC canalis horizontalis AB quodlibet punctum, D, E, vel B eandem celeritatem habet, quam acquireret per altitudinem aquæ incumbentis, nimirum aqua in B habet celeritatem, quam acquiſiviſſet cadendo per altitudinem BC; aqua in E celeritatem habet quam cadendo per altitudinem EC acquiſiviſſet, & ſimiliter aqua in D celeritatem habet, quæ cadendo per altitudinem BD acquiritur.

COROLLARIUM 2.

256. Erunt igitur celeritatum in B, E & D quadrata ut rectæ BC, EC, DC (§. 86. *Mechan.*), ſeu celeritates ipſæ in ratione ſubduplicata earundem rectarum BC, EC, DC (§. 87. *Mechan.*).

COROLLARIUM 3.

257. Quare ſi circa altitudinem ſectionis BC deſcribatur parabola CFGH, exponens ſemiordinatæ BH, EG & DF celeritates aquæ per perpendiculum BC fluentis in punctis B, E, D, C (§. *præc.* & §. 402. *Anal. fin.*).

COROLLARIUM 4.

258. Quodſi ergo celeritas BH in partibus perpendiculi ſectionis BC determinetur; ſpatium parabolicum BCH quantitatem aquæ exhibet, quæ eodem tempore per ſectionem fluit, quo aqua per B fluens deſcribit ſpatium BH; id quod eodem modo patet, quo ſupra idem in canale inclinato evicimus (§. 234).

COROLLARIUM 5.

259. Quantitas igitur aquæ fluentis per perpendiculum BC eo tempore, quo aqua per B fluens ex B in H progreditur, eſt æqualis rectangulo ex BH in duas tertias partes altitudinis ſectionis BC vel ex BC in $\frac{2}{3}$ BH (§. 104. *Anal. in fin.*), conſequenter in ratione compoſita ex ratio-

ratione celeritatis maximæ & duarum altitudinis partium.

SHOLION 2.

260. *Hinc jam porro eodem, quo ſupra, modo determinantur alia fluxum aqua in canali horizontali concernentia.*

SCHOLION 3.

261. *Reſiſtentias, quas patitur curſus fluminis, cum ab obſtaculis accidentalibus pendeant, ad regulam quandam generalem revocare minime licuit.*

SCHOLION 4.

262. *Ceterum quæ de motu aquarum per canales horizontales dicta ſunt ad fluxum quoque aquarum per lumina vaſorum lateribus inſculpta applicari poſſunt atque ſolent* (§. 48).

THEOREMA 40.

263. *Si aqua per canalem horizontalem fluit, celeritas media eſt ad maximam ut 2. ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 81. Aquæ enim quantitas eſt ut $\frac{2}{3}$ BH. BC (§. 259). Quare cum rectangulum BCMI exprimat quantitatem aquæ per ſectionis perpendiculum fluentis, ſi BI $= \frac{2}{3}$ BH (§. 375. *Geom.*); eadem adhuc aquæ quantitas per idem fluere debet, ſi per ſingula puncta eadem celeritate BI moveatur. Eſt igitur BI celeritas media (§. 208). Enimvero BI $= \frac{2}{3}$ BH *per demonſtrata.* Ergo BI : BH $= \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$ (§. 178. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

264. Quoniam aucta altitudine ſectionis BC, augetur celeritas maxima BH (§. 256); aucta altitudine ſectionis augetur quoque celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM 2.

265. Similiter quia imminuta altitudine ſectionis BC, imminuitur celeritas maxima BH (§. 256); imminuta altitudine ſectionis imminuitur celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM 3.

266. Si ex ſemiordinata maxima parabolæ celeritates aquæ per ſectionem canalis horizontalis fluentis BH reſecetur BI $= \frac{2}{3}$ BH & ſuper BI conſtruatur rectangulum CBIM, cujus latus IM parabolam in K ſecat; demiſſo ex K in altitudinem BC perpendiculari KL; erit in L locus celeritatis mediæ.

COROLLARIUM 4.

267. Quodſi jam porro inferatur ut quadratum ſpatii PH, quod aqua celeritate maxima fluens, dato tempore emetitur ad quadratum ſpatii LK, quod celeritate media deſcribit eodem tempore, ita altitudo ſectionis BC ad numerum quartum proportionalem; exprimet is profunditatem CL puncti L, per quod aqua celeritare media fluit, infra ſuperficiem aquæ LC (§. 402. *Anal. fin.*).

SCHO-

SCHOLION.

268. *Punctum iſtud a nonnullis* Centrum velocitatis *appellari ſolet, quia velocitas ipſi conveniens in locum omnium velocitatum inæqualium aſſumi poteſt.*

CAPUT VII.
DE
PERCUSIONE FLUIDORUM.

DEFINITIO 16.

269. *Percuſſio fluidi* eſt actio, qua fluidum aliquod in aliud corpus ſive fluidum, ſive ſolidum impingens in idem agit. Quando directe, quando indirecte impingat, dictum eſt alias (*§. 523. 520. Mechan.*).

COROLLARIUM 1.

270. Quoniam percuſſio dato aliquo tempore abſolvitur, fluida vero impingentia in continuo motu ſunt; tota illa quantitas impingit, adeoque corpus percutit (§. 270), quæ tempore iſto affluit, ac ideo percuſſio fluidorum ſucceſſiva eſt.

SCHOLION.

271. *Fluida nempe conſideranda veniunt inſtar multitudinis globulorum, quorum diverſæ ſeries ſibi mutuo ſuccedentes in corpus, quod percutitur, impingunt. Ut adeo appareat pro diverſa denſitate variari globulorum ſimul incurrentium, pro diverſa celeritate ſerierum ſibi invicem ſuccedentium numerum.*

COROLLARIUM 2.

272. Quoniam plus maſſæ ſimul impingit, ſi fluidum fuerit denſius, quam ſi fuerit rarius, plus autem maſſæ in denſiore ſub eodem volumine continearur, quam in rariori (§. 8. 10. *Hydroſt.*); in percuſſione fluidorum habenda eſt ratio denſitatis fluidi, ſeu ceteris paribus major fit percuſſio a fluido denſiori, quam a rariori.

COROLLARIUM 3.

273. Quoniam dato tempore, quo percuſſio ſucceſſiva abſolvitur, plus maſſæ in corpus percuſſum incurrit, ſi fluidum aliquod celerius, quam ſi tardius moveatur; in determinanda maſſa percutientis non ſolum denſitatis, (§. 273), verum etiam celeritatis ratio habenda, ſeu denſitate exiſtente eadem major eſt maſſa percutientis ſi fluidum celerius moveatur, quam ſi tardius; maſſæ ſcilicet in ratione celeritatum ſunt.

COROLLARIUM 4.

274. Quoniam vis, qua fluidum in aliud corpus incurrens idem urget, e genere mortuarum eſt, utpote cujus actio nonniſi in niſu quodam ſeſe exerente conſiſtit (§. 9. *Mechan.*), iſtiusmodi autem vires maſſa exiſtente eadem in ratione celeritatum ſunt (§. 250) in moleculis quoque ſimul incurrentibus major eſt vis percutiendi, ſi fluidum aliquod celerius movetur, quam ſi movetur tardius.

SCHOLION.

275. *Patet adeo celeritatem fluidi bis ſpectandam eſſe in percuſſione: nimirum primo in determinanda maſſa multitudine, qua agit in corpus percuſſum, & ſecundo in determinando gradu, quem vis a motu habet.*

DEFINITIO 17.

276. Si fluida in duo plana vel directe, vel ſub eodem angulo obliquo incurrunt; *eodem modo incurrere* dicuntur.

SCHOLION.

277. *Non tamen ideo eodem quoque modo plana percutiunt, quia in percuſſione ſpectatur potiſſimum vis percutientis, qua non modo a directione impingentis, verum etiam a maſſa & celeritate pendet.*

AXIOMA 2.

278. *Si idem fluidum eadem celeritate eodem modo in plana æqualia incurrit, eadem vi eadem percutit.* Nulla enim adeſt diverſitatis ratio.

SCHOLION.

279. *Vis percutientis pendet a celeritate, maſſa & directione percutientis, nec non a plani percuſſi magnitudine. In hypotheſi adeo axiomatis omnia eadem præſupponuntur, a quibus quantitas vis pendet, qua fit percuſſio. Ex generalibus adeo principiis metaphyſicis* (§. 19. Ontol.) *conſtat, vim percutiendi hoc in caſu differre minime poſſe.*

THEOREMA 41.

280. *Si idem fluidum eadem celeritate latum in plana inæqualia eodem modo incurrit, vires, quibus percutiuntur, ſunt in ratione planorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus planum A eſſe duplum plani B: erit adeo pars dimidia illius huic toti æqualis (§. 142. *Arithm.*), ſive $B = \frac{1}{2} A$. Quoniam itaque B & $\frac{1}{2} A$ eadem vi percutiuntur (278), atque eadem adeo vi utraque pars ipſius A percuti debet (§. 87. *Arithm.*); planum duplum A vi dupla percutitur, B vero ſimpla, hoc eſt, vires percutientes ſunt in ratione dupla, conſequenter in ratione planorum percuſſorum A & B. Idem cum eodem modo oſtendatur, in quacunque alia planorum ratione; patet in

in genere eſſe vires, quibus plana percutiuntur ab eodem fluido eodem modo & celeritate eadem incurrente, in ratione planorum percuſſorum. *Q. e. d.*

THEOREMA 42.

281. *Si idem fluidum diverſa celeritate, ſed eodem modo in plana æqualia incurrit; vires, quibus percutiuntur, ſunt in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia A & B, ac in A incurrat aqua dupla celeritate ejus, qua in B incurrit; in A & B autem directe, vel oblique ſub eodem angulo incurrat. Dico vires, quibus percutiuntur plana A & B, eſſe ut quadrata celeritatum, ſeu vim, qua percutitur planum A eſſe quadruplo majorem ea, qua percutitur planum B. Quoniam enim fluidum diverſa celeritate in plana A & B incurrit *per hypoth.* maſſa percutientis planum A eſt ad maſſam petcutientis planum B ut celeritas, qua movetur fluidum in planum A incurrens ad celeritatem, qua movetur quod fertur in B (§. 273). Quamobrem fluida percutientia ſpectari poſſunt tanquam corpora inæqualis maſſæ. Enimvero ſi maſſæ inæquales ſunt, vires ſunt in ratione compoſita maſſarum & celeritatum (§. 523. *Mechan.*), adeoque in caſu præſente, ubi maſſæ ſunt ut celeritates *per demonſtrata*, in ratione duplicata celeritatum, veluti in caſu ſpeciali vis, qua percutitur A quadruplo major eſt ea, qua percutitur planum B (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 43.

282. *Si fluidum idem diverſa celeritate in plana inæqualia eodem modo incurrit, vires, quibus percutiuntur, ſunt in ratione compoſita ex ſimplici planorum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat fluidum quodcunque in plana quæcunque A & B celeritatibus quibuscunque C & c, dicanturque vires V & v. Incurrat idem fluidum in planum B celeritate c, dicaturque vis percutiens f. Quoniam fluidum in A & B eadem celeritate C incurrit; erit $V : f = A : B$ (§. 280). Et ſi idem fluidum in planum B diverſa celeritate C & c incurrit; erit in diverſis iſtis percuſſionibus $f : v = C^2 : c^2$ (§. 281). Habemus adeo $fV : fv = A.C^2 : B.c^2$ (§. 213. *Arithm.*), conſequenter $V : v =$

 $A.C^2 :$

A. C² : B. c² (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, vires percutientes ſunt in ratione compoſita ex ſimplici planorum A & B, atque duplicata celeritatum C² & c². *Q. e. d.*

THEOREMA 44.

283. *Si fluida diverſæ denſitatis eadem celeritate in plana inæqualia eodem modo incurrant; vires percutientes ſunt in ratione compoſita denſitatum fluidorum atque planorum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrant duo fluida diverſæ denſitatis D & *d* in plana quæcunque A & B eadem celeritate dicanturque vires percutientes F & *v*: erit *f*: *v* = D : *d* (§. 272). Incurrat jam fluidum denſitatis D in planum aliud A, quod alteri B inæquale ſit, dicaturque vis percutiens V: erit V : *f* = A : B (§. 280). Erit itaque *f*V : *fv* = A.D : B. *d* (§. 213. *Arithm.*), conſequenter V : *v* = A. D : B. *d* (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, vires percutientes ſunt in ratione compoſita planorum A & B atque denſitatum fluidorum D. & *d*. *Q. e. d.*

THEOREMA 45.

284. *Si fluida diverſæ denſitatis diverſa celeritate, ſed eodem modo in plana inæqualia incurrant; vires percutientes ſunt in ratione compoſita ex rationibus planorum percusſorum & denſitatum fluidorum ſimplicibus atque duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia B & B, in quæ incurrat fluidum idem ſeu ejusdem denſitatis *d* diverſis celeritatibus C & *c*, dicanturque vires F & *v*: erit F : *v* = C² : *c*² (§. 281). Incurrant jam fluida diverſæ denſitatis D & *d* eadem celeritate *c* in plana inæqualia A & B, dicanturque vires percutientes V & *f*; erit V : *f* = A. D : B. *d* (§. 283). Habemus itaque *f*V : *fv* = A. D. C² : B. *d*. *c*² (§. 213. *Arithm.*), conſequenter V : *v* = A. D. C² : B. *d*. *c*² (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, vires percutientes fluidorum diverſæ denſitatis in plana utcunque inæqualia celeritatibus quibuscunque incurrentium ſunt in ratione compoſita ex ſimplicibus planorum A & B, denſitatum fluidorum D & *d* atque duplicata celeritatum C² & *c*². *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *Habemus adeo menſuram virium directe planum aliquod percutientium: etenim ſi indirecte impingit fluidum*

dum aliquod planum, tum variatio non una de cauſa accidit etſi theoremata in comparandis viribus ſub eodem angulo impingentibus locum habeant.

THEOREMA 46.

286. *Si aqua per declive* AD *delapſa directe incurrit in palmulam rotæ circa centrum* C *convertibilis; erit vis percutiens ut palmula ducta in radium* EC, *denſitatem aquæ & altitudinem lapſus* AB.

DEMONSTRATIO.

Etenim aquæ in palmulam irruentis vis percutiens abſoluta eſt ut factum ex magnitudine palmulæ in denſitatem aquæ & quadratum celeritatis, qua fluit (§. 284). Sed celeritas aquæ per declive AD delapſæ eſt in ratione ſubduplicata altitudinis lapſus AB (§. 204), adeoque quadratum ejusdem ut ipſa hæc altitudo. Quare vis percutiens abſoluta erit ut factum ex magnitudine palmulæ in denſitatem aquæ & in altitudinem lapſus AB. Enimvero quia palmula circa centrum C convertibilis *per hypoth.* illa jam conſideranda venit tanquam potentia ad axem in peritrochio applicata, cujus centrum motus in C, atque tum vis reſpectiva erit ut abſoluta ducta in radium (§. 792. 153. *Mechan.*). Eſt igitur vis palmulam percutiens ut palmula ducta in denſitatem aquæ, altitudinem lapſus AB & radium rotæ EC. *Q. e. d.*

SCHOLION.

287. *Atque hinc patet modus ad menſuram revocandi vires percutientes aquarum rotas molares agitantium easque inter ſe conferendi: quod ut evidentius pateat, ſequentia adjicere lubet corollaria.*

COROLLARIUM 1.

288. Sint radii rotarum R & r, palmulæ P & p, altitudines lapſus A & a; cum denſitatis, quæ eadem hic ſupponitur, in comparandis viribus percutientibus non habenda ſit ratio (§. 181. *Arithm.*); erunt vires percutientes V & v ut R. P. A : $r. p. a$ (§. 286).

COROLLARIUM 2.

289. Quodſi ponamus palmulas rotarum eſſe æquales, erit P $= p$, adeoque V : v = R. A : $r. a$ (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, vires percutientes æquales palmulas rotarum inæqualium ſunt in ratione compoſita radiorum rotarum & altitudinum lapſus.

COROLLARIUM 3.

290. Quodſi ulterius fuerit R $= r$, hoc eſt, ſi rotæ fuerint æquales; erit V : v = A : a (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, vires aquarum rotas molares æquales percutientium ſunt in ratione altitudinum lapſus.

COROLLARIUM 4.

291. Si fuerit R $= r$, hoc eſt, ſi altitudi-

tudines rotarum fuerint æquales, palmulæ vero inæquales; erit $V:v = pA:p.a$, hoc eſt, vires, quibus palmulæ percutiuntur, ſunt in ratione compoſita palmularum & altitudinum lapſus.

COROLLARIUM 5.

292. Quodſi fuerit $A = a$, hoc eſt, ſi aqua per æquales declivitates feratur in rotas inæquales; erit $V:v = R.P:r.p$, hoc eſt, vires percutientes ſunt in ratione compoſita palmularum & radiorum rotarum.

COROLLARIUM 6.

293. Quodſi præterea $R = r$; erit $V:v = P:p$, hoc eſt, ſi rotæ fuerint æque altæ & aqua per eandem declivitatem in palmulas irruat; vires percutientes ſunt in ratione palmularum.

COROLLARIUM 7.

294. Si vero fuerit præter $A = a$ etiam $P = p$; erit $V:v = R:r$, hoc eſt, ſi aqua per eandem declivitatem irruit in rotas, quæ palmulas æquales habent; erunt vires percutientes in ratione radiorum rotarum.

COROLLARIUM 8.

295. Si ponatur $V = v$, erit etiam $R.P.A = R.p.a$ (§. 288), adeoque $A:a = r.p:R.P$ (§. 299. *Arithm.*), hoc eſt, ſi altitudines lapſus aquarum in rotas irruentium fuerint in ratione compoſita reciproca palmularum & radiorum ſeu altitudinum rotarum; vires percutientes æquales ſunt & contra.

COROLLARIUM 9.

296. Quodſi præterea fuerit $r = R$; erit: $A:a = p:P$ (§. 181. *Arithm.*), hoc eſt, ſi aqua incidit in rotas æque altas per declivitates, quarum altitudines rationem palmularum reciprocam habent; vires percutientes æquales ſunt, & contra ſi rotæ æqualis altitudinis æqualiter percuti debent ab aquis directe impingentibus, aquæ delabi debent per altitudines palmulis reciproce proportionales.

COROLLARIUM 10.

297. Si vero fuerit $B = p$; erit $A:a = r:R$, hoc eſt, ſi aqua directe impingens in palmulas æquales rotarum inæqualis altitudinis labatur per altitudines radiis rotarum reciproce proportionales; æquali vi percutiuntur, & contra ſi rotæ palmulas æquales habentes ab aqua æquali vi percuti debent, delabi debent per altitudines radiis reciproce proportionales.

COROLLARIUM 11.

298. Si denique fuerit $A = a$; erit $r.p = R.P$ (§. 293), adeoque $R\,r = p:P$ (§. 299. *Arithm.*), hoc eſt, aqua per eandem declivitatem delapſa æquali vi percutit palmulas rotarum, quæ ſunt in ratione reciproca radiorum ſeu altitudinum earundem.

COROLLARIUM 12.

299. Cum palmulæ figuram parallelogrammi habeant, adeoque ſi ejusdem fuerint latitudinis longitudinis rationem habeant (§. 389. *Geom.*); in eodem alveo declivi rotæ molares eadem vi agitantur, ſeu duæ rotæ ſibi mutuo æquipolleant, ſi habeant longitudines palmularum radiis rotarum reciproce proportionales,

SCHOLION.

300. *Hinc videmus in fluminibus ad-*

me-

modum latis conſtrui rotas molares, quæ exiguæ ſunt altitudinis, ſed magnæ longitudinis, latitudine defectum altitudinis compenſante.

THEOREMA 47.

301. *Si plana per fluida diverſæ denſitatis celeritatibus quibuscunque ferantur; reſiſtentiæ, quas experiuntur, ſunt in ratione compoſita ex rationibus planorum & denſitatum fluidorum ſimpla & celeritatum duplicata.*

DEMONSTRATIO.

Etenim fluidum quieſcens eadem vi reſiſtit plano per ipſum lato, qua impingeret in idem planum, ſi ipſum quieſceret & fluidum moveretur ea celeritate, qua planum fertur, eadem in utroque caſu ſuppoſita directione: id quod per ſe manifeſtum aſſumitur. Jam vero vires, quibus plana percutiuntur quieſcentia a fluidis directe impingentibus, ſunt in ratione compoſita denſitatum & planorum ſimpla atque celeritatum duplicata (§. 284). Ergo etiam vires, quibus fluida directe reſiſtunt planis per ea latis, ſunt in ratione compoſita denſitatum fluidorum ac ipſorummet planorum ſimpla & celeritatum quibus per eadem feruntur duplicata. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

302. Quodſi ergo plana ferantur per idem fluidum, veluti per aquam, denſitate exiſtente eadem, vires quibus ipſis reſiſtitur, ſunt in ratione ſimplici planorum & duplicata celeritatum, quibus ea per fluidum feruntur (§. 181. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

303. Quodſi porro plana fuerint æqualia; reſiſtentiæ, quas patiuntur, erunt ut quadrata celeritatum.

COROLLARIUM 3.

304. Si vero celeritates fuerint æquales, vires, quibus planis reſiſtitur, erunt in ratione planorum.

DEFINITIO 18.

305. *Celeritatem abſolutam* appellamus, qua fluidum fertur & directe impingit in planum; *Reſpectivam* vero, qua fluidum impingit in planum indirecte.

SCHOLION.

306. *Ponamus fluidum ferri celeritate ut* AC, *ſed oblique incurrere in planum* AB *ſub angulo incidentiæ* AC; *celeritas illa reſpectiva dicitur, quæ in impactu directo æquipollente eidem ſubſtituenda venit.* Tab. VIII. Fig. 85.

THEOREMA 48.

307. *Si fluidum indirecte impingit in rectam* AB *juxta lineas parallelas* AC *&* BD; *celeritas abſoluta eſt ad reſpectivam ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Exponat recta AC celeritatem

abſolutam & ex C demittatur perpendicularis CF; celeritas per AC reſolvitur in laterales CF & AF eidem ſimul æquipollentes (§. 245. *Mechan.*). Quoniam vero fluidum oblique impingens in AB in rectam hanc non agit ſecundum directionem AF, ſed tantummodo ſecundum perpendicularem CF, juxta quam fluidi motui reſiſtit; evidens eſt celeritatem reſpectivam exprimi per rectam CF (§. 305). Quodſi AC ſumatur pro ſinu toto, erit CF ſinus anguli incidentiæ CAF (§. 2. *Trigon.*). Quare cum ſit celeritas abſoluta ad reſpectivam ut AC ad CF *per demonſtrata*; erit illa quoque ad hanc ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ (§. 156. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 49.

Tab. VIII. Fig. 83. 308. *Si fluidum indirecte impingit in rectam* AB *juxta lineas parallelas* CA *&* BD; *maſſa ejus, qua percuſſio indirecta fit, eſt ad maſſam, qua eadem linea directe ab eodem fluido eadem celeritate lato percuteretur, ut ſinus anguli incidentiæ ad ſinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur BE ad AC perpendicularis: evidens eſt eodem tempore non majorem fluidi quantitatem deferri ad rectam AB, quam ad rectam BE, conſequenter ſi BD exponat celeritatem fluidi, qua fertur, veluti ſpatium, quod decurrit fluidum iſto tempuſculo, quo abſolvitur percuſſio; erit quantitas ſeu maſſa fluidi, quæ defertur ad AB juxta directiones obliquas ad maſſam, quæ ad eandem juxta directionem perpendicularem afflueret, ut BE. BD ad AB. BD, conſequenter ut BE ad AB (§. 181. *Arithm.*). Jam ſi AB ſumatur pro ſinu toto, erit BE ſinus anguli incidentiæ EAB (§. 2. *Trig.*). Eſt igitur BE ad AB, conſequenter maſſa fluidi, qua percurſio indirecta fit, ad maſſam, qua eadem linea AB ab eodem fluido directe percuteretur, ut ſinus anguli incidentiæ ad ſinum totum (§. 156. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 50.

309. *Si fluidum aliquod in rectam* AB *indirecte impingit, vis qua indirecte percutitur, eſt ad eam, qua eadem recta* AB *ab eodem fluido* CABD *juxta directiones parallelas* Ac *&* Bd *affluente percuteretur, in ratione duplicata ſinus anguli incidentiæ ad ſinum totum.* Tab. VIII. Fig. 83.

DEMONSTRATIO.

Etenim vires, quibus recta AB directe vel indirecte percutitur, ſunt in ratione compoſita maſſarum & celeritatum (§. 278. *Mech.*), ſcilicet

vis

vis directa eſt ad indirectam ut maſſa, quæ in percuſſione directa ad rectam AB defertur, ad maſſam, quæ ad eandem in indirecta affluit, & ut celeritas abſoluta ad reſpectivam. Enimvero & maſſa in percuſſione directa eſt ad maſſam in indirecta & celeritas abſoluta ad reſpectivam ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ (§. 308. 209). Eſt igitur vis percutiens directa ad indirectam in ratione duplicata ſinus totius ad ſinum anguli incidentiæ (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 51.

Tab. VIII. Fig. 83. 310. *Si fluidum oblique impingat in rectam* AB *juxta directiones parallelas* AC *&* BD *in ipſam delatum & ex* B *demittatur perpendicularis* BE *in* AC, *ex* E *vero denuo demittatur* EG *ad* AB *perpendicularis; vis, qua fluidum urget directe rectam* AB *eſt ad vim, qua eam urget indirecte, ut tota* AB *ad ſegmentum ejus* BG.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim AB:BE=BE:BG (§. 330. *Geom.*) & AB ad BE ut ſinus totus ad ſinum anguli incidentiæ BAC (§. 2. *Trigon.*) conſequenter BG eſt tertia proportionalis ad ſinum totum & ſinum anguli incidentiæ. Habet igitur AB ad BG rationem duplicatam ſinus totius ad ſinum anguli incidentiæ (§. 216. *Arithm.*). Quare cum ſit vis, qua percutitur recta AB directe, ad eam, qua indirecte percutitur, in ratione duplicata ſinus totius ad ſinum anguli incidentiæ (§. 309); erit etiam illa ad hanc ut tota recta AB ad ſegmentum ejus GB (§. 156. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

311. Quoniam GB > AB (§. 84. *Arithm.*); vis quoque, qua recta AB a fluido directe percutitur, eſt ea, qua indirecte percutitur, major.

COROLLARIUM 2.

312. Quodſi angulus incidentiæ fuerit IAB, rectæ AB ſegmentum vi indirectæ reſpondens erit BK (§. 310). Quare cum ſit ſub angulo incidentiæ CAB vis directa ad indirectam ut AB ad GB & ſub angulo incidentiæ minore HAB ut AB ad KB (§ *cit.*); vis directa ad indirectam ſub angulo incidentiæ majore minorem rationem habet quam ſub minore (§. 205. *Arithm.*), conſequenter vis indirecta ſub angulo incidentiæ minore minor eſt, quam ſub majore (§. 206. *Arithm.*): unde decreſcente angulo incidentiæ etiam vis percuſſionis decreſcit, atque directione AC coincidente cum AB, hoc eſt, ſi fluidum juxta directionem AB movetur, percuſſio nulla eſt.

COROLLARIUM 3.

313. Quoniam vis directa ſub angulo incidentiæ CAB eſt ad indirectam ut AB ad GB, ſub angulo vero incidentiæ HAB ut AB ad KB (§. 310); vires indirectæ ſub diverſis angulis incidentiæ eandem

rectam AB percutientes ſunt inter ſe ut rectæ GB & KB (§. 196. *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

314. Quodſi fluidum feratur celeritate V, vis directa, qua percutitur recta AB, exponitur per $V^2 . AB$ (§. 282). Quare cum ſit vis directa ad indirectam ut AB ad GB, angulo incidentiæ exiſtente CAB (§. 309); reperietur vis indirecta $\frac{V^2 . AB . GB}{AB} = V^2 . GB$, adeoque vis indirecta exponitur per $V^2 . GB$ angulo incidentiæ exiſtente CAB.

PROBLEMA 40.

Tab. VIII. Fig. 84. 315. *Determinare, vim quam ventus indirecte impingens in alas molendini exerit ad eas convertendas.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Repræſentet recta IQ axem atque planum ADCB alam, in quam ventus ſecundum directiones obliquas KA & HB agit. Ala axem, cui perpendiculariter inſiſtit, ſecet ad angulum obliquum AEI (§. 929. *Mech.*). Quoniam itaque ventus ſecundum directionem obliquam IE in planum AC circa axem IE convertendum agit *per hypoth.* ideo inveſtiganda eſt vis, quam ventus ad planum ADCB circa axem IE convertendum adhibet dato angulo obliquitatis ACI, magnitudine alæ ADCB, ejus latitudine AB & celeritate, qua aer movetur.

1. Ducatur AG ad HB perpendicularis: cum aër ſecundum directiones parallelas KA & HB ad AB deferatur ad rectam AB, non plus aeris ferit planum obliquum ad axem ADCB, cujus latitudo AB, quam planum æque altum axem ad angulos rectos ſecans, cujus latitudo AG. Exponit igitur recta AG quantitatem aeris planum ſimul ferientis. Jam porro exponat EL celeritatem, qua movetur aer, cujus denſitas ſit = *d*; erit maſſa aeris, qua percuſſio abſolvitur in puncto E, ut AG ducta in denſitatem ac porro in LE.

2. Demittatur ex L recta LM ad AB perpendicularis: evidens eſt perpendicularem LM exponere celeritatem reſpectivam, qua ventus in planum ſecundum directionem obliquam in E incurrens agit (§. 245. *Mech.*).

3. Quoniam vero ventus planum ADBC movere nequit niſi circa axem IQ, circa quem conver-

vertendum; non omnem vim, quam habet a celeritate reſpectiva LM, in actionem ſuam impendit. Demittatur ergo perpendicularis MN ex puncto M in axem QI; evidens eſt celeritatem LM reſolvi in duas alias LN & MN & eam, quæ eſt ſecundum directionem MN tantummodo proficere ad axem convertendum.

4. Denique cum in P ſit centrum magnitudinis, idemque centrum gravitatis (§. 245. *Mechan.*), adeoque maſſæ totius plani ADCB; patet vim, quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IQ convertendum, concipi poſſe tanquam applicatam ad punctum P & PE tanquam radium axis in peritrochio, cujus centrum E. Unde liquet vim, quam adhibet ventus, exprimi per *d*. AG. MN. EP (§. 153. *Mech.*). *Q. e. i.*

PROBLEMA 41.

316. *Determinare ſitum alarum molendini vi venti indirecte impingentis agitati, in quo ventus vim maximam adhibet ad eas convertendas, ſeu eas maxima celeritate convertit.*

RESOLUTIO.

1. Sint omnia ut in problemate præcedente, dicaturque AB $= a$, LE $= b$, EP $= c$, denſitas aeris $= m$, GB $= x$; erit ob AE $=$ EB $= \frac{1}{2}a$ *per hypoth.* & IE rectæ HB parallelam EO $= \frac{1}{2}$GB $= \frac{1}{2}x$ (§. 268. *Geom.*), & AG $= V(a^2 - x^2)$ (§. 417. *Geom.*). Tab. VIII. Fig. 84.

2. Quoniam in $\triangle\triangle$ AGB & LME anguli ad G & M recti *per conſtr.* & MEL = ABG (§. 255. *Geom.*); erit (§. 267. *Geom.*)

$$AB : AG = LE : LM$$
$$a : V(a^2 - x^2) = b : \frac{bV(a^2 - x^2)}{a}$$

3. Similiter quia in $\triangle\triangle$ AEO & LMN anguli ad O & N recti *per conſtr.* & ob rectum LME *per conſtr.* & obliquum L $\triangle\triangle$ LMN & LMN communem angulus LMN = AEO (§. 246. *Geom.*); erit (§. 267. *Geom.*)

$$AE : EO = LM : MN$$
$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}x = \frac{bV(a^2 - x^2)}{a} : \frac{bx\,V(a^2 - x^2)}{a^2}$$

4. Quoniam vis, quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IQ convertendum, eſt ut *m*. AG. LE. MN. EP (§. 315); erit

erit ea $= bmV(a^2-x^2)\frac{bcxV}{a^2}$

$$(a^2-x^2) = b^2cmx - \frac{b^2cmx^2}{a^2}$$

5. Habemus itaque (§. 63. *Anal. infin.*)

$$b^2cmdx - \frac{3b^2cmxdx}{a^2} = 0$$

$$1 - \frac{3x}{a^2} = 0$$

$$a^2 = 3x$$

$$V\tfrac{1}{3}a^2 = x$$

6. Quodſi jam a ſumatur pro ſinu toto, erit $V\frac{1}{3}a^2$ ſinus anguli GAB (§. 2. *Trigon.*), cujus complementum ad rectum eſt angulus AEI, ſub quo planum ADCB axem IQ ſecat. Sit itaque a = 10000000, erit $\frac{1}{3}a^2$ = 33333333333333,3, adeoque x = 5773502 cui in tabulis ſinuum quam proxime reſpondent 35° 16'. Eſt itaque angulus GAB 35° 16, conſequenter AEI, qui quæritur, 54° 44'.

SCHOLION 1.

317. *Cum de conſtructione molendinorum vi venti agitandorum ageremus* (§. 929. Mechan.); *angulum* IEA 54° *graduum fieri præcepimus appendicem minutorum negligentes: in præſente nimirum negotio parum refert, ſive is fiat 54°, ſive 55°. Vulgo faciunt 45°, ſed nulla theoria nixi.*

SCHOLION 2.

318. *Quoniam reſiſtentia, quam patitur corpus intra fluidum motum, æquipollet percuſſioni eadem celeritate, qua ipſum movetur, a fluido factæ; non abſimili modo determinari poteſt optimus ſitus gubernaculi, cujus ope naves in aqua convertuntur. Etenim hic quoque angulus obliquitatis idem deprehenditur, qui ante, 54° 44'.*

PROBLEMA 45.

319. *Datis radio baſis majoris* AE *& altitudine ſegmenti conici* EF, *invenire altitudinem coni, cujus ſegmentum* ACDB *ita per fluidum motum, ut baſis minor eadem occurrat & axis* EF *ſit ad ſectionem fluidi perpendicularis, ſeu horizonti parallelus, minimam patiatur reſiſtentiam.* Tab. VI. Fig.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam perinde eſt, ſive aqua in fruſtum conicum ACDB quieſcens impingat, ſive ipſum in fluido quieſcente moveatur; ponamus aquam in quieſcens impingere juxta rectas EG & IH. Impinget ergo in baſin CD directe; in ſuperficiem indire-

cte

ᴄte (§. 269), eodem ſemper manente angulo incidentiæ HCG vel ACI (§. 156. *Geom.*), quod directiones rectæ LH conſtanter parallelæ rectam AC in quocunque puncto ſub eodem angulo ſecent (255. *Geom.*). Quodſi jam AC ſumatur pro ſinu toto, erit AI ſinus anguli incidentiæ ACI (§. 2. *Trigon.*). Sit EF = IC = a, AE = b, AI = x; erit AC = $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 417. *Geom.*). Enimvero cum ſinus totus quantitas constans eſſe debeat, ſumatur FE pro ſinu toto: erit itaque ut AC ad AI ita IC ad ſinum anguli incidentiæ, qui adeo reperitur $ax : \sqrt{(a^2 + x^2)}$.

2. Porro patet in rectam AC non plus aquæ impingere, quam ad rectam CL ipſi AI æqualem defertur, adeoque ad totam ſuperficiem non plus aquæ allabi, quam quæ annulum, cujus AI latitudo eſt, directe percuteret. Percuſſiones directæ in eodem fluido eadem celeritate lato ſunt ut plana, quæ percutiuntur (§. 280) adeoque annulus exponit percuſſionem directam ipſius & circulus minor CD percuſſionem, quam ipſe patitur, directam. Et quoniam hic tantummodo attenditur ratio percuſſionum, circuli autem ſunt ut quadrata radiorum (§. 409. *Geom.*); reſiſtentia directa, quam patitur circulus minor CD recte exponitur per CF^2 ſive $IE^2 = b^2 - 2bx + x^2$ & reſiſtentia annuli per $BE^2 - BI^2 = 2bx - x^2$.

3. Quodſi jam infertur: ut quadratum ſinus totius a^2 ad quadratum ſinus anguli incidentiæ $a^2x^2 : (a^2 + x^2)$, ita reſiſtentia directa annuli $2bx - x^2$ ad reſiſtentiam indirectam, quam patitur ſuperficies fruſti conici (§. 309); reperietur hæc $(2bx^3 - x^4)(a^2 + x^2)$.

4. Quodſi jam addatur reſiſtentia directa baſis minoris $b^2 - 2bx + x^2$ vi *num.* 2. prodibit integra reſiſtentia fruſti $b^2 - 2bx + x^2 + \dfrac{2bx^3 - x^4}{a^2 + x^2} = \dfrac{a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 + b^2x^2}{a^2 + x^2}$

5. Quoniam reſiſtentia minima, quam iſtiusmodi fruſtum patitur, *per hypoth.* differentiale ejus nihilo æquale (§. 63. *Anal. infin.*), adeoque $(-2a^2bdx + 2a^2xdx + 2b^2xdx)(a^2 + x^2) - 2xdx(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 + b^2x^2)$ per $(a^2 + x^2)^2$ div. $= 0$, hoceſt,

$2a^2b$

$$\frac{2a^2bx^2dx - 2a^4bdx + 2a^4xdx}{(a^2+x^2)^2} = 0$$

$$bx^2 - a^2b + a^2x = 0$$

$$x^2 + \frac{a^2x}{b} = a^2$$

$$x^2 + \frac{a^2x}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = a^2 + \frac{a^4}{4b^2}$$

$$x + \frac{a^2}{2b} = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2+a^2)}$$

$$x = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2+a^2)} - \frac{a^2}{2b}$$

6. Jam ob IC rectæ EG parallelam *per hypoth.* erit (§. 268. *Geom.*).

$$AI : IC = AE : EG$$
$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Ergo $EG = \frac{2ab^2}{a\sqrt{(4b^2+a^2)} - a^2}$

$= \frac{b^2}{\sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a}$

Enimvero $b^2 = \sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$ in $\sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$. Quare ſi hic valor ſubſtituatur; erit $EG = (\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}) + \frac{1}{2}a$.

7. Fiat itaque $EO = \frac{1}{2}a$; erit $AO = \sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)}$: cui ſi æqualis fiat OG, erit $EG = \sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$, atque adeo in G vertex coni, cujus fruſtum ACDB minimam patitur reſiſtentiam, ſi ea conditione in fluido moveatur, quam fert hypotheſis problematis.

FINIS Hydraulicæ & totius Tomi II, Elementorum Matheſeos.

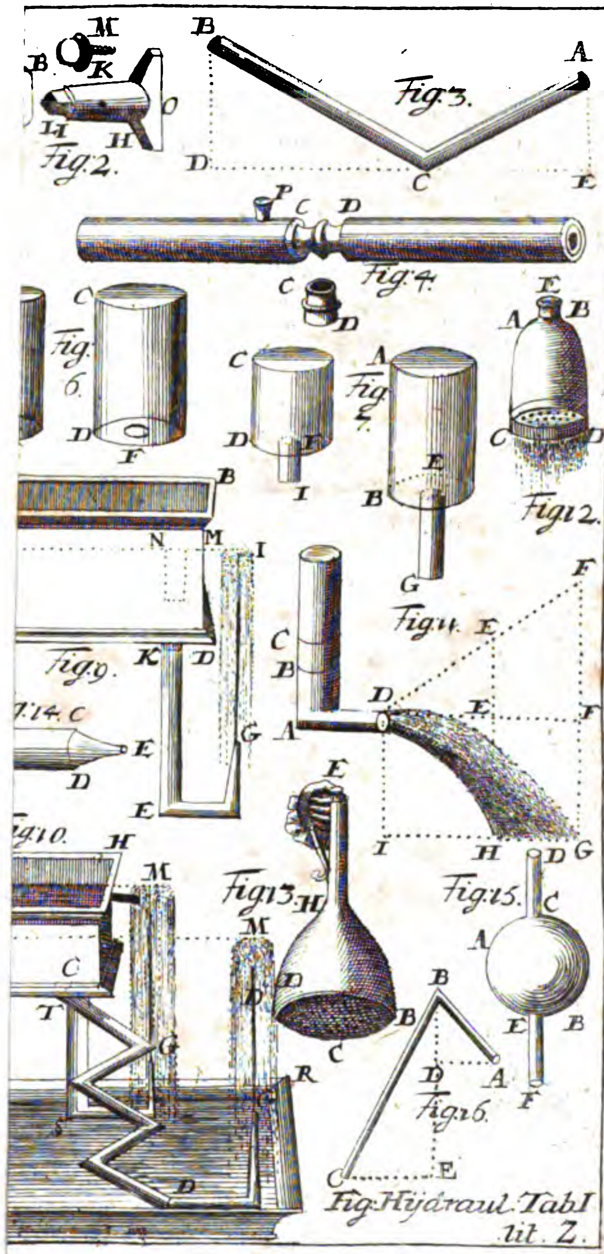


Fig. Hydraul. Tab I
lit. Z.

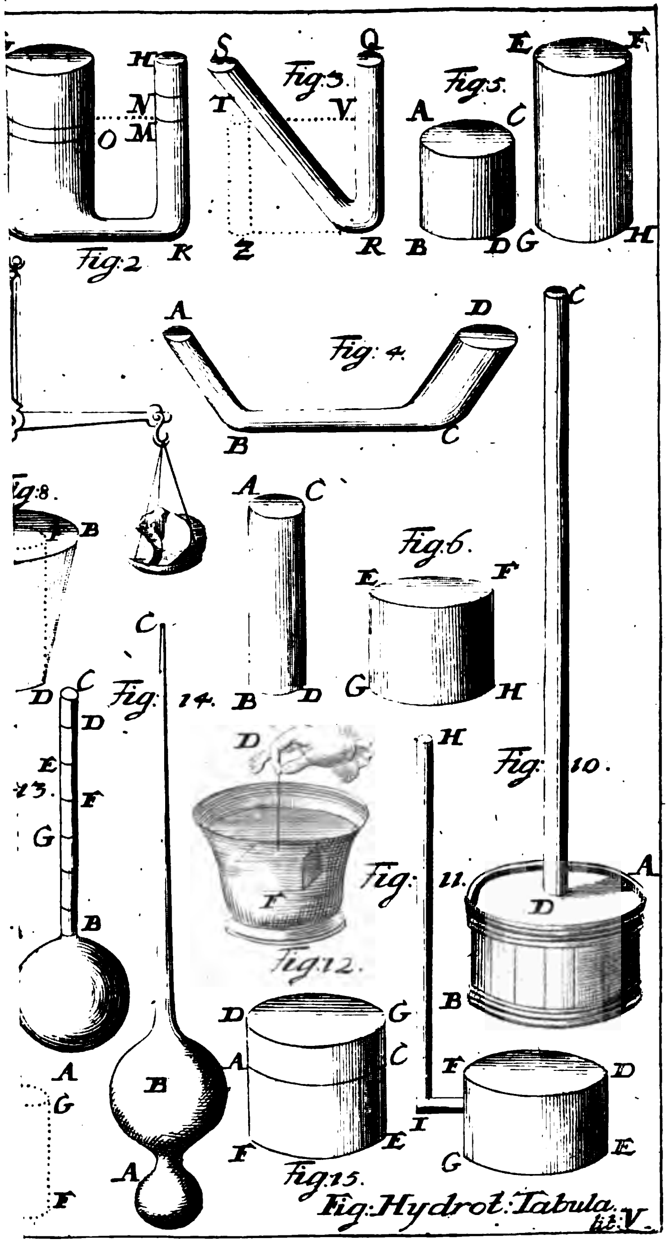


Fig: Hydrost: Tabula. lit: V.

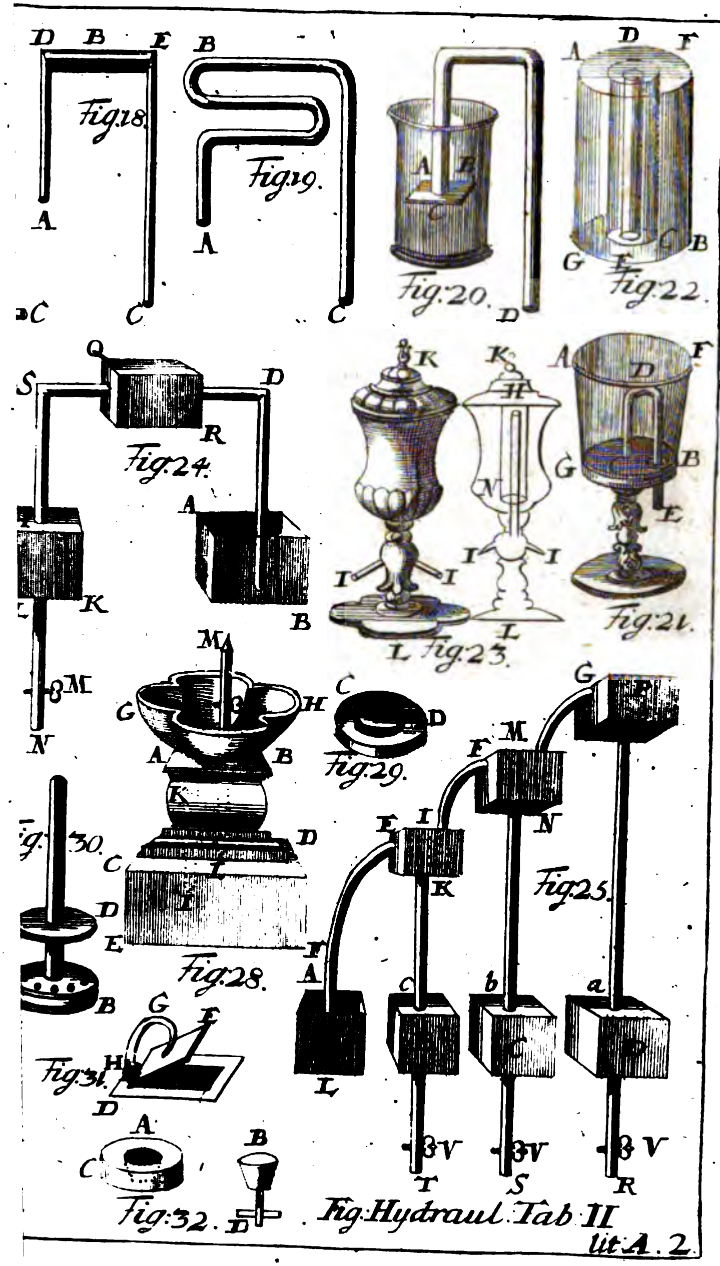


Fig. Hydraul. Tab II
lit A. 2.

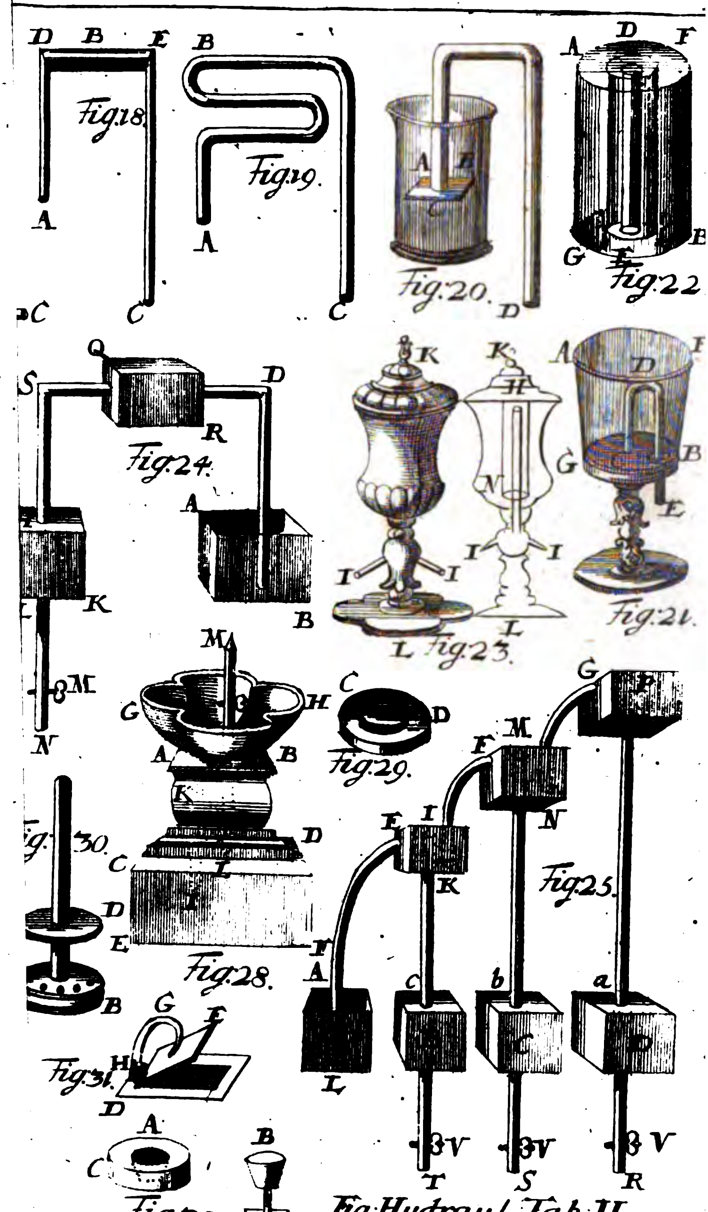
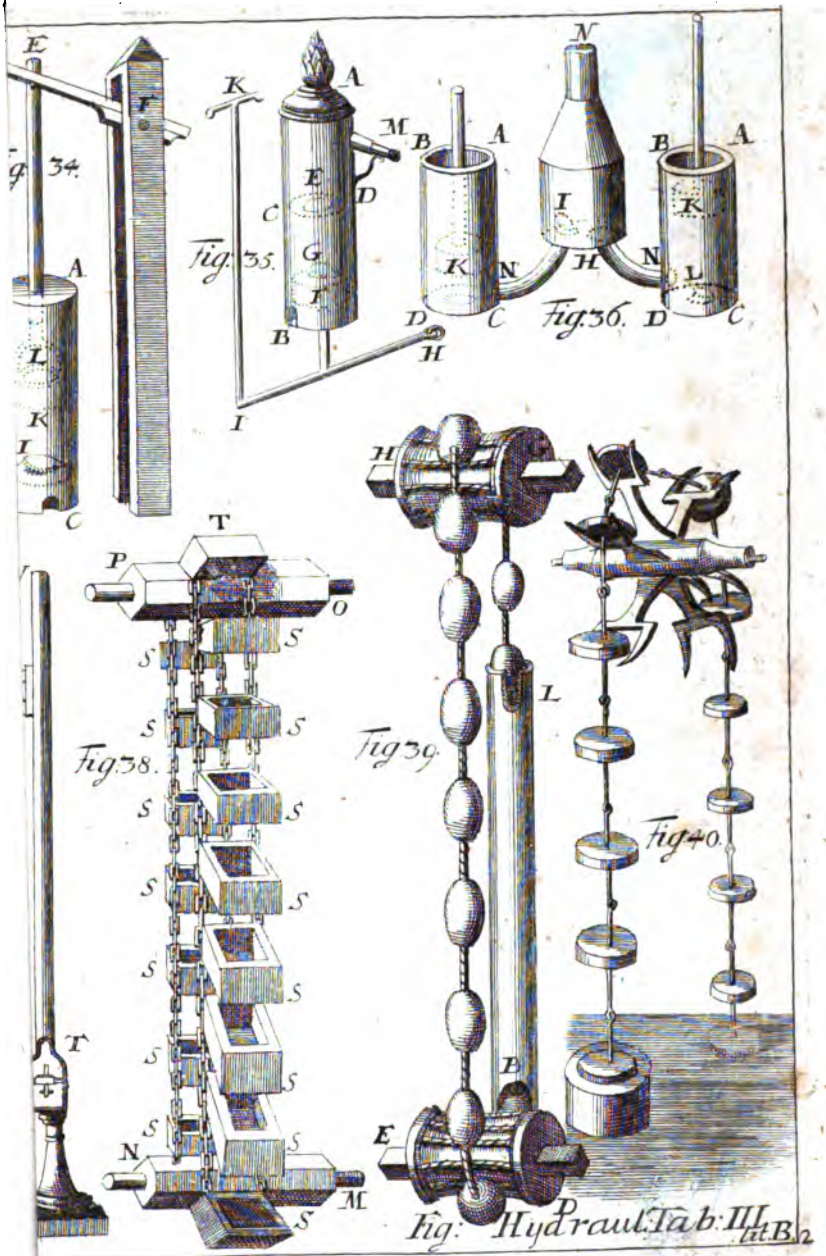


Fig: Hydraul: Tab II
lit A. 2.


Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig: Hydraul. Tab: III. lit. B. 2

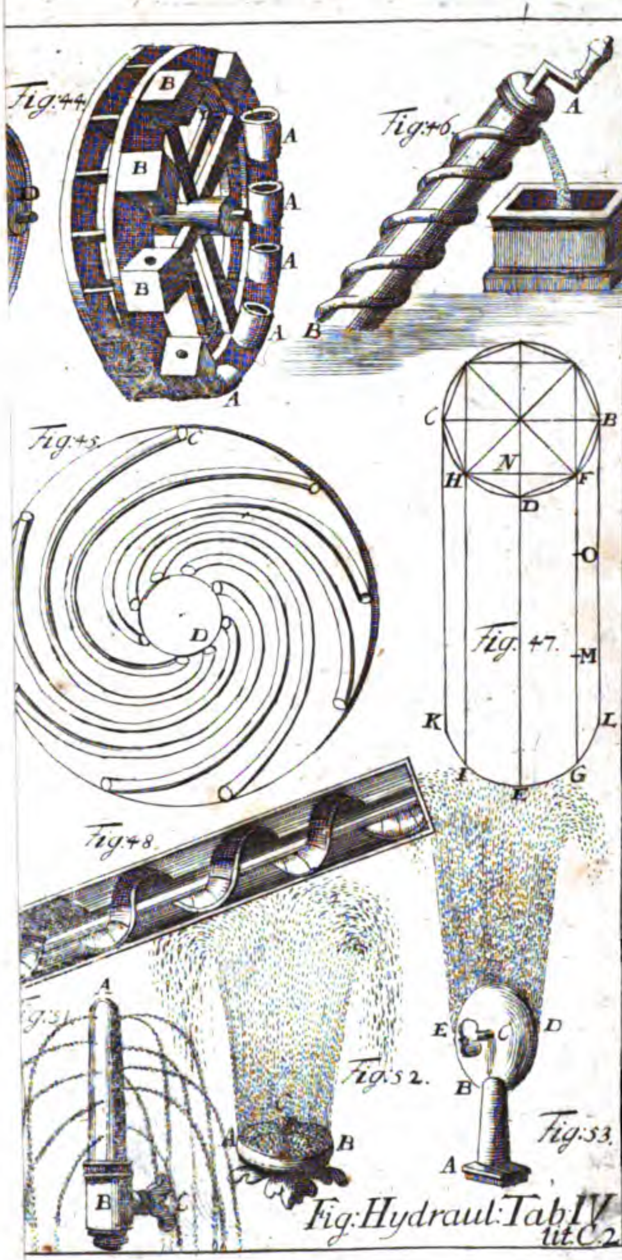


Fig: Hydraul: Tab. IV.
tit. C. 2.

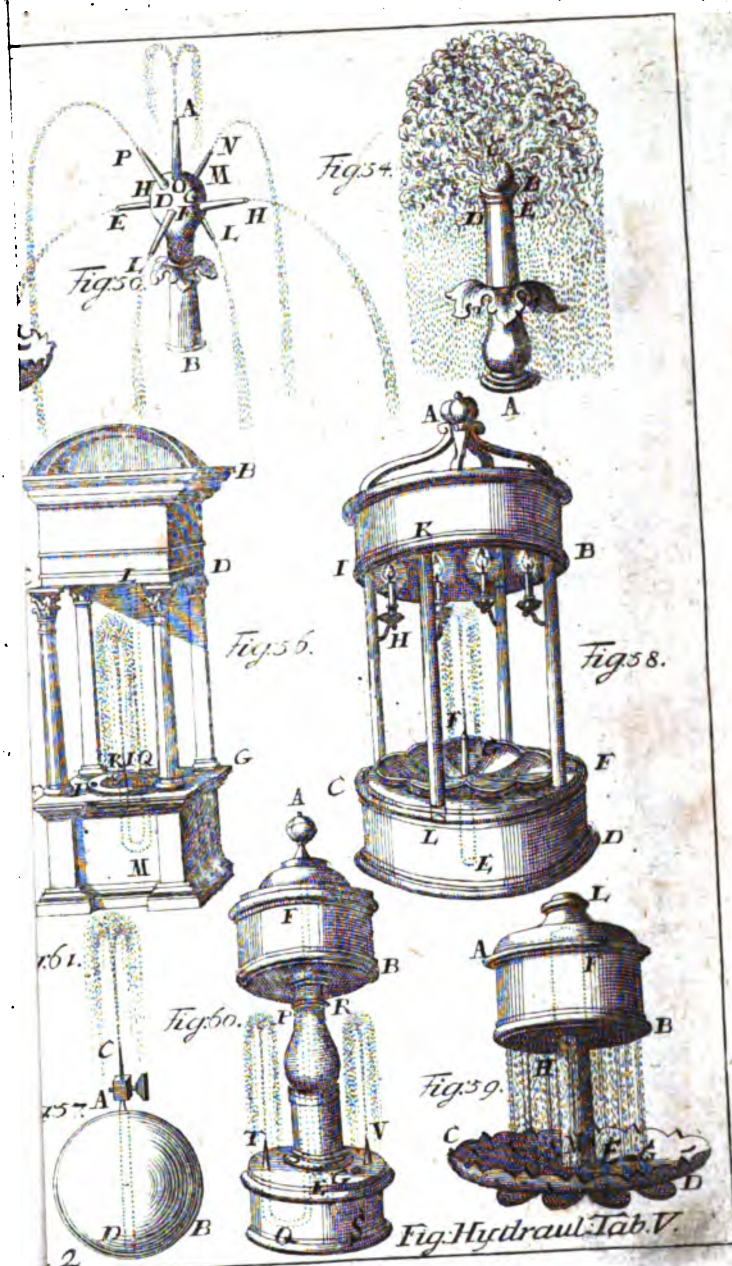
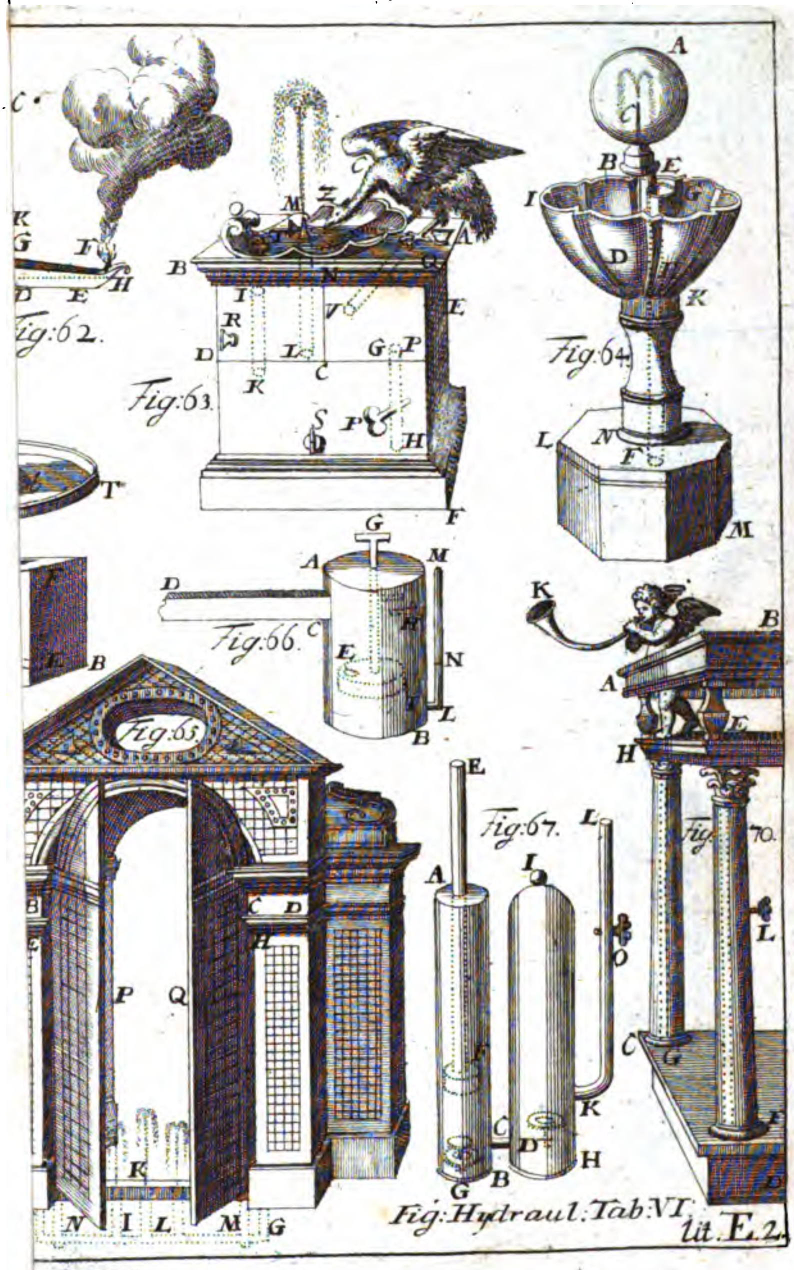


Fig:Hydraul:Tab.V.


Fig:62.
Fig:63.
Fig:64.
Fig:65.
Fig:66.
Fig:67.
Fig: 70.
Fig: Hydraul: Tab. VI.
lit. E. 2.

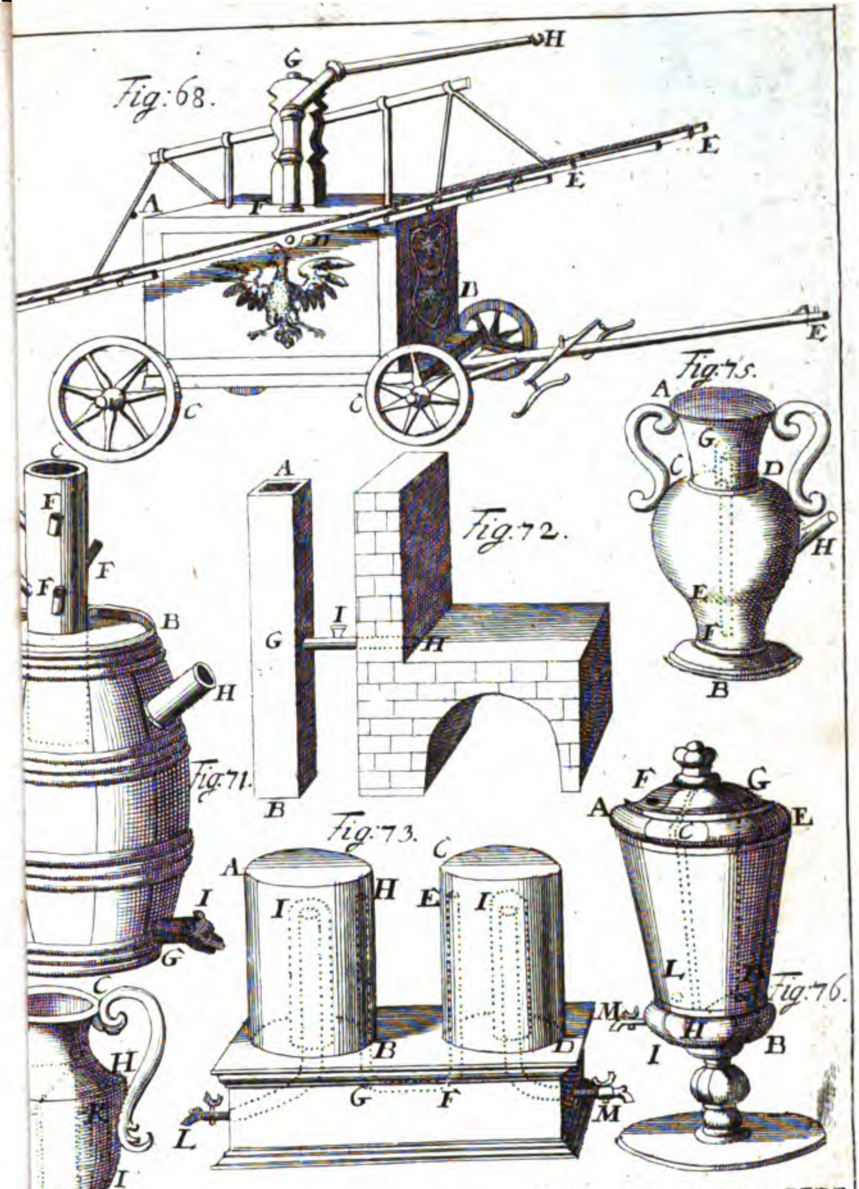


Fig:Hydraul: Tab:VII.

lit. F. 2

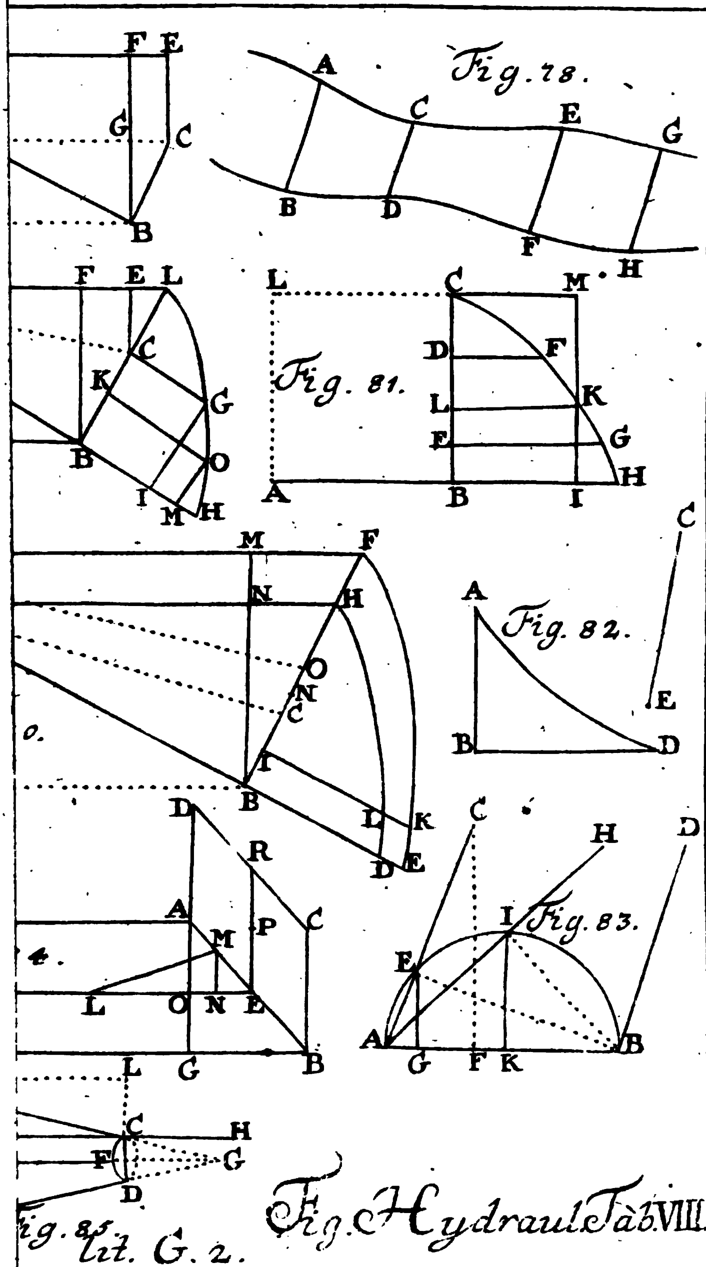


Fig. 78.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
lit. G. 2.
Fig. Hydraul. Tab. VIII.